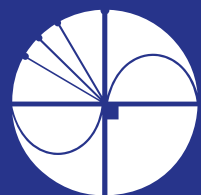
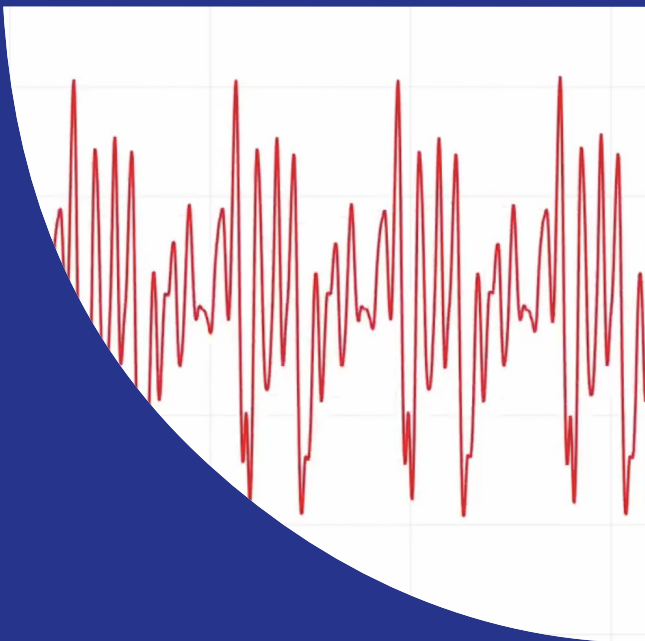


Matematikken bag den store lyd hos B&O



matematik
i arbejde

Matematikken bag den store lyd hos B&O

Undervisnings og Projektmaterialer
til filmen

Bjørn Grøn (red.) og Mads Leth
Med bidrag af Gert Uttenthal Jensen

© 2020 Konceptet: *Træk virksomhederne ind i undervisningen* tilhører forfatterne til lærebogssystemet *Hvad er matematik?* Bjørn Grøn, Bodil Bruun og Olav Lyndrup.

© 2025 undervisningsmaterialer til filmen *Matematikken bag den store lyd hos B&O* er produceret af *HEM – Produktion og Formidling*.

Grafisk koncept: Ulla Korgaard, Designeriet.

Filmene og de tilhørende projektmaterialer hostes af Lindhardt og Ringhof / Praxis på websitet:

[Træk virksomhederne ind i undervisningen \(praxis.dk\)](https://praxis.dk/træk-virksomhederne-ind-i-undervisningen)

Filmene og de tilhørende projektmaterialer kan frit downloades og anvendes til selvstudium og i undervisningen. Hverken film eller projektmaterialer må gøres til genstand for kommerciel udnyttelse. Henvendelser om materialerne kan rettes til Bjørn Grøn: bjgro1@gmail.com.

Undervisningsmaterialer til filmen *Matematikken bag den store lyd hos B&O*.

Forfattere: Bjørn Grøn (red.), Mads Leth, og med bidrag af Gert Uttenthal Jensen

Vi har forsøgt at finde eventuelle rettighedsindehavere, som kan tilkomme honorar i henhold til loven om ophavsret. Skulle der mod forventning være rettighedsindehavere, som måtte have krav på vederlag, vil dette blive håndteret, som om der var indgået en aftale.

Projektet *Træk virksomhederne ind i undervisningen* er forankret på Rysensteen Gymnasium.

Film og tilhørende materialer er produceret med støtte fra Novo Nordisk Fonden

Indholdsfortegnelse

0. Indledning	7
1. Modellering af bølgefænomener	8
1.1 Bølger på en snor	9
1.2 Harmoniske bølger	10
1.3 Interferens	12
2. Trigonometriske funktioner	13
2.1 Grader og radianer	14
2.2 Periodiske egenskaber og andre symmetrier	15
2.3 Den harmoniske svingning	17
2.4 Differentiation af sinusfunktionen	19
3. Overtoner, stående bølger og svævning	22
3.1 Stående bølger	23
3.1.1 Frekvenserne af overtonerne	24
3.2 Additionsformler og de logaritmiske formler	25
3.2.1 Additionsformlerne for sinus	25
3.2.2 Den logaritmiske formel	25
3.3 Svævning og stødtoner	27
<i>Hvorfor støder en kvint, der ikke er helt ren?</i>	<i>28</i>
4. Matematik og musik	30
4.1. Intervaller og frekvensforhold	31
4.1.1 Toner og tonenavne	31
4.1.2 Interval	31
4.1.3 Cent-funktionen	32
4.2 Tonesystemer og klaverstemninger	34
4.2.1 Den Pythagoræiske stemning	34
<i>I den pythagoræiske stemning stemmes alle oktaver og kvinter rene.</i>	<i>34</i>
4.2.2 Den ligesvævende stemning	36
4.2.3 Middeltonestemningen eller den prætorianske stemning.	39
4.2.4 "Den rene stemning" ... eller snarere "De rene stemninger".	43
4.3 Den svingende streng – nu med toner	45
5. Modellering med trigonometriske funktioner	49
5.1 Omløbstiden for Jupiters måne Callisto	50
<i>Kommentar om sinusregression.</i>	<i>52</i>
5.2 Modellering af dagens længde	52
<i>Løsning til 5.2 Modellering af dagens længde</i>	<i>53</i>
5.3 Oplæg til SRP: Modellering af tidevandets niveau	53
5.3.1 Kelvin og The Tidal Commission	54
5.3.2 Kelvins mageløse maskiner til harmonisk analyse og syntese	55
5.3.3 Tidevandets musik – hver havn har sin melodi	58
5.3.4 En SRP om at skabe sig en sikker havn.	58
5.4 Mangfoldigheden i modellering med trigonometriske funktioner	58
6. Fourrierrækker og Fourieranalyse	62
6.1 Analyse af sammensatte lydbilleder	63
6.2 Fouriers gennembrud	64

6.3 Idéen bag Fourierrækker	65
6.4 Definition af Fourierrækken	68
6.5 Hvor kommer Fourierkoefficienterne fra?	70
6.6 Fourieranalyse i praksis	73
7. Sampling og Nyquist-teoremet	74
7.1 Sampling	75
7.2 Nyquist-teoremet	76
7.3 Kvantisering og bitdybde	78
7.4 Digital lydfilstørrelse	80
7.5 Nyquist kritiske frekvens – hvor kommer den fra?	81
8. Det binære talsystem	82
8.1 Talsystemer	83
8.2 Det binære talsystem	84
8.3 Regning med binære tal	85
<i>Addition</i>	85
<i>Subtraktion</i>	86
<i>Multiplikation</i>	86
<i>Division</i>	87
8.4 Bits og bytes - lagring af data	88
9. ANC og Filtre	90
9.1 Active Noise Cancelling	91
9.1.1 Sammensatte toner og interferens	91
9.1.2 Implementeringen	92
9.2 Filtre i højtalere	93
9.2.1 Low Pass filter og High pass filter	93
9.2.2 Glidende gennemsnit	93
9.2.3 Glidende gennemsnit med Gaussisk vægtning	95

0. Indledning

I projektet *Træk virksomhederne ind i undervisningen* bliver der produceret 12 film med tilhørende undervisningsmaterialer til hver film. Det foreliggende er skrevet i tilknytning til filmen **Matematikken bag den store lyd hos B&O**. Enkelte steder opfordres til at se korte sekvenser i filmen, men hovedparten af materialet kan sagtens anvendes uafhængigt af filmen. Så man behøver ikke have filmen kørende, mens man arbejder med de matematiske problemer.

Materialet er opdelt i en række kapitler, der kan gennemgås hver for sig. Det enkelte kapitel bygger således ikke på de foregående. Med symboler er det markeret, at dette kapitel eller afsnit kan man arbejde med, når man er på pågældende niveau. Man kan naturligvis også have glæde af at se et stof på nye måder, selv om man selv nu befinder sig på et lidt højere niveau. Og man kan prøve at udfordre sig selv ved at gå i krig med et emne og øvelser, der er markeret til et højere niveau end ens eget. Niveauerne er markeret med symbolerne:

 9. klasse og 1.g	 Slut 1.g og 2.g	 3.g
---	--	--

Trigonometriske funktioner kommer normalt på banen ret sent i gymnasieundervisningen. Derfor har vi lagt et kapitel 1 ind, hvor bølgefænomener undersøges uden vi bringer sinusfunktionen på banen. For studieretninger med matematik og musik, lægges der i kapitel 4 op til en eksperimentel undersøgelse af, hvorfor det ikke er en let sag at nå til enighed om, hvordan fx et klaver skal stemmes. Gå selv på opdagelse: Du vil finde mange forslag til et samarbejde med fag som fysik, historie, engelsk, musik og informatik - og til SRP'er i disse fagkombinationer.

Film og materialer er til fri download og anvendelse i undervisning og selvstudier. Bliver undervisningsmaterialet downloadet og dele af det kopieret, skal der angives kilde.

Forkortelsen HEM står for lærebogssystemet: *Hvad er matematik?* Fra HEM's website: [Hvad er matematik - LRU.dk \(praxis.dk\)](http://Hvad%20er%20matematik%20-%20LRU.dk%20(praxis.dk)) kan der bla. frit hentes mange projekter.

Hvor der er markeret **Link til 7** (og andre tal) angives, at her kan der hentes ekstra materialer ind. Disse tilgås via website for filmen. Find nummeret og klik.

Vi vil meget gerne have feedback med kommentarer og forslag, der kan forbedre de kommende samlinger af undervisningsmaterialer.

Film og undervisningsmaterialer produceres med støtte fra Novo Nordisk Fonden.

1.

Modellering af bølgefænomener



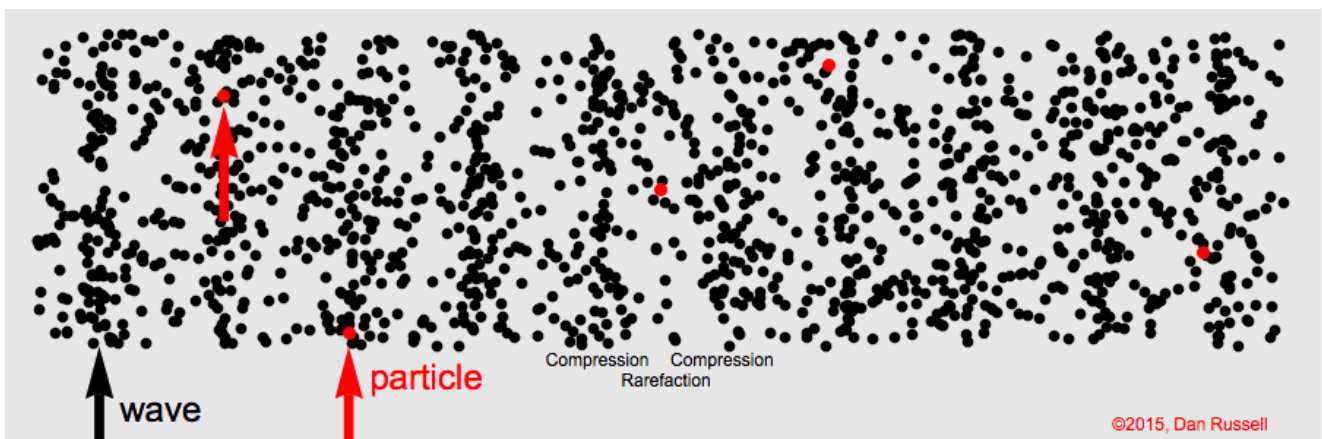
Bølgefænomener er gode eksempler på, at vidt forskellige ting i naturen, der slet ikke "ligner" hinanden, kan beskrives med den samme matematik. Bølger i vand, lyden af musik, elektrisk strøm, jordskælv, data over en epidemis udvikling og meget mere. I dette kapitel vil vi undersøge disse fælles træk og indføre begreber, der gør det enklere at beskrive og sammenligne bølgefænomener. I dette kapitel er matematikken på et forholdsvis enkelt niveau – vi indfører først de trigonometriske funktioner, sinus og cosinus i undersøgelsen i de følgende kapitler.

1. Modellering af bølgefænomener

(Kapitel 1 ummer en behandling af bølgefænomener uden anvendelse af formalismen fra de trigonometriske funktioner. Kapitlet er således velegnet til 9. klasse / 1.g niveau, men elever på højere trin kan også have glæde af at få en indføring i emnet uden at gå i stå i den analyse af emnet, der omhandler anden ordens differentialligninger, og som præsenteres i de følgende kapitler.)

Alle kender bølger på en vandoverflade, alle kan høre lydbølgerne til en koncert og alle kan se det farvespektrum lyset fra solen skaber gennem regndråber. Men hvad har disse ret forskellige fænomener egentlig til fælles, som gør, at vi kalder dem bølger?

- Bølger er svingninger, der udbreder sig i tid og rum.
- De kan udbrede sig i vakuum, de kan udbrede sig i et medium og de kan udbrede sig i en overgang mellem to medier.
- De flytter energi og ikke masse. Dog vibrerer masse lidt frem og tilbage.

