

Invitation til kursus:

Matematik anvendt i avancerede virksomheder

Til efteråret gennemføres i et samarbejde mellem Matematiklærerforeningen og det Novo-støttede projekt *Træk virksomhederne ind i undervisningen* to kurser om matematik anvendt i avancerede virksomheder. Dette kursus har fokus på, hvordan man kan arbejde med materialerne hørende til de sidste 6 cases i projektet.

Kurserne finder sted 11. november på Høje Tåstrup Gymnasium og 12. november på Århus Statsgymnasium.

Tilmelding: <https://www.lmfk.dk/kurser/matematiklaererforeningen-300>

1. Hvad er projektet: *Træk virksomhederne ind i undervisningen*

Det overordnede formål med projektet er:

- at stimulere flere **elever** til **at studere matematikholdige uddannelser**
- at give **lærerne** muligheder for at inddrage **autentiske problemstillinger** i undervisningen
- at demonstrere, at **matematik** er et moderne fag i konstant udvikling, der arbejder med at løse vigtige opgaver
- at præsentere via film **matematikere** som engagerede mennesker, der via deres uddannelse har fået en bred palet af muligheder i deres arbejdsliv

Realisering af målet:

- gennem 12 film og tilhørende undervisningsmaterialer fortælles om 12 avancerede virksomheder, hvis produkter og problemløsninger er **utænkelige uden matematik**,
- for hver enkelt virksomhed trækkes en forbindelse mellem den matematik, **der anvendes i virksomhederne** og det, eleverne **skal lære i gymnasiet**

Tilgængelighed: Alt materiale er frit tilgængelig til brug for undervisning via projektets website:

- [Træk virksomhederne ind i undervisningen](#)

2. Arbejdsformen på kurserne

Arbejdsformen på kurserne vil være **workshops**, hvor der afvikles tre cases om formiddagen og tre cases om eftermiddagen. Den enkelte deltager kan således være med i to workshops, ét i hvert bånd:

Formiddag	Statens Serum Institut Oplæg og workshop om: <i>Matematikken bag epidemimodeller hos SSI</i>	3Shape Oplæg og workshop om: <i>Matematikken bag moderne Dental Teknologi hos 3Shape</i>	B&O Oplæg og workshop om: <i>Matematikken bag Den store lyd hos B&O</i>
Eftermiddag	Vestas Oplæg og workshop om: <i>Matematikken bag Vindenergi hos Vestas</i>	Topsoe Oplæg og workshop om: <i>Matematikken og kemien bag Power-to-X hos Topsoe</i>	Machine Learning (ML) Oplæg og workshop om: <i>Matematikken bag ML med Neurale Netværk – inkl. 3 virksomhedscases</i>

Ved tilmelding angiver man, hvilke workshops man er interesseret i at arbejde med og på hvilket gymnasieniveau (C, B, A).

Deltager flere fra den enkelte skole, kan man sprede sig og samlet dække flere virksomheder. Husk, at deltager 3, så deltager den tredje gratis.

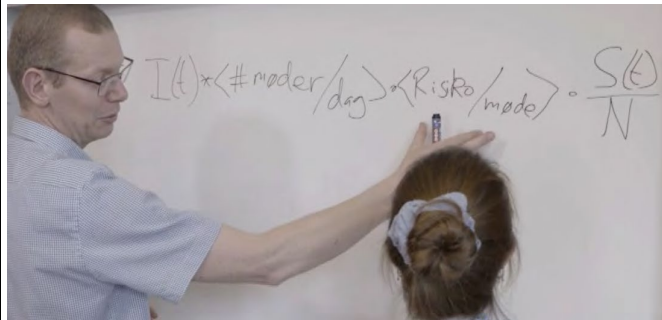
Det forventes, at deltagerne i en given workshop har forberedt sig hjemmefra ved at se de film, der knytter sig til de workshops, man har tilmeldt sig. Der vil i de enkelte workshops kun blive vist mindre uddrag af filmene, fx til diskussion af, hvordan man anvender det i undervisningen.

Alle deltagere vil få udleveret **trykte versioner af de tilhørende undervisningsmaterialer**. Bemærk, at undervisningsmaterialerne til filmen om Machine-learning først vil ligge klar kort før kurserne.