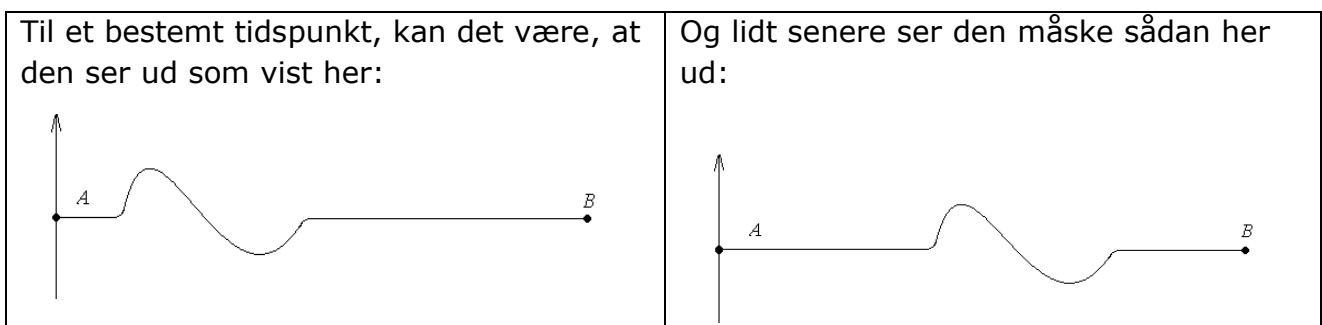


Ovenstående billede er lånt fra <https://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/waves/wavemotion.html>. og er en simulering af hvordan lyd bevæger sig gennem et medium som luft. Vi kan se bølgen bevæge sig, men de enkelte molekyler, hvor nogle er markeret med rødt, bevæger sig blot frem og tilbage. I filmen forklarer Jakob, at de molekyler, hans tale sætter i svingninger er ikke de molekyler, der rammer Nicolines eller Antons ører. Du kan se flere eksempler på sitet.

Man vil aldrig kunne tegne et billede af en bølge, fordi den jo hele tiden flytter sig. Men man kan tage et *øjebliksbillede* af bølgen til et ganske bestemt tidspunkt.

1.1 Bølger på en snor

Lad os prøve at illustrere bølgebegrebet ved at betragte bølger på en lang udspændt snor, der f.eks. kan frembringes ved at vi står og hiver op og ned i den ene ende af snoren.



Vi foretager nu en række overvejelser for snorbølgerne. Det viser sig at disse overvejelser gælder for bølger i al almindelighed.

1. Når bølgen bevæger sig, transporteres dens *form* af sted langs med snoren. Men selve snoren flytter sig ikke med bevægelsen, den svinger bare omkring den stilling, hvor den var, før den blev forstyrret. Vi konkluderer:

Når en bølge flytter sig, transporteres bølgens form

Hvis man har aftalt et eller andet morsesystem ud fra bølgens form (f.eks. prik = kort bølge, streg = lang bølge) kan man altså ved hjælp af bølgens form sende information af sted og derved kommunikere med en, der står ved den anden ende af snoren.

2. Hvis snoren i den anden ende var forbundet med en lille klods, ville vi kunne få denne til at bevæge sig ved at sende bølgen af sted. Når klodsen bevæger sig, må den have kinetisk energi. Denne energi er blevet overført til klodsen via bølgen. Vi konkluderer:

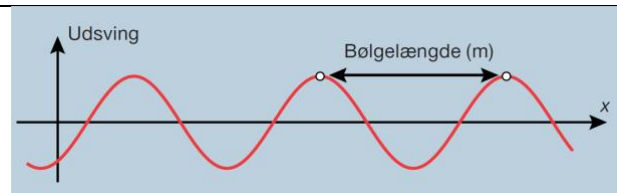
En bølge kan transportere energi fra et sted til et andet.

1.2 Harmoniske bølger

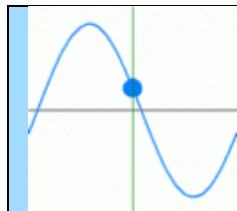
Hvis bølgens udslag har den pæne symmetriske form, der er vist på figuren nedenfor, kaldes bølgen for en **harmonisk bølge**. For sådanne bølger indføres nogle begreber, til at beskrive bølgen:

Afstanden fra én bølgetop til den næste kaldes bølgens **bølgelængde**. Som symbol for bølgelængde bruges det græske λ (lambda = græsk l). Bølgelængden måles i meter.

Det maksimale udsving fra ligevægt til top (og til bund) kaldes for **amplituden**

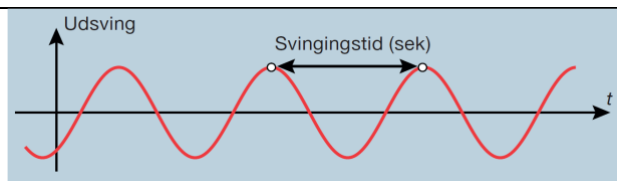


Grafen viser udsvinget som funktion af stedet



Hvis man betragter et fast punkt på bølgen, vil man opdage, at det står og svinger op og ned. Den tid det tager fra punktet er helt i top, til det er tilbage i topstillingen igen, kaldes bølgens

svingningstid.



Grafen viser udsvinget som funktion af tiden. Svingningstiden betegnes med T og måles i sekunder.

Øvelse 1.1

- a) De to grafer ser ved første blik helt ens ud, men kig nøjere efter og forklar forskellen.
- b) Hvis det fx er bølger i vand, hvilken af de to grafer repræsenterer så et grafisk billede af det vi ser.

Definition.

Ved bølgens **frekvens**, f forstår vi: Det antal hele svingninger, der forløber pr sekund.

Hvis der på 1 sekund er f svingninger, der hver varer et tidsrum på T sekunder, så får vi ligningen:

$$f \cdot T \text{ (sek)} = 1 \text{ (sek)}$$

der giver os følgende sammenhæng mellem svingningstid og frekvens:

$$f = \frac{1}{T} . \text{ Frekvensen måles i enheden Hertz (Hz) og } 1\text{Hz} = 1\text{sek}^{-1}.$$

Betragter vi stadig det faste punkt fra før, vil der i løbet af én svingningstid være "passeret en bølgelængde" igennem det. Bølgens form har med andre ord bevæget sig en bølgelængde på en svingningstid. Vi kan derfor beregne bølgens udbredelsesfart, v ved:

$$v = \frac{\text{bølgelængde}}{\text{tid}} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \frac{1}{T} = \lambda \cdot f$$

og vi får derved en af de vigtigste formler for bølgelæren:

For en bølge med udbredelsesfart v , bølgelængde λ , svingningstid T og frekvens f har vi følgende sammenhæng:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$$

Øvelse 1.2

Argumenter omhyggeligt for de ovenstående formler.

Øvelse 1.3

Lydens fart er ca. 340 m/s.

- a) Beregn bølgelængden for en tone med frekvensen 440 Hz
- b) Hvilken frekvens har en tone, hvis bølgelængden er 2,0 meter?

Mennesker kan generelt høre frekvenser mellem 20Hz og 20.000 Hz.

- c) Beregn længden af de korteste og længste bølgelængder, mennesker kan høre
- d) Find på nettet, hvilke frekvenser en hund kan høre og beregn tilsvarende den maksimale og minimale bølgelængde, en hund kan høre

Øvelse 1.4

En bølge har udbredelsesfarten $v = 2,5$ m/s og bølgelængden $\lambda = 0,65$ m

- a) Hvor langt bevæger bølgen sig på 15 sekunder?
- b) Beregn bølgens frekvens.
- c) Beregn bølgens svingningstid.

Øvelse 1.5

Radiobølger er ligesom lys elektromagnetisk stråling. En bestemt radiobølge har bølgelængden $\lambda = 25,0$ km og en frekvens på $f = 12000$ Hz

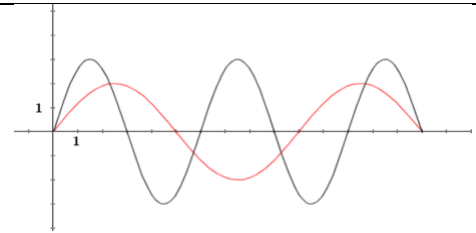
- a) Beregn udbredelsesfarten af bølgen.

- b) Bestem bølgens svingningstid.
 c) Hvilken bølgelængde får bølgen hvis frekvensen ændres til $f = 20000\text{Hz}$?

1.3 Interferens

Hvad sker der hvis to bølger støder sammen? Det kan man undersøge ved at sende bølger mod hinanden på en snor eller i et vandbassin. Det viser sig, at bølgenes udslag bliver lagt sammen som funktionsgrafer.

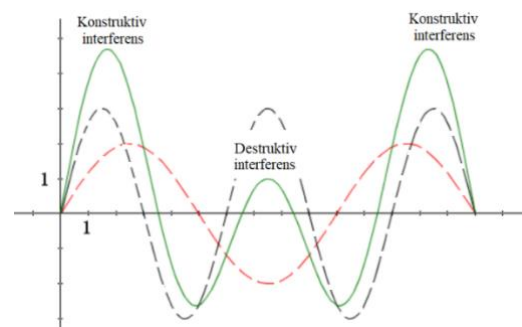
Det er skitseret på figurerne her nedenfor:



Først tegner vi bølgerne hver for sig som om den anden bølge ikke eksisterede. Så lægger vi bølgenes udslag sammen som funktioner og finder derved den bølge (vist med grønt) vi observerer i virkeligheden:

De steder hvor de to oprindelige bølger har udslag til samme side vil de derfor **forstærke** hinanden og give et samlet højere udslag i den bølge vi rent faktisk ser. Det kalder vi **konstruktiv interferens**.

Omvendt vil de to bølger **svække** hinanden så den resulterende bølges udslag bliver mindre, når de to oprindelige bølger har udslag i modsat retning. Dette kalder vi **destruktiv interferens**.



Dette vigtige princip, at den bølge, man observerer, fremkommer ved at lægge alle bølgeudslagene sammen, giver anledning til at indføre følgende betegnelse:

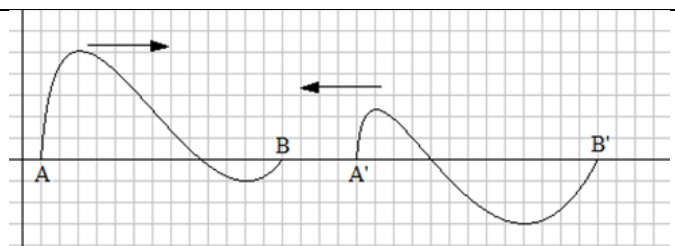
Superpositionsprincippet: Når en eller flere bølger støder sammen bliver det totale udslag i mediet i hvert punkt, lig med summen på det pågældende sted af de enkelte bølgers udslag.

Når bølgerne på denne måde påvirker hinanden og skaber en "sumbølge" siger man, at der er interferens.

Øvelse 1.6

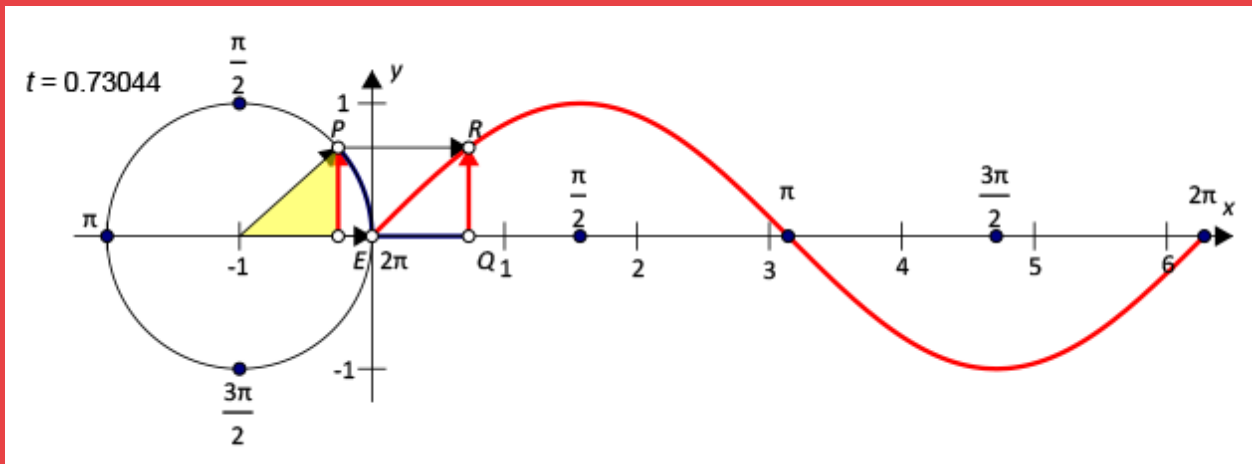
På figuren er vist to bølger, der møder hinanden på en snor. På et tidspunkt vil de to bølger "være inde i hinanden" så A' ligger oven i A og B' ligger oven i B .

- a) Find ved hjælp af superpositionsprincippet det resulterende udslag af snoren i forskellige punkter i denne situation og tegn den bølge der fremkommer.



2.

Trigonometriske funktioner

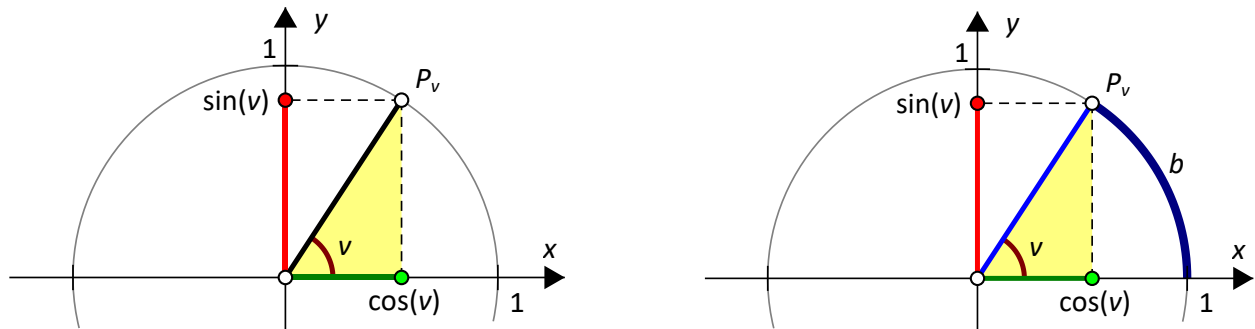


Vi lærer først om de trigonometriske funktioner sinus og cosinus i forbindelse med geometriske problemer: at bestemme ukendte sider og vinkler. Men de har langt videre anvendelser, som funktioner der kan modellere alt, der svinger. Det er ret overraskende, indtil man ser en tegning som den ovenfor. Når et punkt bevæger sig med jævn fart rundt på en cirkel, så generer y-kordinaten kurven, vi i dag kender som en sinuskurve. Vi ser også, at vinkler er oversat til almindelige tal, som vi kalder for radianer, når vi ikke har en bestemt enhed. Vi undersøger funktionstyperne $h(x) = A \cdot \sin(w \cdot x + \phi) + B$ og lærer at differentiere sinus og cosinus.

2. Trigonometriske funktioner

2.1 Grader og radianer

De trigonometriske funktioner har vi lært om i forbindelse med geometriske problemer om at beregne ukendte sider og vinkler. Sinus og cosinus bliver her defineret som koordinaterne til vinklens retningspunkt på enhedscirklen:



Når punktet P_v gennemløber cirklen, gennemløber vinklen v intervallet $[0; 360^\circ]$, og funktionerne sinus og cosinus varierer inden for intervallet $[-1; 1]$.

Men når man betragter de grafiske billeder af sinus og cosinus, så opstår naturligt den tanke, at disse funktioner må kunne anvendes i en beskrivelse af bølger og svingninger. Nu er de uafhængige variable i geometriske problemer sider eller *vinkler*. Men når vi taler om bølger i havet eller lydbølger, så giver det ingen mening at tale om vinkler og gradtal.

Det problem har imidlertid en meget elegant løsning – se de to tegninger ovenfor:

Til venstre er markeret en vinkel, afsat i Origo, og med angivelse af retningspunktet P_v .

Her har vi samtidig markeret cirkelbuen b tegnet fra $(1,0)$ op til P_v . Det kan vi gøre for enhver vinkel, og derved ser vi, at der er en 1-1 sammenhæng mellem vinklerne i intervallet $[0; 360^\circ]$, og de reelle tal, der kan være buelængder til vinkler i dette interval.

Det er en enhedscirkel, 360° er vinklen hele vejen rundt – som altså svarer til buelængden af hele cirkelens omkreds. Men vi ved jo, at cirkelens omkreds er $2 \cdot \pi \cdot r$, og med $r = 1$ får vi derfor, at 360° svarer til en buelængde på $2 \cdot \pi$.

Længdeenheden kan være hvad som helst, 1 nanometer eller en kilometer eller... For at komme udenom det lille problem har man indført som konvention at buelængden angives uden enheder, og dertil er indført et nyt navn: *radianer*. 2π radianer svarer således til 360° .

Øvelse 2.1 Oversættelse mellem radianer og grader

Radiantallet til en vinkel v er lig med længden af den bue b som vinklen spænder over på enhedscirklen. Specielt er: $360^\circ = 2\pi$ radianer, og $180^\circ = \pi$ radianer.

Heraf kan vi finde et udtryk for 1° og for 1 radian.

a) Omregn følgende gradtal til radianer: 90° , 45° , 60° , 30° , 15° .

b) Omregn følgende radianttal til grader: $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5 \cdot \pi}{6}$, $\frac{3 \cdot \pi}{4}$.

Praxis: Omregning mellem gradtallet og radiantallet

I) Fra grader til radianer: $1^\circ = \frac{2\pi}{360}$ radianer, eller $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ radianer, og deraf:

$$v^\circ \text{ svarer til } v \cdot \frac{\pi}{180} \text{ radianer}$$

II) Fra radianer til grader: π radianer = 180° og derfor: 1 radian(er) = $\frac{180^\circ}{\pi}$. Heraf :

$$b \text{ radian(er) svarer til } b \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \text{ (grader)}$$

Når vi regner i grader, holder vi os normalt inden for intervallet $[0; 360]$.

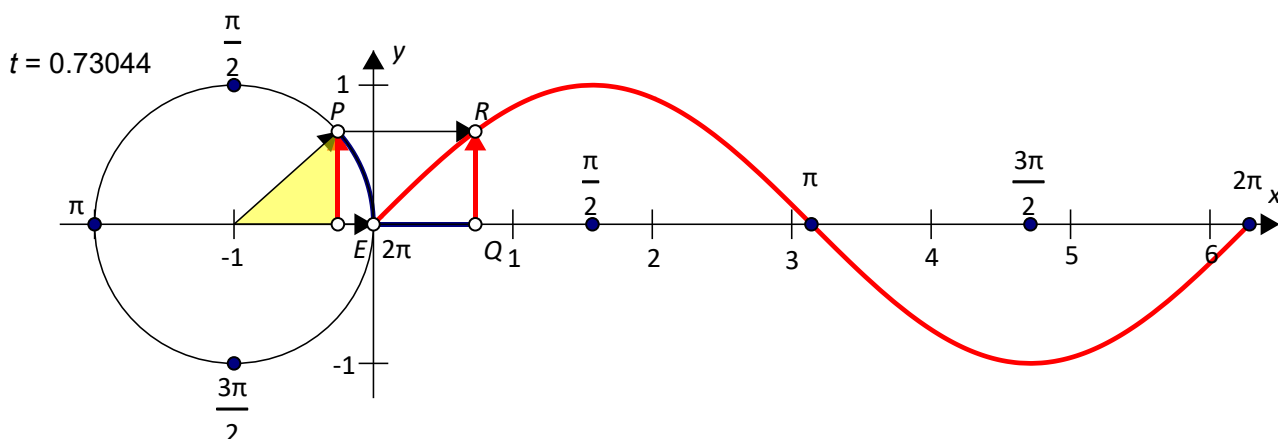
Når vi regner i radianer, har vi ingen sådanne begrænsninger, men kan få et så stort radiantal, vi ønsker ved at foretage flere omdrejninger. Radiantal regnes med fortegn afhængig af, om vi bevæger os i den positive eller negative omløbsretning.

Bemærkning: Et matematikprogram er typisk indstillet til enten at regne i grader eller i radianer. Find ud af hvordan dit eget værktøjsprogram håndterer grader og radianer.

2.2 Periodiske egenskaber og andre symmetrier

Vi vil nu kigge nærmere på de trigonometriske funktioner. Først vil vi udfolde grafen for sinusfunktionen. Når et punkt bevæger sig *jævnt* på en cirkel (lidt ligesom en ballongyngel) bevæger højden, dvs. sinus, sig regelmæssigt op og ned. Flytter vi den ud langs x-aksen og kombinerer den jævne bevægelse langs x-aksen med den lodret svingende bevægelse fra cirklen fås netop grafen for sinusfunktionen.

Eksempel: Udfoldning af grafen for sinus



Sinuskurven ligger i en vis forstand gemt på enhedscirklen, og den følgende konstruktion folder grafen for sinus ud af enhedscirklen. Prøv selv at konstruere en tilsvarende tegning i dit matematikprogram. Alternativt:

Gå ind på denne GeoGebra-filen: <https://www.geogebra.org/classic/gmztdfhq> og træk i punktet P.

Når vi trækker i cirkelpunktet P vil grafpunktet gennemløbe sinuskurven og vi kan fx aflæse sammenhørende værdier af buelængder og sinus.

Øvelse 2.2 Sinus funktionen er periodisk

Der er ingen begrænsninger på radiantallet. Efter én omgang er punktet P tilbage samme sted. Argumenter for, at:

a) Den samlede buelængde, der er gennemløbet er nu $t + 2 \cdot \pi$.

Punktet R fortsætter med at tegne grafen. Argumenter for, at:

b) $\sin(t) = \sin(t + 2 \cdot \pi)$, samt: $\sin(t) = \sin(t + n \cdot 2 \cdot \pi)$ for alle hele tal n

Vi siger ud fra øvelse 2.2, at sinus-funktionen er periodisk.

Øvelse 2.3 Overgangsformler for sinus og cosinus

Argumenter ud fra tegningen for, at der gælder følgende formler:

$$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

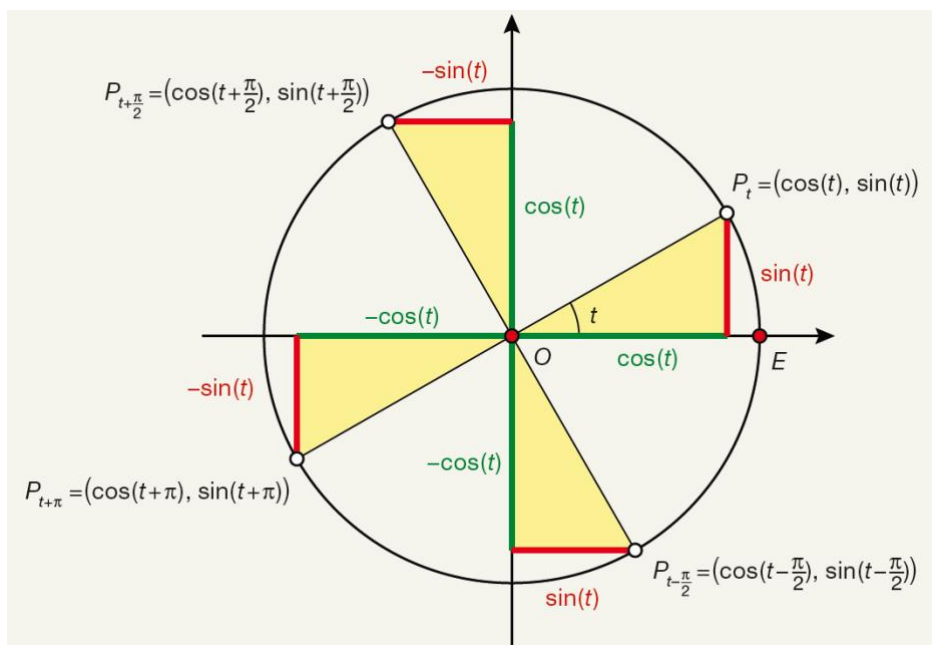
$$\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$$

Den første formel siger, at grafen for cosinus fremkommer ved at

forskyde sinus-grafen $\frac{\pi}{2}$ mod venstre.

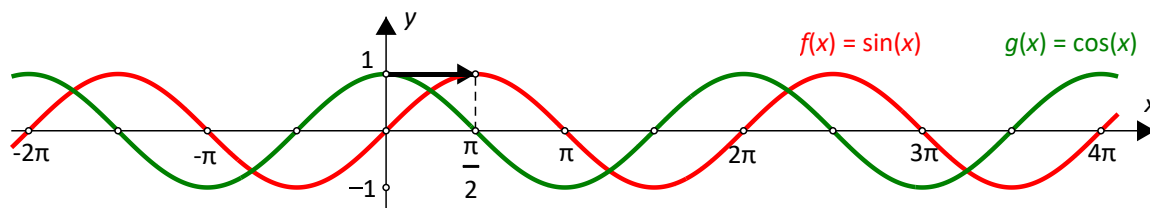
Formuler selv, hvad den anden formel siger om sammenhængen mellem graferne.

Disse er blot to ud af mange formler, der kæder sinus og cosinus sammen. Du kan [her](#) (link til 2-a) finde et dokument, der præsenterer og beviser alle.



Øvelse 2.4 Verificer, at formlerne er korrekte, ved at tegne graferne

Tegn i samme koordinatsystem graferne for $\sin(x)$, og for $\cos(x - \frac{\pi}{2})$.