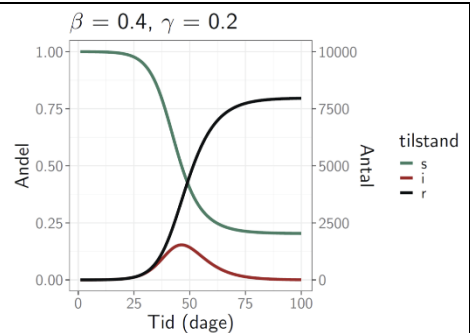
3. De 6 virksomheder - nogle appetizers

3.1 Matematikken bag epidemimodeller hos Statens Serum Institut

Filmen og materialerne blev udarbejdet i forlængelse af Covid-pandemien, så modelleringen af sådanne influenzalignende epidemier er naturligvis centralt placeret. Her er det **SIR-modellen**:



I filmen udleder Lasse de tre kobledede differentialligninger for **susceptible** (modtagelige), **infected** og **recovered** (immune og døde),

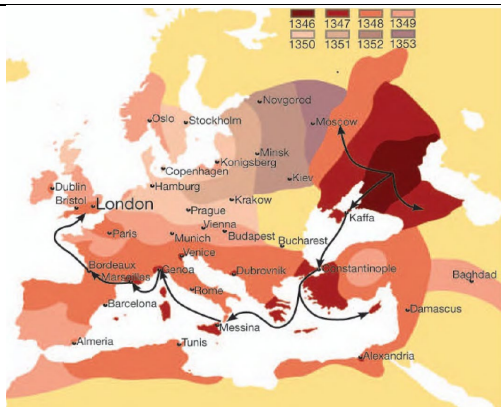


ud fra følgende overvejelser:

$$\text{antal nye smittede/dag} = I(t) \cdot \langle \# \text{ møder/dag} \rangle \cdot \langle \text{Risiko/møde} \rangle \cdot \frac{S(t)}{N}$$

Eleverne kan eksperimentere med parameterværdierne, og finde hvor epidemien peaket

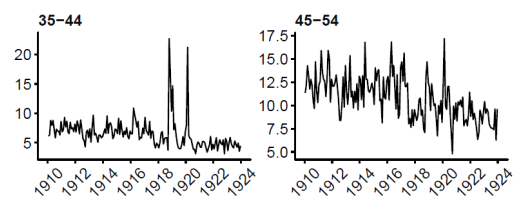
Men der er meget mere stof i undervisningsmaterialerne, også noget elever på C og B kan arbejde med, fx materialer om de store pandemier – **Pesten, Kopper, Kolera og den Spanske Syge**



Pesten, som eftertiden har betegnet *Den sorte død*, ramte Europa voldsomt i årene 1348-50. Den forsvandt ikke, men slog til igen og igen indtil 1720. Danmark blev ramt for sidste gang i 1710-11, og vi har faktisk et rimelig godt datamateriale herom, som der er links til.

Koleraepidemien i København 1853. I 1849 udsender den senere så berømte engelske læge John Snow en pamflet om sin teori: *Kolera spredes via vand*, specielt drikkevand. Det er der ikke mange, der tror på. Men da London rammes af voldsomme udbrud i 1850'erne, er det som et stort laboratorium for Snow. Han når som vi ved frem til at udpege den fatale pumpe, der spredte epidemien, og som i dag står som et mindesmærke. Men før det sker, rammes København af en kolera-pandemi i 1853. Vi har et enestående talmateriale for, hvem der blev ramt, fordelt på køn, alder, fag, bosted og andet. Undervisningsmaterialerne linker til dette. At fag er med giver grundlag for, at lade eleverne gå på opdagelse – hvorfor rammes især raske unge mænd, der arbejder i byggefagene eller som bagere?

Danmark var neutral, og vi havde ikke udenlandske tropper stationeret, så landet blev kun ramt i mildere grad af **den spanske syge**. Der findes et komplet datamateriale over den spanske syge i København i 1918-20, indberettet i ugeskrift for læger, og i dag digitaliseret af professor Lone Simonsen og lektor Viggo Andreassen. Det giver grundlag for at arbejde med spørgsmål som: Årsagen til **the extreme mortality in young adults**. Er der en forklaring i den historiske udvikling? Kan begreberne *cytokin storm* og *the antigenic sin* bidrage til en forklaring?

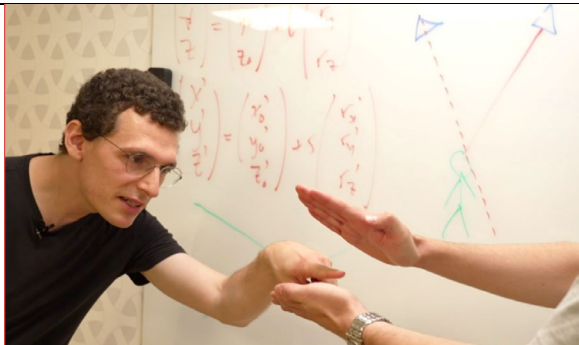


Der er materialer om de fleste epidemier, du har hørt om!