1. De to grafer er ens i form, og den eneste forskel er, at den ene er forskudt $\frac{\pi}{2}$ i forhold til den anden:

2. Både $\cos$ og $\sin$ er *periodiske funktioner* med perioden $2 \cdot \pi$, dvs.:
 $\cos(x + n \cdot 2 \cdot \pi) = \cos(x)$ og $\sin(x + n \cdot 2 \cdot \pi) = \sin(x)$, for alle hele tal n

2.3 Den harmoniske svingning

Sinusfunktionen er en velegnet funktion til beskrivelse af periodiske fænomener, men grafen for $f(x) = \sin(x)$ har jo den "ulempe", at den altid har en periode på 2π og altid svinger mellem funktionsværdierne -1 og $+1$. Vi udvider derfor funktionsforståelsen lidt via de såkaldte harmoniske svingninger, der er en familie af vigtige funktioner af typen:

$$h(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + B$$

hvor A , B , ω og φ er konstanter. Herunder vil vi undersøge, hvilken betydning konstanterne har for det grafiske forløb.

Øvelse 2.5 Betydningen af konstanterne i en harmonisk svingning

Gå ind på følgende GeoGebra-hjemmeside: <https://www.geogebra.org/classic/mkcuf9y9>

Leg med skyderne for A , B , ω og φ . Formulér betydningen af hver af konstanterne A , B , ω og φ . Prøv at være så præcis som muligt i din beskrivelse. HUSK VARIABELKONTROL – dvs. ændr kun på én variabel ad gangen! Nogle hjælpespørgsmål, der måske kan lede dig på vej:

- Hvad er sammenhængen mellem A og funktionens maks- og min-værdi?
- Hvor mange svingninger er der i intervallet $[0; 2\pi]$, når $\omega = 2$?
- Hvor mange svingninger er der i intervallet $[0; 2\pi]$, når $\omega = 3$?
- Hvor mange svingninger er der i intervallet $[0; 2\pi]$, når $\omega = 1/2$?
- Hvad er svingningens periode, når $\omega = 2$? Når $\omega = 3$? Når $\omega = 1/2$?
- Hvad er svingningens periode generelt udtrykt vha. ω ?
- Hvordan forskydes grafen, når du ændrer på B -værdien?
- Hvordan forskydes grafen, når du ændrer på φ ?

Øvelse 2.6 Konstanternes betegnelser

Konstanterne A , B , ω og φ kaldes ofte for:

- A : amplituden
- B : ligevægtsforskydningen
- ω : vinkelhastigheden
- φ : faseforskydningen

Kan du forklare disse betegnelser?

Øvelse 2.7 Angiv konstanterne ud fra forskriften

- Angiv de fire konstanter for hver af de tre følgende harmoniske svingninger:

$$1) h_1(x) = 6 \cdot \sin(2 \cdot x - 3) + 1$$

$$2) h_2(x) = 3,7 \cdot \sin(0,3 \cdot x - 1,5) - 2$$

$$3) h_3(x) = 5 \cdot \sin(1,1 \cdot x - 4) + 6$$

- b) Tegn i et værktøjsprogram graferne af hver af funktionerne og bestem ved aflæsning funktionens periode (svingningstid), idet du aflæser afstanden mellem to bølgetoppe.

Vi opsummerer vores undersøgelser af den harmoniske svingning i følgende:

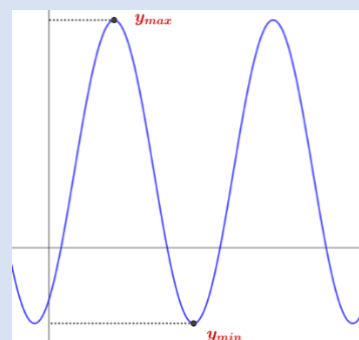
Sådan bestemmes konstanterne i en harmoniske svingning

For en harmonisk svingning af typen $h(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + B$ kan konstanterne findes ved graflæsning og følgende praksis:

Amplituden, A:

... viser, hvordan sinuskurvens *lodrette skalering* er i forhold til x-aksen, og dermed hvor store lodrette udsving sinuskurven har fra sin ligevægtsstilling. Formlen for A er:

$$A = \frac{h_{\max} - h_{\min}}{2} = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$$



Ligevægtsværdien, B:

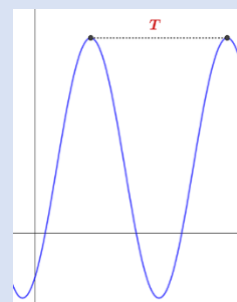
... viser, hvordan sinuskurvens *lodrette forskydning* er i forhold til x-aksen. Formlen for B er:

$$B = \frac{h_{\max} + h_{\min}}{2} = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}$$

Vinkelhastigheden, ω:

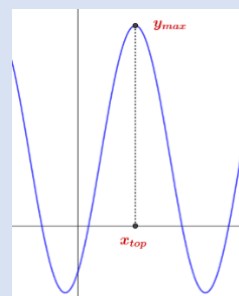
... regulerer sinuskurvens *vandrette skalering* i forhold til y-aksen. Sammenhængen mellem vinkelhastigheden ω og perioden T er givet ved formlen:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



Faseforskydningen, φ:

... viser, hvordan sinuskurvens *vandrette forskydning* er i forhold til y-aksen. I praksis aflæses den ud fra x-koordinaten til det første maksimumspunkt til højre for y-aksen x_{top} og brug af formlen: $\varphi = \frac{\pi}{2} - \omega \cdot x_{\text{top}}$

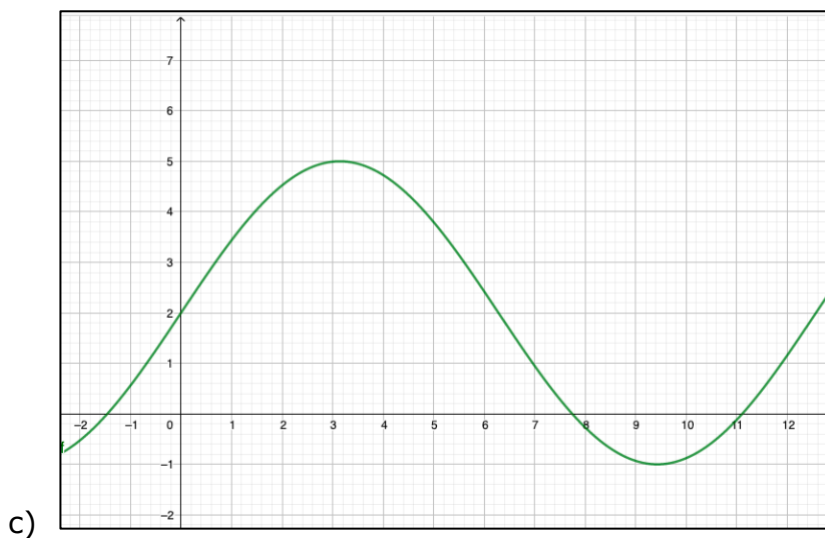
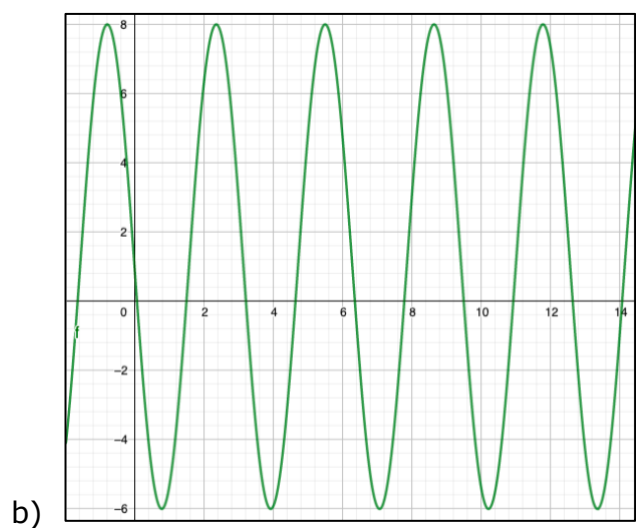
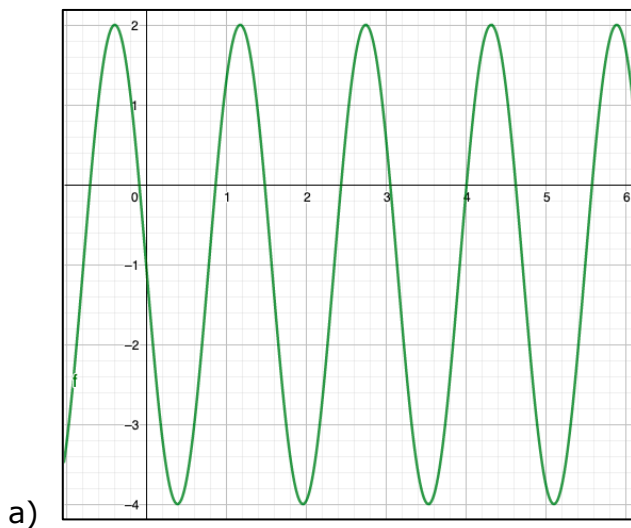


Øvelse 2.8

Nedenfor er vist graferne for nogle harmoniske svingninger med forskriften:

$$h(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + B$$

Benyt graflæsning og den angivne praksis ovenfor til at bestemme konstanterne: A , B , ω og φ i følgende tre opgaver.



I kapitel 5 kan du finde nogle eksempler på anvendelser af trigonometriske funktioner i en matematisk modellering af fænomener, der har en eller anden periodisk karakter.

2.4 Differentiation af sinusfunktionen

Funktionerne $\sin(x)$ og $\cos(x)$ er differentiable overalt. Det er ikke overraskende, når vi ser de pæne glatte grafer uden 'knæk' og spring'. Men hvad er de afledede funktioner?

Sætning

De afledede funktioner for de trigonometriske funktioner sinus og cosinus er følgende

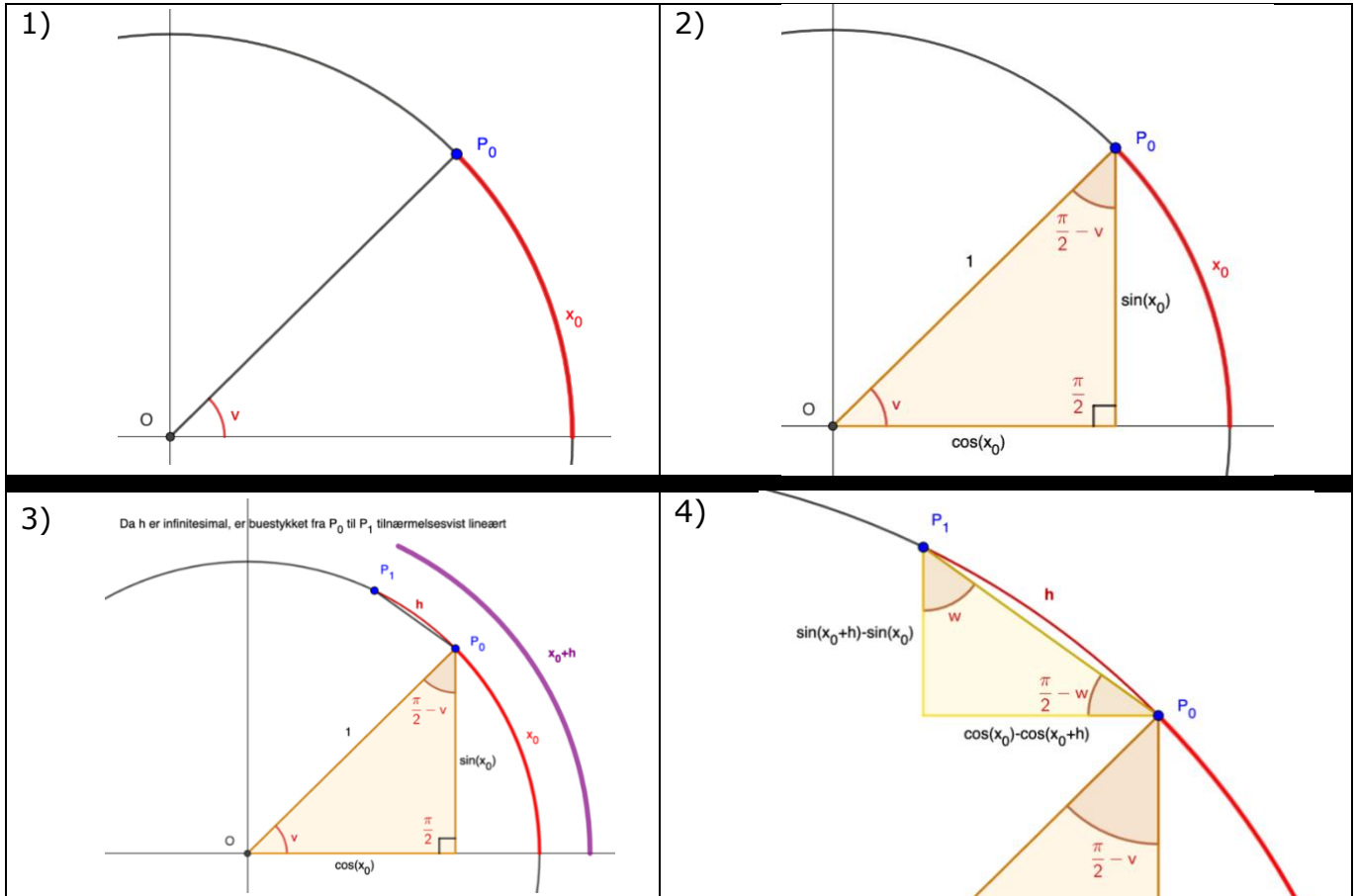
$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{og} \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

Øvelse 2.9

Vi beviser nedenfor den første af de to formler vha. tretrinsreglen. Redegør for hvert trin i omskrivningerne:

Vi starter med at opskrive sekanthældningen: $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h}$

Vi udnytter nu et par smarte geometriske betragtninger. Se følgende tegneserie, og prøv selv at forklare, hvad de sker i hvert billede – og læs så forklaringerne neden for



1) Tegn enhedscirklen i første kvadrant samt retningspunktet P_0 for vinklen v .

Buestykket målt i radianer, som vinklen v spænder over, kalder vi x_0 .

2) $\cos(x_0)$ aflæses på x-aksen, og $\sin(x_0)$ aflæses på y-aksen. Herved dannes den orange retvinklede trekant med katetelængderne $\cos(x_0)$ og $\sin(x_0)$ samt hypotenuselængden 1.

Trekantens vinkler er: x_0 , $\frac{\pi}{2} - x_0$ og $\frac{\pi}{2}$ ($\frac{\pi}{2}$ rad = 90°).

3) Vi går nu buestykket h længere frem og (i positiv omløbsretning) på enhedscirklen til punktet P_1 . x_0 , h og $x_0 + h$ er derfor alle buelængder på enhedscirklen. Da h er infinitesimal, er buelængden fra x_0 til $x_0 + h$ tilnærmelsesvist et ret linjestykke (dette resultat kræver et bevis, som vi dog ikke tager med her)

4) Der tegnes nu en gul retvinklet trekant med h som hypotenusen. Den gule trekant har katetelængder: $\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)$ og $\cos(x_0) - \cos(x_0 + h)$ og vinklerne: w , $\frac{\pi}{2} - w$ og $\frac{\pi}{2}$. Da h er infinitesimal, står linjestykket fra x_0 til $x_0 + h$ vinkelret på hypotenusen i den orange trekant (en cirkeltangent står altid vinkelret på radius). Det betyder også nødvendigvis, at vinkel $\frac{\pi}{2} - w$ i den gule trekant og vinkel $\frac{\pi}{2} - v$ i den orange trekant er præcis lige store. De to trekanter er altså ensvinklede!

Men hvis den orange og den gule trekant er ensvinklede, må skalafaktoren være h , og vi kan skrive:

$$\cos(x_0) \cdot h = \sin(x_0 + h) - \sin(x_0)$$

Ved division med h på begge sider fås:

$$\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} = \cos(x_0)$$

Hvorved det ønskede er vist!

Øvelse 2.10

Benyt tilsvarende argumenter til at bevise, at $(\cos(x))' = -\sin(x)$.

Øvelse 2.11

- a) Bestem de dobbelt afledede $\cos''(x)$ og $\sin''(x)$.
- b) Bestem stamfunktionerne til $\cos(x)$ og $\sin(x)$.

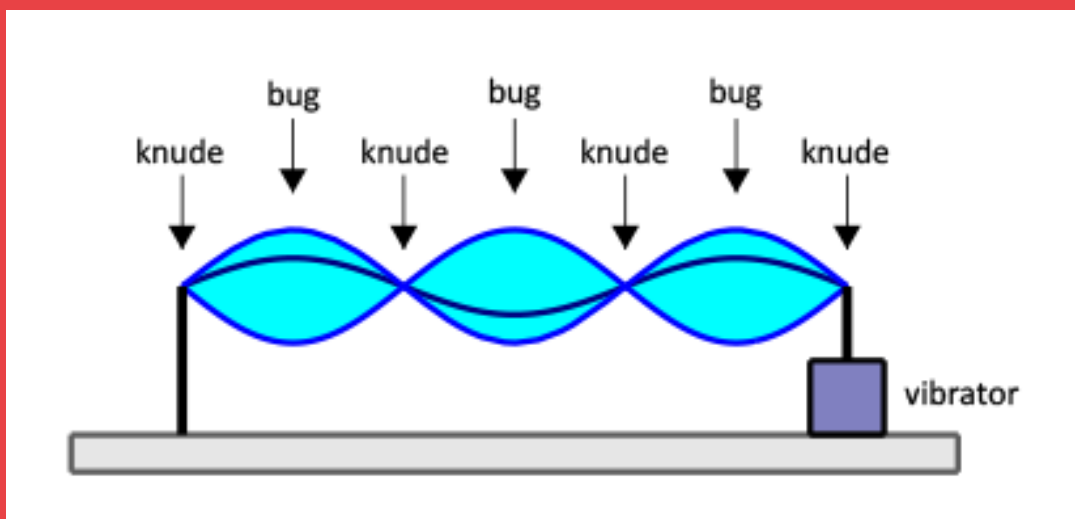
Beviset, vi her har gengivet, kan man finde variationer af mange steder, så man kan sige, det er klassisk. Det bygger på vores intuition, og det er ofte et godt udgangspunkt. Det repeterer samtidig en række vigtige ting omkring differentialkvotienter.

Men beviset indeholder en række problemer, som ikke er lette at reparere. Fx det enkle spørgsmål – hvordan måler vi længden af en krum kurve, som en buelængde? Det indgår jo i overvejelserne. Det er der ikke et let svar på, for hvis man blot henviser til kendskabet til omkredsen af en cirkel, så er det næste spørgsmål, hvor har vi den formel fra? I matematik vil vi gerne have fast grund under fødderne, og det viser sig ved nærmere undersøgelser, at omkredsen af en cirkel udregnes ved hjælp af integralregning. Og den funktion, vi i sidste ende skal finde stamfunktion til her, er sinus. Men den kender vi jo kun, fordi vi ovenfor har en sætning om differentiation af sinus og cosinus. Så vi går i ring.

Løsningen på dette problem er lidt subtil: Vi er nødt til at starte med den omvendte funktion til sinus, som vi kalder for arcussin(x). Den kan vi håndtere og differentiere, og så kan vi også differentiere dennes omvendte funktion – som er sinus. Du kan læse mere om dette, som også handler om matematikkens grundlag [her \(link til 2.b\)](#)

3.

Overtoner, stående bølger og svævning

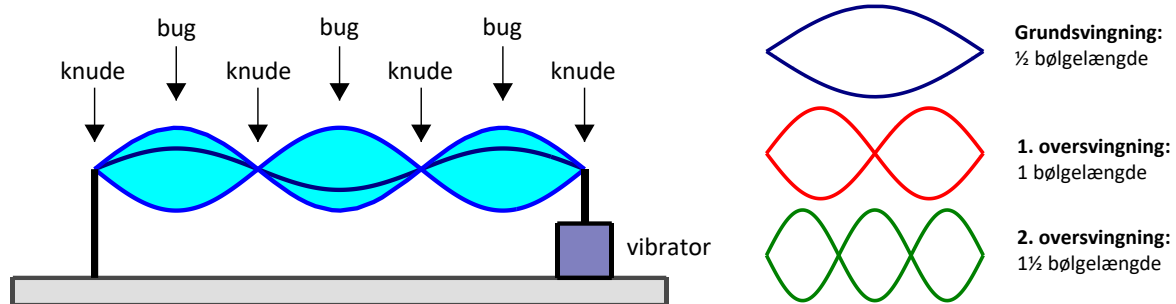


Tilfældige lyde kan have en hvilken som helst frekvens og bølgelængde og svingningstid. Sådan er det ikke med den lyd, der frembringes af musikinstrumenter. En guitarstreng har en bestemt længde – den kan vi godt nok regulere med fingrene, men det giver bare en anden længde. Orgelpiber og blokfløjter har tilsvarende bestemte længder, hvor luft søjlen svinger. De svingninger, der her frembringes, kaldes for stående bølger, og de er forudsætningen for toner og musik. Den rene sinussvingning til en bestemt frekvens giver ikke oplevelsen af musik. Når instrumenterne gør det, er det fordi der sammen med grundtonen frembringes en række overtoner. Hvilke overtoner, og hvordan toner med forskellig frekvens spiller sammen, det dykker vi ned i i dette kapitel.

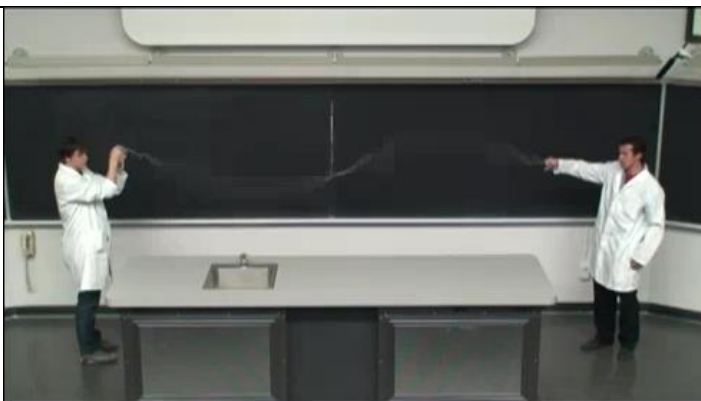
3. Overtoner, stående bølger og svævning

3.1 Stående bølger

Når man sætter en streng i svingninger, så vil strengen vibrere og sende bølger frem og tilbage (refleksion) mellem strengens fæstningspunkter. Det gælder en guitarstreng, eller et tov, som to personer holder og sætter i svingninger, som du vil se nedenfor, og det samme gælder for en luftsøjle i en orgelpibe eller en almindelig fløjte. Disse bølger vil interferere og deres udsving lægges sammen efter superpositionsprincippet. Det betyder, at nogle af bølgerne vil dø ud, mens andre vil forstærkes. Hvis strengen eller luftsøjlen vibrerer med en ganske bestemt frekvens, en såkaldt *resonansfrekvens*, vil den forstærke sig selv og give anledning til en *stående bølge*. Bestemte steder på strengen fremkommer der da store udsving (kaldet *buge*, jfr. hængebugen på et svin), mens der andre steder intet udsving er (kaldet *knuder*). Antallet af buge afhænger naturligvis af strengens (vibrations-)frekvens.



Den svingende streng illustrerer meget fint, hvordan lydbølger udvikler sig. Hvis vi ser på en tone og dennes harmoniske overtoner, så vil grundtonen svare til, at vi ser én bug (svarende til denne tones frekvens), mens overtonerne svarer til svingninger med flere buge. Når strengens frekvens fx fordobles, vil der fremkomme 2 buge, og denne svingning svarer til 1. overtone. Når strengens frekvens tredobles, vil der fremkomme 3 buge, og denne svingning vil svare til 2. overtone osv. Læg mærke til, at grundtonen netop svarer til en halv bølgelængde $\lambda/2$.



Du kan [her](#) se en kort video, der illustrerer svingningsmønstrene for en streng, og nedenfor andre svingende strenge.

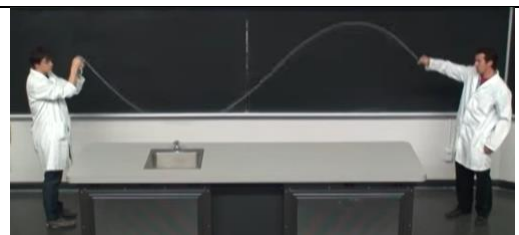
< <http://www.youtube.com/watch?v=-n1d1rycvj4&feature=related> >

Guitarstreng – slowmotion:

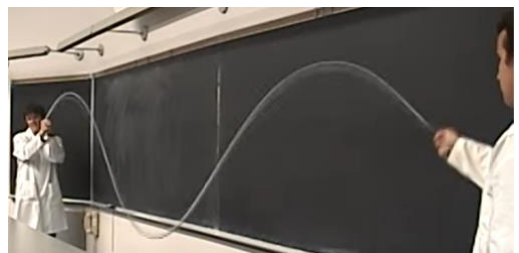
<http://www.youtube.com/watch?v=gFrnQg8RZJQ&feature=related>

Violin – slowmotion:

<http://www.youtube.com/watch?v=kqpU1t2cCxx&feature=related>



En hel bølgelængde, svarende til 1. overtone



1½ bølgelængde, svarende til 2. overtone

Lydbølgerne interferer med hinanden, og kun de lydbølger, der giver anledning til stående bølger, har betydning for den lyd vi hører, fordi de andre dør ud. Der findes altså en samling stående bølger, som tilsammen frembringer lyden af de toner / den musik som guitaristen spiller. Grundtonens og overtonernes amplituder afhænger af, hvordan strengen anslås – både hvor på strengen og kvaliteten af anslaget (let/hårdt etc.). Frekvenserne af lydbølgerne vil være de samme som frekvenserne af bølgerne på strengen.



Vi vil nu prøve at forstå matematikken bag de stående bølger nærmere.