3.2 Matematikken bag moderne Dental Teknologi hos 3Shape

Den avancerede dentalteknologi, der er udviklet af 3Shape, startede som et afgangsprøveprojekt på DTU i år 2000. Tais Clausen, der var manden bag, havde bygget en scanner, der både var teknologi på øverste hylde og samtidig kom på det helt rigtige tidspunkt. Producenter af høreapparater havde netop udviklet metoder til at udforme høreapparater, så de passede individuelt ved at tage et silikoneaftryk af øregangen. Men hvordan kunne de mest effektivt produceres? De nye laboratoriescanner kunne producere et 3D billede, der var matematisk defineret, og som derved kunne kommunikeres til den virksomhed, der skulle fabrikere det lille hus, hvori elektronikken til høreapparatet skulle placeres.

Det var en succes. Men så stor er markedet heller ikke for disse høreapparater – det er det derimod for kroner og tandproteser af enhver art. Og det gav firmaet en nærmest eksplosiv vækst. Hvert sekund døgnet rundt er der et sted på kloden, der anvender 3Shapes stationære scanner, og hvert tredje sekund anvendes den avancerede håndholdte Trios scanner.



Den stationære scanner bygger matematisk på at bestemme punkters beliggenhed i rummet vha. **analytisk geometri**, med skæring af linjer i 3D – og bestemmelse af mindste afstand, når linjer ikke skærer hinanden. Modellen, vi ønsker at fotografere, skal vendes og drejes for at få alle vinkler og hjørner dækket – og derfor er næste trin at stykke disse billeder sammen. I undervisningsmaterialerne lægger vi op til, at dette kan undersøges gennem en slags spil, hvor eleverne kan skubbe og dreje, først i 2D og siden også rotere i 3D.

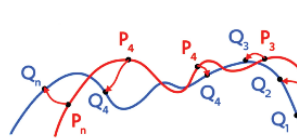
For alle 6 virksomheder er der mange oplæg til studieretningsprojekter, og i dette tilfælde er udfordringen naturligvis **koordinattransformationer**.

Den håndholdte Trios scanner, tager 2500 billeder i sekundet, mens tandlægen bevæger den rundt i patientens mund, og disse subscans skal også stykkes sammen til et billede.



Men her kender vi ikke scannerens bevægelse, så en anden matematisk metode end koordinattransformationer skal i brug. Også her lægger vi op til at eleverne skal eksperimentere sig frem ved at parallelforskyde og rotere. Og også her er der oplæg til SRP:

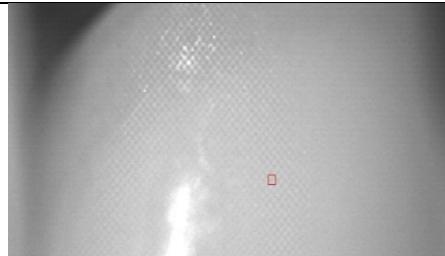
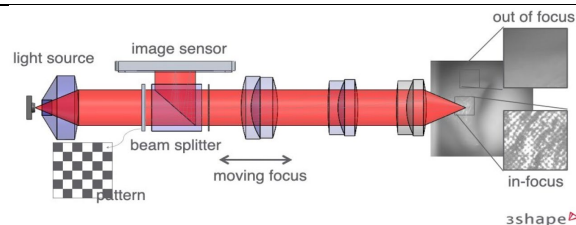
Iterative Closest Point



ICP er den algoritme, der stykker to subscans

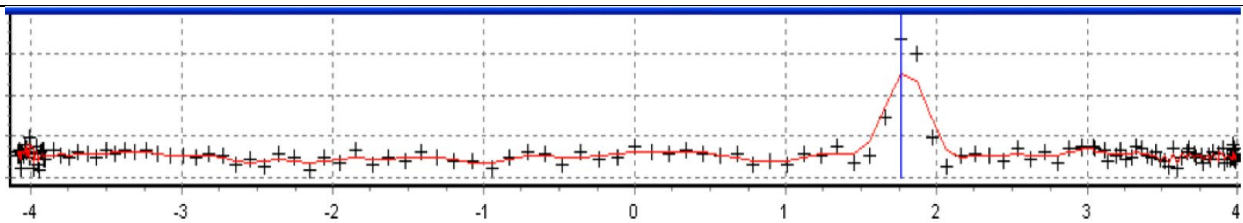
sammen: Et punkt i det røde parres med nærmeste punkt i det blå, og en **mindste kvadraters algoritme** bestemmer så den parallelforskydning og rotation, der giver den bedste sammenstykning. Og så gentages processen mange gange!

Men før vi har fået produceret subscans, der skal stykkes sammen, er der processen med at få taget ét enkelt billede, og dette koges ned til spørgsmålet: Hvordan bestemmer vi præcis, hvor et bestemt punkt på tanden befinder sig



Det er ikke let at fokusere på en nogenlunde hvid tand, så Trios starter med at beame et skakternet mønster med på tanden.

Herefter bestemmes afstanden ved en metode svarende til den mobilkameraer anvender. Her skruer vi jo heller ikke på noget – så metoden hedder **autofokus**. For hvert af de 2500 fotos beregnes en kontrastværdi for det skakternede mønster, og hvor denne er størst, er der fokus. Og fra optikken ved vi, at afstand og fokus hører sammen.



Kontrastværdier, hvor der zoomes ind på et bestemt "punkt" på tanden, se ovenfor. Hvor grafen peaker er der fokus.

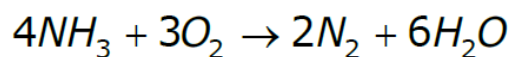
Trios-scanneren bygger således også på indsigt i *optik*, og i undervisningsmaterialerne er **et kapitel viet til optikken**, som i dag ikke er et stort emne i matematik og fysik, men som rummer godt stof, også elever på B-niveau kan honorere.

3.3 Matematikken og kemien bag Power-to-X hos Topsoe

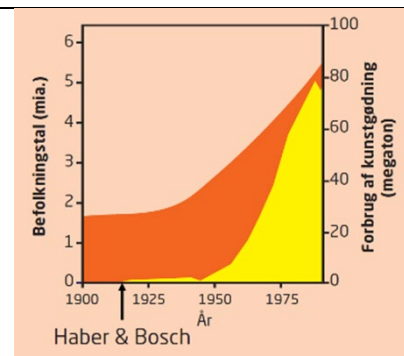
Filmen og materialerne om Topsoe lægger naturligt op til forløb i både kemi og matematik – ideelt set i et samarbejde. Men der er også rigeligt med stof til forløb alene i matematik.

Når filmen foregår på Topsoe, så er der naturligt et stort fokus på **katalytiske processer**. Ammoniak-syntesen gennemgås grundigt, både ud fra det historiske (behovet for kunstgødning med et voksende befolkningstal), men også med henblik på ammoniaks rolle i Power-to-X.

Ammoniak-forbrændingen forløber således:



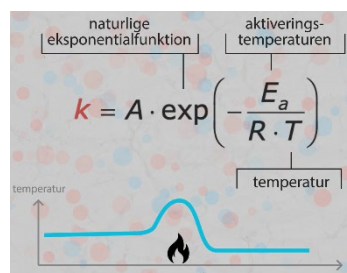
og det er en forholdsvis enkel sag på hovedregningsniveau at bestemme den energimæssige gevinst vi får af processen



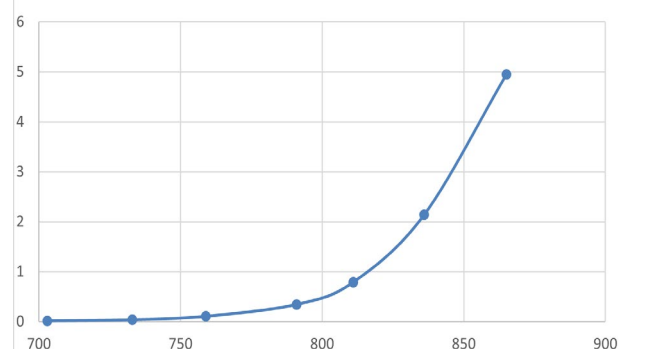
Ammoniak-syntesen er blevet kaldt den vigtigste kemiske proces overhovedet

I filmen gør vi således en del ud af at afstemme kemiske reaktionsligninger gennem simple regneeksempler. Men verden er mere kompliceret, så hovedregning erstattes i praksis af såkaldte **støkiometriske beregninger**, der dybest set handler om at løse ligningssystemer. Nogle reaktioner fører over i differentialligninger, både 1. ordens og 2. ordens. Dette emne hører under **reaktionskinetik**, der ikke behandles i filmen – der var ikke plads – men det indgår naturligvis i materialerne. Det indeholder mange gode ideer til SRP

Kemiske processer foregår sjældent af sig selv – de skal "hjælpes" i gang fx med en katalysator, der helt grundlæggende nedsætter den kemiske proces' **aktiveringstemperatur**. I materialerne lægger vi op til en matematisk undersøgelse af sammenhængen mellem kollisionsteori og **Arrhenius-ligningen**, hvori bla. indgår reaktionens hastighedskonstant, k og dens aktiveringstemperatur. En del af dette vil være stof for SRP.