3.1.1 Frekvenserne af overtonerne

Den matematiske model for svingningen af en streng er $f(x) = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot x)$. Her er det ikke så meget A , der er i fokus. Vi vil undersøge de mulige frekvenser af en svingende streng med længden L . Vi ser af det foregående, at en stående svingning må have knudepunkter i $x = 0$ og $x = L$. Den første betingelse er automatisk opfyldt, idet $\sin(0) = 0$. Den anden betingelse giver ligningen:

$$A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot L) = 0,$$

Øvelse 3.1 De mulige frekvenser for overtoner

a) Vis, at denne ligning giver følgende betingelse på f :

$$2\pi \cdot f \cdot L = n \cdot \pi, \text{ hvor } n \text{ er et naturligt tal.}$$

b) Vis heraf, at de mulige frekvenser er:

$$f = n \cdot \frac{1}{2L}, \text{ hvor } n \text{ kan være } 1, 2, 3, 4, \dots$$

$n = 1$ svarer til grundtonen, og $n = 2, 3, 4, \dots$ svarer til overtonerne.

c) Kald grundtonens frekvens f_1 . Vis at overtonernes frekvenser er:

$$2 \cdot f_1, 3 \cdot f_1, 4 \cdot f_1, \dots$$

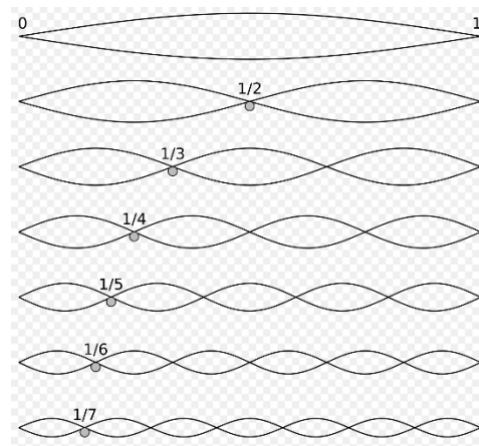
Øvelse 3.2 De mulige bølgelængder for overtoner

Frekvensen f angiver antal svingninger pr sekund. Lad λ angive bølgelængden af en svingning.

a) Argumenter for, at $f \cdot \lambda = v$, hvor v er den hastighed hvormed bølgen udbreder sig.

b) Se nu på situationen med overtoner. Lad f_n være frekvensen for den n 'te overtone, og lad λ_n være bølgelængden for den n 'te overtone. Argumenter for, at produktet: $f_n \cdot \lambda_n$ er det samme tal for alle n .

c) Vis, at $\lambda_n = \frac{1}{n} \cdot 2L = \frac{1}{n} \cdot \lambda_1$



Resultatet er illustreret på vedlagte tegning, lånt fra wikipedia.

c) Vis, at $\lambda_n = \frac{1}{n} \cdot 2L = \frac{1}{n} \cdot \lambda_1$

Resultatet er illustreret på vedlagte tegning, lånt fra wikipedia.

3.2 Additionsformler og de logaritmiske formler

Vi får i det følgende brug for nogle af de berømte formler inden for de trigonometriske funktioners verden, henholdsvis *additionsformlerne* og de *logaritmiske formler*. De spillede en stor rolle i praktiske beregninger før vi alle fik adgang til matematikprogrammer på computere. Men de spiller stadig en rolle i teoretiske overvejelser og i at bevise at forskellige sammenhænge gælder generelt.

3.2.1 Additionsformlerne for sinus

Sætning 1: Additionsformlerne for sinus

For alle vinkler u og v gælder:

$$\sin(u+v) = \sin(u) \cdot \cos(v) + \cos(u) \cdot \sin(v)$$

$$\sin(u-v) = \sin(u) \cdot \cos(v) - \cos(u) \cdot \sin(v)$$

Bemærkning: Der findes tilsvarende formler for cosinus. Disse og beviser herfor kan findes her ([link til 3-a](#))

Bevis: (bygger på kendskab til vektorregning. Der findes et geometrisk bevis for den første formel, som du kan finde her ([link til 3-b](#)))

Koordinatsystemets centrum (Origo) kalder vi C , Lad os definere retningsvektorer til punkterne $P(\cos(v), \sin(v))$ og $Q(\cos(u), \sin(u))$ ved

$$\vec{r}_v = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{r}_u = \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \end{pmatrix}$$

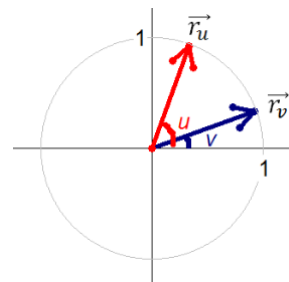
Tegn selv situationen. Vinklen mellem $\vec{r}_v$ til $\vec{r}_u$ er $u-v$ grader. Ud fra vores kendskab til determinanter får vi så:

$$\det(\vec{r}_v, \vec{r}_u) = |\vec{r}_v| \cdot |\vec{r}_u| \cdot \sin(u-v)$$

$$\begin{vmatrix} \cos(v) & \cos(u) \\ \sin(v) & \sin(u) \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \sin(u-v)$$

$$\sin(u) \cdot \cos(v) - \sin(v) \cdot \cos(u) = \sin(u-v)$$

$$\sin(u) \cdot \cos(v) - \cos(u) \cdot \sin(v) = \sin(u-v)$$



Dermed har vi den ene af de to regler.

Da der ikke er nogle krav til fortegnene for vinklerne, kan vi bruge denne regel på u og $-v$ i stedet for på u og v . Det giver os følgende:

$$\sin(u) \cdot \cos(-v) - \cos(u) \cdot \sin(-v) = \sin(u - (-v))$$

$$\sin(u) \cdot \cos(v) + \cos(u) \cdot \sin(v) = \sin(u+v)$$

Her har vi brugt, $\cos(-v) = \cos(v)$ og at $\sin(-v) = -\sin(v)$.

Dermed er anden del af sætningen bevist.

3.2.2 Den logaritmiske formel

Sætning 2 Den Logaritmiske formel for sinus

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Logaritmerne blev opfundet af den skotske godsejer Napier først i 1600-tallet. En ven af ham var i slutningen af 1500-tallet i Danmark, og måtte her forlænge opholdet, da vinteren var så hård, at bælteerne frøs til. Han fik blandt andet tiden til at gå med at besøge Tycho Brahe på Hveen, og her lærte han, at der lå et enormt regnearbejde bag de astronomiske tabeller, Tycho Brahe udgav. Et af hans hjælpemidler var brugen af de logaritmiske formler, der omformer gange til plus. Men det var alligevel et meget besværligt arbejde, som han havde en del ansatte til at udføre. Da Napier fik den beretning, satte han sig for at konstruere en enklere måde at omforme gange til plus – og det var sådan *den naturlige logaritme* blev født.

Der er flere logaritmiske formler i trigonometrien, men her har vi kun brug for denne.

Bevis for den logaritmiske formel

Vi adderer venstresiderne og højresiderne i de to additionsformler, vi lige har bevist:

$$\sin(u+v) = \sin(u) \cdot \cos(v) + \cos(u) \cdot \sin(v)$$

$$\sin(u-v) = \sin(u) \cdot \cos(v) - \cos(u) \cdot \sin(v)$$

$$\sin(u+v) + \sin(u-v) = 2 \sin(u) \cdot \cos(v) \quad (*)$$

I stedet for $u+v$ vil vi gerne have x og i stedet for $u-v$ vil vi gerne have y .

Vi definerer derfor

$$u+v = x$$

$$u-v = y$$

Øvelse 3.3 Løsning af et ligningssystem

Løs ligningssystemet ved først at addere de to ligninger, dernæst at subtrahere dem, således at du får udledt udtryk for u og v .

Du skal få : $u = \frac{x+y}{2} \quad \text{og} \quad v = \frac{x-y}{2}$

Indsæt i (*), så har du vist den logaritmiske formel.

3.3 Svævning og stødtoner

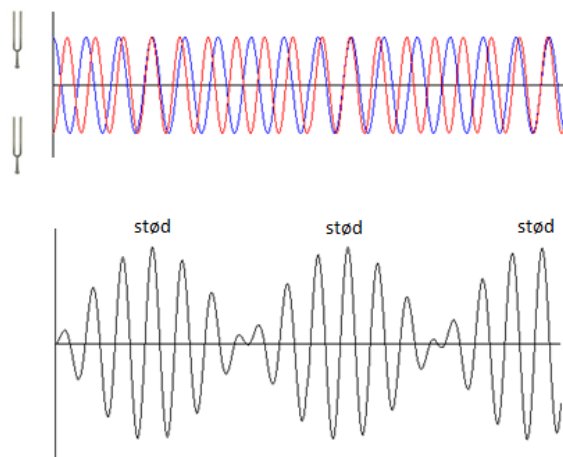
Vi vil nu anvende den logaritmiske formel til at opnå indsigt i et specielt musikalsk fænomen, der kaldes svævning.

Hvis to toner ligger tæt på hinanden opstår et interessant akustisk fænomen, der kaldes *svævning* eller *stødtoner*. De to forskellige toner høres som én tone, men denne tone står og "støder", dvs falder og stiger hurtigt i styrke.

Der gælder følgende matematiske sætning om svævning:

Sætning 3: Svævning og stødning.

To toner, der ligger tæt på hinanden, klinger som én tone med *en frekvens*, der er gennemsnittet af de to frekvenser, og med *en varierende amplitude*, der høres som om tonen "støder". Antal stød pr sekund svarer til frekvensforskellen



Lad os først se på anvendelsen heraf: Hvorfor høres to toner tæt på hinanden som én tone, der støder. Hvis vi forestiller os to strenge, der svinger som sinustoner med frekvenser, der ligger meget tæt – den ene med 440 Hz og den anden med 443 Hz – så vil disse iflg. reglen ovenfor sammen svinge med gennemsnittet 441.5 Hz. Og samtidig vil vi høre, at tonen "støder" 3 gange i sekundet.

Tonen med frekvensen 443 Hz svarer matematisk til sinussvingningen $\sin(2\pi \cdot 443 \cdot t)$.

Tonen med frekvensen 440 Hz svarer matematisk til sinussvingningen $\sin(2\pi \cdot 440 \cdot t)$

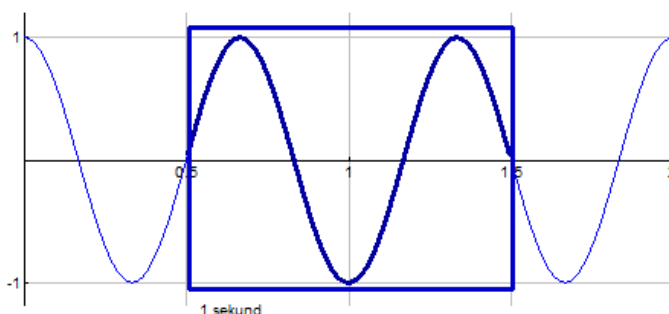
Når begge toner anslås samtidigt, så vil den matematiske model derfor være:

$$\sin(2\pi \cdot 440 \cdot t) + \sin(2\pi \cdot 443 \cdot t)$$

Men det kan vi omskrive ved at benytte den logaritmiske formel for sinus:

$$\begin{aligned} & \sin(2\pi \cdot 443 \cdot t) + \sin(2\pi \cdot 440 \cdot t) \\ &= 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot 443 \cdot t - 2\pi \cdot 440 \cdot t}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot 443 \cdot t + 2\pi \cdot 440 \cdot t}{2}\right) = \\ &= 2 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{443 - 440}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{443 + 440}{2} \cdot t\right) \\ &= 2 \cdot \cos(2\pi \cdot 1,5 \cdot t) \cdot \sin(2\pi \cdot 441,5 \cdot t) \end{aligned}$$

Vi ser, at den sidste faktor er en tone med en frekvens på 441.5Hz. Den første faktor er i princippet en tone, der svinger med en frekvens på 1.5Hz, men det er alt for langsomt til, at vi hører det som en tone. Vi hører det som 3 stød pr sekund, fordi



svingningen gennemløber $3/2$ perioder, og fordi der i hver periode er to "toppe" eller to "dale", og dermed to stød.

Når vi hører to toner der ligger tæt på hinanden kan man altså ikke bedømme om de stemmer ud fra om tonen lyder "pænt". Det, vi lytter efter, er om de to strenge tilsammen "støder". Jo langsommere "stødene" er jo bedre stemmer strengene. Det er oftest den teknik man benytter for at stemme en guitar eller en bas.

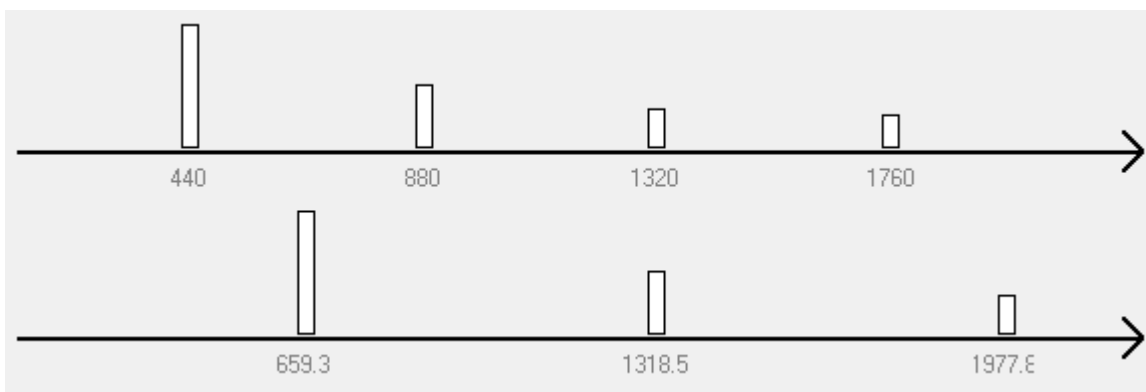
Øvelse: Prøv om du kan høre det på en guitar. Stem to guitarstrengene så de stemmer rigtig godt. Kan du høre stød? Hvis du ikke kan så skru ganske lidt på den ene streng.