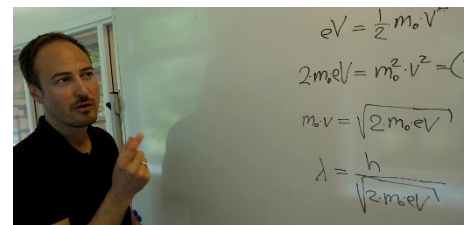
k som funktion af T , kontinuert graf



Det er oplagt at introducere linearisering i analysen af Arrhenius

Topsoe har udviklet metoder til at kunne "se" med deres elektronmikroskop, se hvad der foregår på atomart niveau. Dette har bidraget til forståelsen af, at katalytiske reaktioner især foregår på katalysatorernes kanter – hvilket lægger op til undersøgelse af **katalysatorpartiklernes geometri**.

Metoderne til at "se" bygger på indsigt i kvantemekanik. Men formlerne kan man godt regne på, uden først at skulle sætte sig ind i kvantemekanik! Da elektronmikroskopet arbejder med hastigheder, der er oppe i nærheden af lysets hastighed, er det naturligt at inddrage **relativistiske beregninger**, og måske gennemføre et lille forløb om relativitetsteorien.



3.4 Matematikken bag Vindenergi hos Vestas

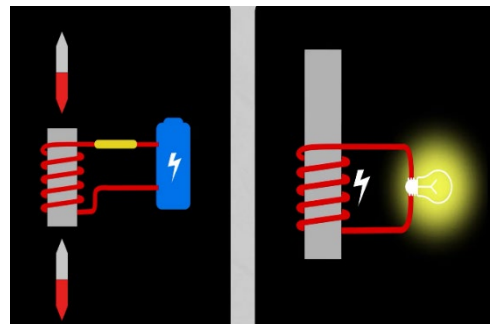
Undervisningsmaterialerne rækker ud til alle niveauer, som her om Vindenergi, hvor **skalering** er et vigtigt emne: F.eks. giver *dobbelt så stor vindhastighed 8 gange så stor energi fra vinden!* Men hvor meget kan vi så høste? Det kræver **differentialregning** at løse:

Den høstede energi omskrives til et tredjegrads udtryk, hvor den variable er forholdet mellem vindhastigheden efter møllen og hastigheden før. Men så kan vi jo beregne maksimum! Og maksimumsværdien fortæller os, hvor meget vi kan høste. Denne lov om en øvre grænse, der hedder **Betz' lov**, kan elever i gymnasiet godt udlede.

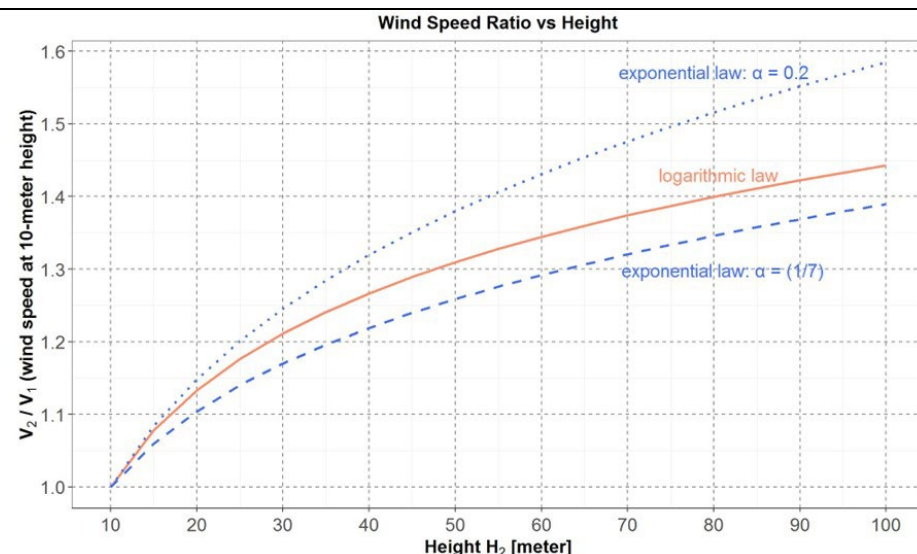
$$E_{\text{før}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot t \cdot v_0^3$$

$$E_{\text{Høstet}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot t \cdot v_0^3 \cdot \left(1 + \frac{v_2}{v_0} - \left(\frac{v_2}{v_0} \right)^2 - \left(\frac{v_2}{v_0} \right)^3 \right)$$

Det var danskeren H.C. Ørsted, der først opdagede og beskrev sammenhæng mellem magnetisme og elektricitet. **Elektromagnetismen** er baggrunden for, at vi kan omdanne energien fra vingernes omdrejninger til elektrisk energi. Fænomenet forklares først oppe i møllehuset, og dernæst nærmere i en animation i filmen. I materialerne er der oplæg til forløb, hvor man arbejder med dette emne.



Møllerne bygges højere og placeres ideelt set på havet, pga. sammenhængen mellem **højde og vindhastighed**. Modelleringen af, hvordan vindhastigheden ændrer sig med højden, er ret kompliceret, når møllerne er placeret på land med buske og træer eller andet der påvirker vinden. Derfor indføres her en "ruhedsfaktor" z_0 , som man her ser i nederste formel. Grafisk ser det således ud:



Vi bemærker, at det som vitterlig er en potenslov, i litteraturen ofte betegnes som en eksponentiel lov.

Potensloven

$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^\alpha$$

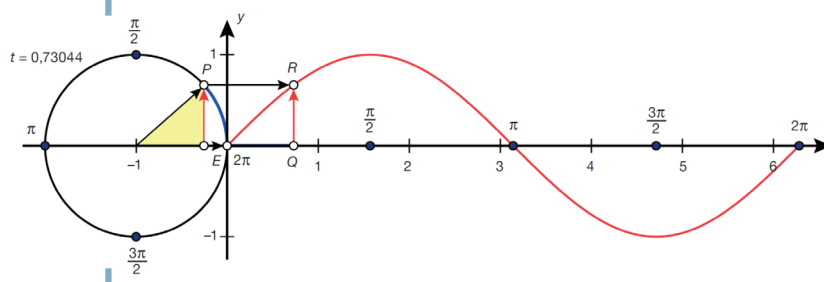
v_1 er hastigheden ved højden h_1 , fx 10 m oppe.

v_2 er den hastighed vi søger, fx ved $h_2 = 100$.

Den logaritmiske lov

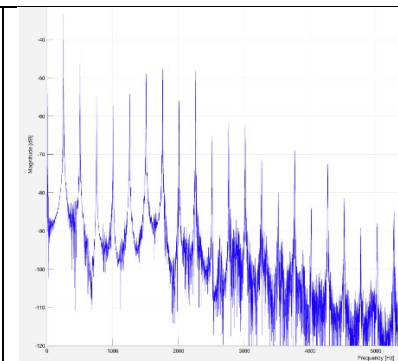
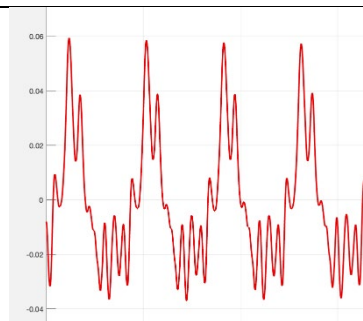
$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\ln\left(\frac{h_2}{z_0}\right)}{\ln\left(\frac{h_1}{z_0}\right)}$$

3.5 Matematikken bag Den store lyd – hos B&O

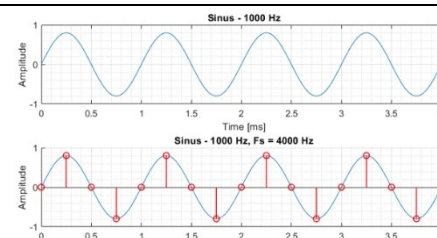


Eleverne møder i gymnasiet på B-niveau sinus og cosinus som værktøjer til at beregne ukendte stykker i trekanter. Der er umiddelbart langt fra en trekant til **en harmonisk svingning**. Vi demonstrerer denne sammenkobling i undervisningsmaterialerne som demonstreret på illustrationen: at når P bevæger sig rundt på cirklen, og vinklen i centrum derved vokser, så genererer det tilsvarende punkt R en sinuskurve!