Hvorfor støder en kvint, der ikke er helt ren?

Dette afsnit inddrager begreber fra musik, som du måske ikke kender, men du kan godt gennemføre det alligevel og du kan godt hente tonegeneratoren og selv eksperimentere med svævning og stød. De musikalske begreber og stemning af fx et klaver er emnet for næste kapitel

Hvis stødtoner er et fænomen, der beskriver toner tæt på hinanden, hvorfor kan vi så også tale om at to toner, der næsten har en *kvint* mellem sig, også støder? Og hvis den støder, hvad fortæller antal stød så om afvigelsen mellem de to toner? For at kunne forstå det, bliver vi nødt til at se på overtonerne for de to toner

Hvis vi har stemt $a_0 = 440\text{Hz}$ så skal den *ligesvævende kvint* over – tonen e_1 – stemmes som 7 halvtoner over, og det er $440 \cdot 2^{7/12} = 659,26\text{Hz}$.



Tonen a har partialtonerne 440 Hz - 880 Hz - 1320 Hz - 1760 Hz - 2200 Hz ...

Tonen e har partialtonerne 659.3 Hz - 1318.5 Hz - 1977.8 Hz - 2637.0 Hz ...

På grafikken ovenfor er situationerne anskueliggjort. Ser vi på tonerne og deres overtoner, så ser vi, at sammenstødet kommer mellem 3. partialtone for a 'et, der ligger på $440 \cdot 3 = 1320\text{ Hz}$ og den 2. overtone for e 'et, der ligger på $659.26 \cdot 2 = 1318.52\text{ Hz}$

Da forskellen mellem de to frekvenser er $1320 - 1318.5 = 1.52\text{ Hz}$ vil der altså være ca 1.5 stød pr sekund

Man stemmer altså kvinten a_0 - e_1 så kvinten er lidt for lav. Den skal være præcis så lav at kvinten støder 1.5 gange i sekundet.

Bemærk at antallet af gange kvinten støder ændrer sig med tonen. Oktaven over vil kvinten $a_1 - e_2$ støde 3 gange pr sekund idet alle frekvenser er fordoblet og dermed er afvigelsen altså også fordoblet.

Øvelse 3.5

Hvis du har stemt $a_{-1} = 220\text{Hz}$, og du vil stemme kvinten over – tonen e_0 – ligesvævende i forhold til denne tone, hvad bliver så frekvensen? Hvor mange gange skal kvinten $a_{-1} - e_0$ støde i sekundet?

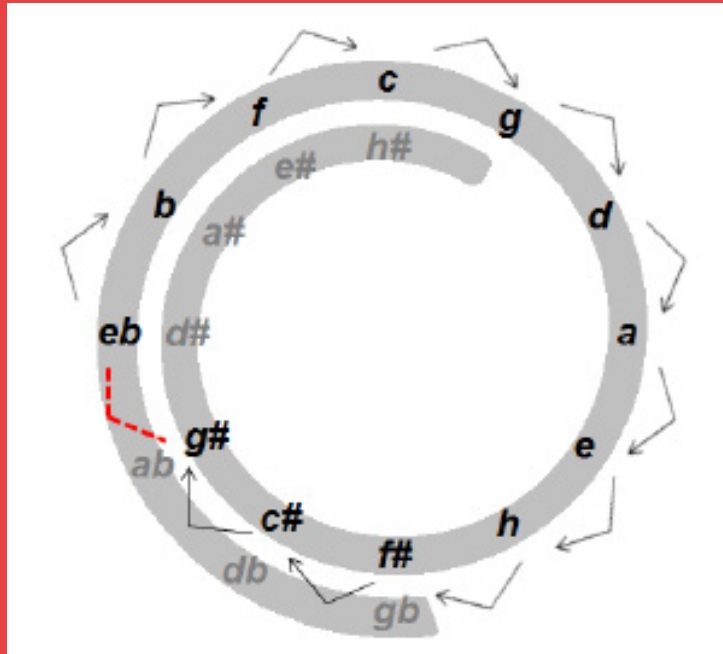
Du kan hente en tonegenerator, der hedder **Monochord**, hvor du kan eksperimentere med disse ting, [her – link til 3c-Monochord](#). Eller direkte fra adressen her:

<http://www.frborg-gymhf.dk/gj/lyd/Monochord/Monochord.zip>

Når tonegeneratoren er hentet, skal zipfilen pakkes ud, før den virker. Du får muligvis nogle sikkerhedsadvarsler, når du vil downloade den, fordi der er en exe-fil inde i zipfilen. Dem skal du ignorere.

4.

Matematik og musik



Fra middelalderen og langt op i renæssancen skulle alle der gik på et universitet igennem det såkaldte quadrivium. Det var en slags basiskursus i de 4 grundlæggende naturvidenskaber, aritmetik, geometri, musik og astronomi. Selv om det måske er overraskende i dag, at placere musik i denne sammenhæng, så var det helt naturligt, fordi forholdet mellem tonerne er matematisk defineret. Det er emnet for dette kapitel, der dykker ned i, hvorfor det ikke kan lade sig gøre både at arbejde med simple matematiske forhold og at skabe velklang, der trods alt er det vigtigste. Der er ikke et svar der er det korrekte – og derfor har stemningerne ændret sig fra oldtiden og op til at ikke mindst Bach lagde grundlaget for den stemning, vi nu bruger.

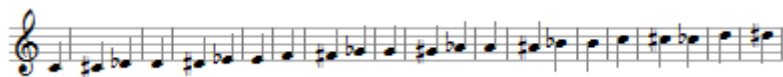
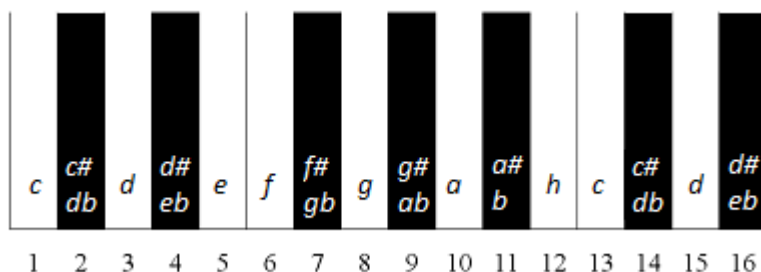
4. Matematik og musik

Dette kapitel er en sammen-redigeret version af nogle af kapitlerne i Gert Uttenthal Jensens *Hvad er Matematik – og Musik L&R Uddannelse*, 2019. Hele bogen findes [her](#) – (link til 4a)

4.1. Intervaller og frekvensforhold

4.1.1 Toner og tonenavne

I vores tonesystem er der 12 forskellige toner. På klaveret nedenfor ses hvordan vi skifter mellem sorte og hvide tangenter, så vi efter 12 toner har haft 7 hvide og 5 sorte. Den 13'ende tone vil lyde lige som den første bare lysere i klangen. Den er en oktav over. Tonerne har fået navne ud fra de hvide tangenter, Så de hvide tangenter hedder *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *a* og *h*. De sorte tangenter er navngivet ud fra de hvide. Hvis der tilføjes et # (kryds) efter tonen betyder det, at tonen ligger en tangent til højre for (vi siger normalt over) og tilføjes et *b* betyder det, at tonen ligger en tangent til venstre for (eller under). Den eneste undtagelse er at tonen under *h* (desværre) ikke hedder *hb*, men bare *b*



Den oktav, der starter ved "nøglehuls-c'et kalder vi i denne fremstilling for c_0 , d_0 osv mens oktaven over kaldes c_1 ... og oktaven under kaldes c_{-1}

4.1.2 Interval

Vi taler i musik om *intervallet* mellem to toner, som et udtryk for *afstanden* mellem de to toner. Normalt bestemmer vi intervallet mellem to toner, ud fra antallet af tangenter mellem dem.

Mellem tonen c_0 og tonen g_0 er der 7 halvtonespring og intervallet kaldes en *kvint*.



Hvis vi skal være lidt mere præcise, så er intervallet defineret som *frekvensforholdet* mellem de to toner. Der er nogle meget enkle sammenhænge mellem *bølgelængde*, *frekvensforhold* og *intervaller*. Fra fysik ved vi, at *bølgelængden* og *frekvensen* er omvendt proportionale. Ser vi på en svingende streng, så er længden af strengen lig med den halve bølgelængde. Dermed gælder også, at *streng-længden* er omvendt proportional med *frekvensen*:

$$\text{frekvensen} = \frac{c}{\text{streng-længden}}$$

De "pæne" intervaller, vi plejer at bruge, er knyttet til "pæne" frekvensforhold:

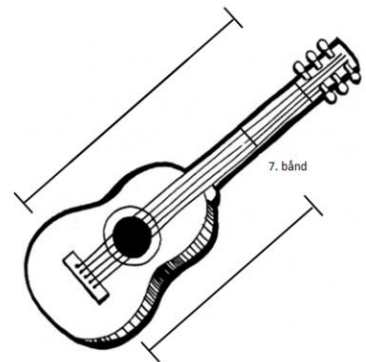
De <i>rene</i> *) intervaller	Strenglængde L = hele strengen	Frekvensforhold
Oktaven	$\frac{1}{2} \cdot L$	2
Kvint	$\frac{2}{3} \cdot L$	$\frac{3}{2}$
Kvarten	$\frac{3}{4} \cdot L$	$\frac{4}{3}$
Stortertsen	$\frac{4}{5} \cdot L$	$\frac{5}{4}$
Lilletertsen	$\frac{5}{6} \cdot L$	$\frac{6}{5}$
*) Normalt bruger vi fx <i>ren kvint</i> som alternativ til <i>formindsket</i> eller <i>forstørret kvint</i> . Her bruger vi det imidlertid i betydningen den mest <i>perfekte</i> eller mest <i>rentklingende</i> kvint. Hvorfor dette er tilfældet, vender vi tilbage til		

Kendskabet til disse proportioner går tilbage til antikken. (Se evt [her](#) – link til 4a)

Øvelse Intervaller og strenglængder på en guitar

På en guitar finder vi kvinten på 7. bånd.

- Mål længden af hele strengen og afstanden fra 7. bånd til stolen. Hvad er forholdet mellem de to længder? Passer det, at kvinten kun har en strenglængde der er $\frac{2}{3}$ af den fulde længde?
- Hvad er forholdet mellem afstanden fra 4. bånd og til stolen og hele strenglængden? Hvilket interval er vi gået op, når vi er gået 4 halvtoner op? Passer det med skemaet?
- Hvad er forholdet mellem afstanden fra 5. bånd og til stolen og hele strenglængden? Hvilket interval er vi gået op når vi er gået 5 halvtoner op? Passer det med skemaet?
- Hvad er forholdet mellem afstanden fra 12. bånd og til stolen og hele strenglængden? Passer det med skemaet?



4.1.3 Cent-funktionen

I stedet for at se på et intervals frekvensforhold ser man ofte på intervallets *cent-værdi*.

Man omregner fra frekvensforholdet $\frac{f_1}{f_2}$ til centværdien ved at udregne

$$\text{cent}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = 1200 \cdot \frac{\log_{10}\left(\frac{f_1}{f_2}\right)}{\log_{10}(2)}$$

Centfunktionen er med andre ord den funktion, der udregner centværdien ud fra frekvensforholdet, og den har forskriften

$$\text{cent}(x) = 1200 \cdot \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(2)}$$

Cent-funktionen er, som vi vil se nedenfor, i virkeligheden en *logaritmefunktion*.

Den omregner et frekvensforhold og dermed et interval til et antal halvtoner. Fx er $\text{cent}(1.19)=301.2$ og det betyder, at frekvensforholdet 1.19 svarer til 3.012 halvtoner altså meget tæt på en lille terts.

$\text{Cent}(1.22)=344.3$ og dermed svarer frekvensforholdet 1.22 til 3.44 halvtoner dvs midt mellem en lille terts og en stor terts. De halvtoner, der her er tale om, er det vi senere vil kalde *ligesvævende halvtoner*, hvor vi deler oktaven ind i 12 toner, der hver har samme afstand indbyrdes.