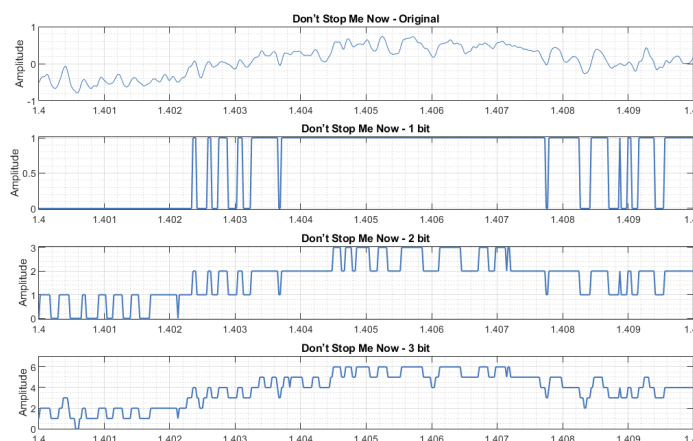
Al lyd kan modelleres med sinus og cosinus. Men lyden får først *klang* når der er **overtoner** med. Dette illustreres i filmen med en række instrumenter, og det kan fx lægge op til et arbejde med addition af sinussvingninger. Hver overtone har en **frekvens**, der er et multiplum af grundtonen – og der findes i dag software, der kan analysere (fourier-)spektret som vist th.



Når analoge signaler oversættes til digitale, er et af de centrale begreber **samlingsfrekvensen**. Det illustreres i filmen grafisk og gennem lydeksempler. Den oplagte ide i oversættelsen er simpelthen at måle hvor stort udsvinget er "til mange tidspunkter". Men hvor mange målinger skal man foretage for at kunne genskabe signalet? Det gav den svenske matematiker Nyquist svaret på for 100 år siden – beviset herfor er ikke let, men i materialerne er der et oplæg til en srp om dette

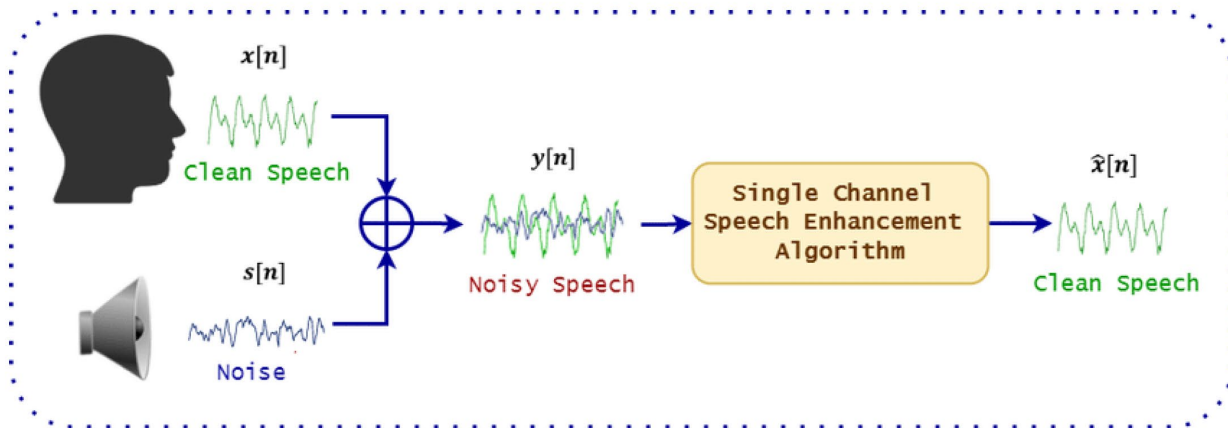


Sampler vi signalet med Nyquist-frekvensen, så kan det i princippet genskabes 100% korrekt. Men det forudsætter dog, at vores målinger af udsvingene er 100% præcise. Det kan man naturligvis ikke – og det fører over i det andet centrale begreb, **bitdybden**. Illustrationerne viser, at en sampling med bitdybde 4 allerede giver et signal, der ligner originalen rimelig godt. Bitdybde 4 betyder, at der lægges $2^4 = 16$ målelinjer ind mellem 0 og 1, og ved hver aflæsning vælges den nærmeste linje. En CD produceres med en bitdybde på 16, hvilket betyder, at der lægges over 60.000 målelinjer ind. Det kunne lægge op til et lille forløb om 2-talsystemet.

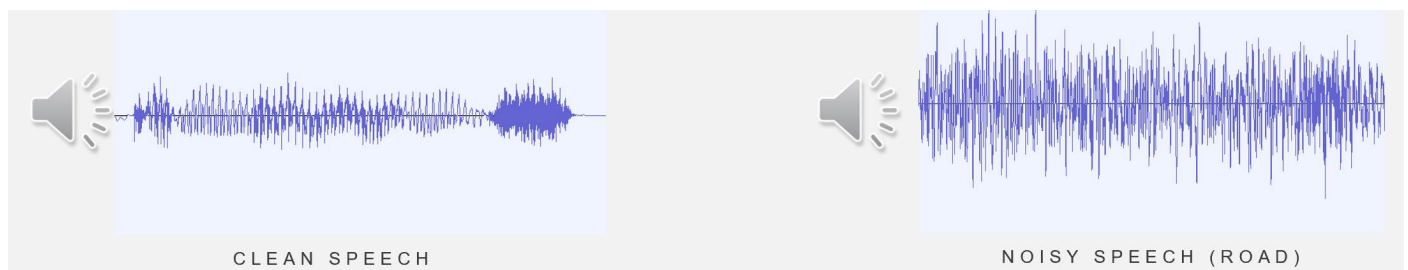


3.6 Matematikken bag Machine-learning med Neurale Netværk

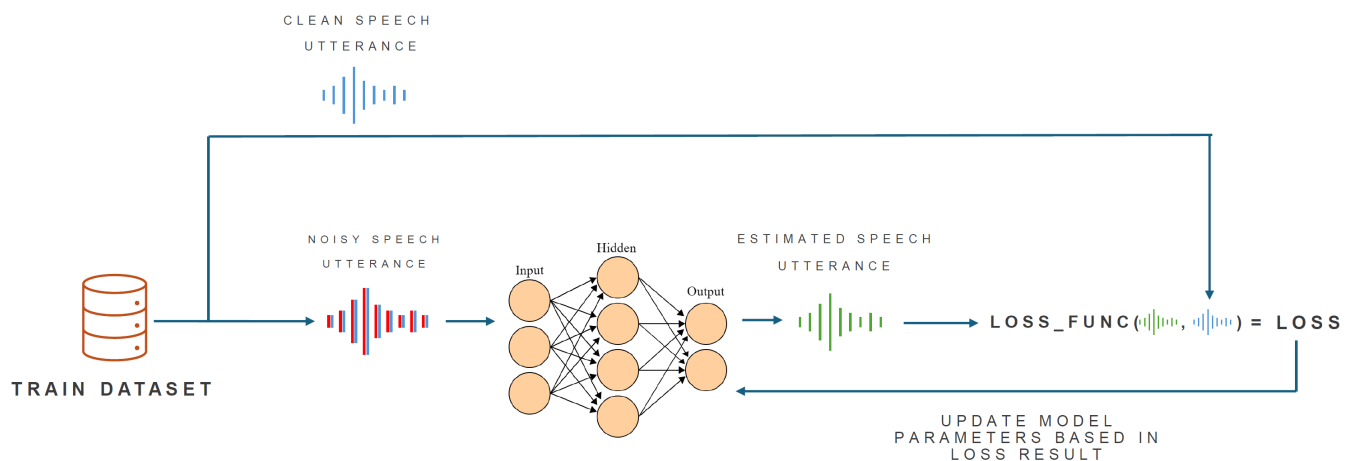
Filmen om machine-learning rummer dels en præsentation af nogle centrale begreber og metoder v/ Jes Frellsen, fra Department of Applied Mathematics and Computer Science, DTU, dels 3 virksomheds-cases, som illustrerer forskellige elementer af ML. Disse tre cases handler om **lyd og noise-cancellation, billedanalyse og mønstergenkendelse**, samt datadrevne beregninger af **hurtige vejforudsigelser**. Problemstillingen om noisecancellation kan illustrere ML:



Amplitudegraferne ser fx således ud:



Det neurale netværk er formuleret i en meget stor samling af ligninger og koblinger mellem de forskellige nodes, og træningen af det kan illustreres således:



Det centrale i neurale netværk er træningsdata – og her bliver det normale måske – som på B&O – at de producerer træningsdata selv i stedet for at hente det på nettet eller andre steder. Ofte er der alt for lidt interessant materiale, der er bias, meget kan være genereret af andre neurale netværk osv. B&O har indsamlet et stort datamateriale af støj fra motorveje, fra cafeer, fra lufthavne osv, som så er klippet op og indgår i ovst. træningsdata.

Den successive approksimation, der er illustreret ovenfor med gentagne beregninger af værdien af en "loss-funktion", er ikke meget anderledes end noget, vi kender. Og de funktioner der indgår i det neurale netværk, er heller ikke sære eksotiske ting – tværtimod bygges det op af simple funktioner, lineære, stykvis lineære og sigmoid-funktioner, der så via sammensatte funktioner hurtigt bliver meget kompliceret. Men byggestenene er kendt matematik.