Sætning 1: Cent-funktionen er en logaritmefunktion

Cent-funktionen $\text{cent}(x) = 1200 \cdot \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(2)}$ er en logaritmefunktion med grundtallet $2^{\frac{1}{1200}}$ og er dermed den omvendte funktion til $g(x) = \left(2^{\frac{1}{1200}}\right)^x = 2^{\frac{x}{1200}}$

Bevis: Lad os vise at $\text{cent}(x)$ og $g(x)$ er modsatte funktioner dvs $\text{cent}(g(x)) = x$

$$\begin{aligned}\text{cent}(g(x)) &= 1200 \cdot \frac{\log_{10}(g(x))}{\log_{10}(2)} = 1200 \cdot \frac{\log_{10}\left(2^{\frac{x}{1200}}\right)}{\log_{10}(2)} \\ &= 1200 \cdot \frac{\left(\frac{x}{1200}\right) \cdot \log_{10}(2)}{\log_{10}(2)} = 1200 \cdot \frac{x}{1200} \cdot \frac{\log_{10}(2)}{\log_{10}(2)} = x\end{aligned}$$

Når funktionen $\text{cent}(x)$ således er den omvendte til en eksponentialfunktion, er det selv en logaritmefunktion, og naturligvis med samme grundtal $2^{\frac{1}{1200}}$ som sin eksponentialfunktion. Hermed er sætning 1 bevist.

Dermed ved vi nu også at cent funktionen opfylder den almindelige regneregler for logaritmefunktionen

$$\text{cent}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \text{cent}(f_1) - \text{cent}(f_2)$$

Vi kan omformulere dette til en praktisk regel:

Praxis: At bestemme centværdien for et interval

Når vi skal bestemme centværdien for et interval kan vi bestemme det som forskellen mellem centværdierne for de to toners frekvenser.

Eksempel: Centværdien for den rene kvint

Vi har allerede omtalt, at den *perfekte* eller den *rene* kvint svarer til frekvensforholdet $3/2$. Centværdien for den *rene* kvint bliver dermed

$$\text{cent}\left(\frac{3}{2}\right) = 1200 \cdot \frac{\log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)}{\log_{10}(2)} = 702$$

Det betyder at den rene kvint svarer til 7.02 "tangenter" på et almindeligt stemt klaver! Hvordan dette giver mening, vender vi tilbage til i *den ligesvævende stemning*.

Øvelse: Udregning af cent-værdier

Bestem centværdien for en *ren storterts*. Hvor mange "tangenter" svarer en ren storterts til?

Bestem centværdien for en *oktav*. Hvor mange "tangenter" svarer en oktav til?

Øvelse:

En guitar har stået noget tid så de to dybeste strenge er ikke helt i stemning. Med en *app* til sin mobil måler Egon frekvensen af de to dybeste strenge til 160Hz og 210Hz. Hvis guitaren ikke skal stemme med andre instrumenter, er det kun vigtigt om de to strenge stemmer med hinanden – dvs at der er en kvart mellem den dybe E-streng og den lysere A-streng. Bestem centværdierne for de to frekvenser. Bestem centværdien for frekvensforholdet. Hvis Egon vil stemme A-strengen efter E-strengen, skal den så op eller ned?

4.2 Tonesystemer og klaverstemninger

Når man stemmer et klaver, har man den udfordring, at hvis instrumentet først er stemt, så kan man ikke justere på tonen, mens man spiller, som man kan på en violin. På blæseinstrumenter har man også mulighed for at presse tonen lidt op eller ned, så man selv kan justere den stemning, der umiddelbart ligger i instrumentet. På tasteinstrumenter er tonen imidlertid fast og det giver en række udfordringer. En af dem er, at de frekvensforhold vi allerede har omtalt for oktaver, kvinter, kvarter og tertser ikke passer sammen!

4.2.1 Den Pythagoræiske stemning

De tidligste musikteoretiske kilder tager udgangspunkt i at de to vigtigste intervaller – oktaven og kvinten – skal være rene. Dette leder frem til et stemningssystem der kaldes det pythagoræiske. Det er måske snarere et *æstetisk ideal*, end det er en *praktisk anvendt klaverstemning*. Det viser sig nemlig at være en stemning, der er umulig at bruge i flerstemmig musik, men samtidig er stemningen det system, som alle andre stemninger forsøger at reparere på.

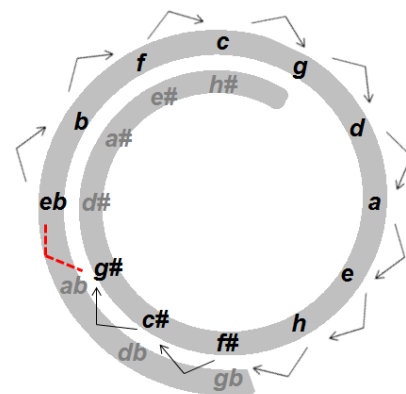


I den pythagoræiske stemning stemmes alle oktaver og kvinter rene.

Grafisk kan det illustreres således:

De "knækkede pile" viser hvor vi har de rene kvinter.

Som man kan se, så fortsætter kvint-cirklen eller snarere kvint-spiralen i det uendelige.



Da vi ikke har både en tangent hørende til tonen $d^\#$ og en anden hørende til eb , så vælger vi, i det system der grafisk er skitseret her at stemme tangenten som et eb . Men problemet er, at så er der ikke en ren kvint mellem $g^\#$ og eb . (Man kunne vælge at skifte ved $ab-c^\#$ i stedet for ved $eb-g^\#$)

I den pythagoræiske stemning får vi en meget lille kvint mellem eb og $g^\#$. Den kaldes også for *ulvekvint*. Det er den der er markeret med rødt på tegningen.

Selvom *ulvekvint* i den Pythagoræiske stemning ligger et stykke fra den rigtige kvint, så kræver det et godt øre og at man er opmærksom på hvad man skal lytte efter for at kunne høre den.

For at vise dette begynder vi at udregne forskellen i centværdierne for tonen c_0 og for de øvrige toner i oktaven mellem c_0 og c_1

Vi har allerede set at, den *rene kvint* er på 702 cent og dermed ved vi at g_0 ligger 702 cent over c_0 .

En kvint over g_0 ligger d_1 og den ligger dermed 1404 cent over c_0 . Heraf følger at d_0 ligger $1404-1200=204$ cent over c_0 .

En kvint over d_0 ligger a_0 og den ligger dermed $204+702=906$ cent over c_0 .

En kvint over a_0 ligger e_1 og den ligger dermed $906+702=1608$ cent over c_0 . Heraf følger at e_0 ligger $1608-1200=408$ cent over c_0

På samme måde kan vi bestemme tonerne h , $f^\#$, $c^\#$ og $g^\#$

Pythagoræisk stemning											
	$c^\#$	d	eb	e	f	$f^\#$	g	$g^\#$	a	b	h
Afstand til C målt i cent	114	204		408		612	702	816	906		1110

En kvint under c_0 ligger f_{-1} , og den ligger dermed 702 cent under c_0 . Heraf følger at f_0 ligger $-702+1200=498$ cent over c_0

En kvint under f_0 ligger b_{-1} og har dermed centværdien $498-702=-204$. Heraf følger at b_0 ligger $-204+1200=996$ cent over c_0

Fortsætter vi sådan får vi at hele skemaet bliver

Pythagoræisk stemning											
	$c^\#$	d	eb	e	f	$f^\#$	g	$g^\#$	a	bb	h
Afstand til C målt i cent	114	204	294	408	498	612	702	816	906	996	1110

Øvelse: Bestemmelse af centværdier -

Forklar hvordan vi bestemmer centværdien for eb_0 , h_0 , $c^\#_0$, $g^\#_0$

Øvelse: Ulvekvinten

Ulvekvinten i denne stemning er intervallet mellem fx $g\#_0$ og $d\#_1$. Problemet er, at nok har vi stemt alle kvinter rene, men tangenten hørende til $d\#$ er stemt som et rent eb , men det er selvfølgelig den samme tangent vi skal bruge. Forklar hvordan vi regner den ud og vis at den er næsten $\frac{1}{4}$ halvtone for lav. NB! Du skal først bestemme centværdien for $d\#_1$ og så trække centværdien for $g\#_0$ fra



En svaghed ved den pythagoræiske stemning er at tertserne ikke er særlig pæne. Vi har allerede set, at en *ren storterts* svarer til frekvensforholdet $5/4$ og dermed til centværdien $\text{cent}(5/4)=386$ cent. Men afstanden mellem c_0 og e_0 i den pythagoræiske stemning er meget større. Den er 408 cent. *Den pythagoræiske storterts* er dermed $408-386=22$ cent for stor, og det er næsten en kvart halvtone!

Den pythagoræiske stemning er altså en stemning, hvor kvinterne lyder smukt, men tertserne er grimme. Det er grunden til, at den aldrig er brugt som en praktisk stemningsanvisning for et klaverinstrument.

Igennem renæssancen udvikles forskellige stemninger med mere eller mindre rene tertser, og med kvinter der så tilsvarende ikke er rene. Fælles for dem er, at de også har en *ulvekvint* – dvs et sted hvor kvinten er særlig grim. Derfor kan disse stemninger kun bruges til at spille i tonearter, der ligger langt fra denne *ulvekvint*, og det vil i praksis sige tonearter med få faste fortegn. Disse stemninger kaldes under et for *ikke-tempererede stemninger*.

Lyt fx her:

<https://soundcloud.com/jaja-2/pythagoraeisk-gisdur>

<https://soundcloud.com/jaja-2/pythagoraeisk-gdur>

4.2.2 Den ligesvævende stemning

I barokken indfører man stemninger, hvor både tertser og kvinter er justerede mere eller mindre, men fælles for dem er, at man undgår, at der opstår en *ulvekvint*. Disse stemninger kan benyttes i alle tonearter. De lyder ikke helt ens i de forskellige tonearter, men der er ikke nogen tonearter, der slet ikke kan benyttes. Disse stemninger kaldes under et for *de tempererede stemninger*.

Den stemning, vi benytter i dag, er den ligesvævende stemning, og det er en tempereret stemning, der er karakteriseret ved, at alle kvinter er "lige svævende" = "lige falske". Dermed er ikke bare alle kvinter lige store, men også fx alle halvtoner er lige store. Der er altså samme frekvensforhold mellem $c-c\#$ som mellem $c\#-d$ og $d-eb$ osv.

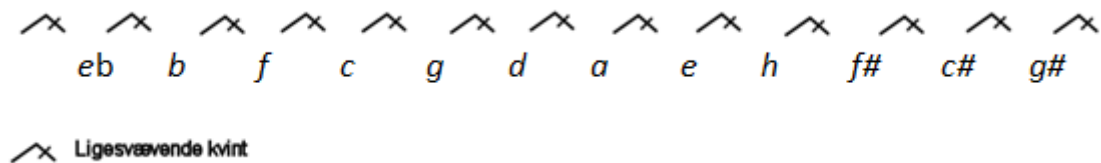
Eftersom oktaven mellem c_0 og c_1 svarer til frekvensforholdet 2 og eftersom der er 12 lige store halvtoner indenfor oktaven, så må frekvensforholdet mellem k toner opfylde

$$k^{12} = 2 \Leftrightarrow k = \sqrt[12]{2} = 2^{1/12}$$

Kvinten på klaveret bliver så $k^7 = (2^{1/12})^7 = 2^{7/12} = 1.4983$

Dette kaldes den *ligesvævende kvint*. Vi ser, at hvis alle halvtoner skal være lige store og hvis oktaven skal være ren (og det skal den!), så bliver kvinten en lille smule for lav.

Den *ligesvævende stemning* kan grafisk beskrives ved



I den ligesvævende stemning er alle kvinter lige store. De er lidt mindre end den rene eller perfekte kvint. I denne stemning er der ingen forskel på tonen g# og ab.

Øvelse: Kvarter og Storterts

Udregn på samme måde den *ligesvævende kvart* og den *ligesvævende storterts*.

Vi kan også vha. centværdierne beskrive den ligesvævende stemning ud fra afstanden for de enkelte toner ned til tonen c

Ligesvævende stemning											
	c#	d	eb	e	f	f#	g	g#	a	bb	h
Afstand til C målt i cent	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100

Afstanden målt i cent mellem to tangenter er 100, og dermed har *de ligesvævende intervaller* nogle meget pæne centværdier.

Ligesvævende intervaller	centværdi
Lille sekund	100
Stor sekund	200
Lille terts	300
Stor terts	400
Kvart	500
Kvint	700
Lille sekst	800
Stor sekst	900
Lille septim	1000
Stor septim	1100
Oktav	1200

Øvelse: Hvor mange cent afviger den ligesvævende storterts, lilleterts, kvart og kvint fra de rene (eller de perfekte) intervaller

	Perfekte Frekvensforhold	Centværdi af det perfekte frekvensforhold	Centværdien af den ligesvævende udgave af intervallet	Afvigelse
Oktav				
Kvint				
Kvart				
Storterts				
Lilleterts				

Øvelse: Centværdier for kvint og storterts

Bestem centværdien for den ligesvævende kvint. Hvor mange cent afviger den fra den *rene*? Bestem centværdien for den ligesvævende storterts. Hvor mange cent afviger den fra den *rene*?

Hver gang vi går et bånd op på en guitar svarer det til at frekvensen ganges med den faktor, der svarer til $k_1 = \sqrt[12]{2}$

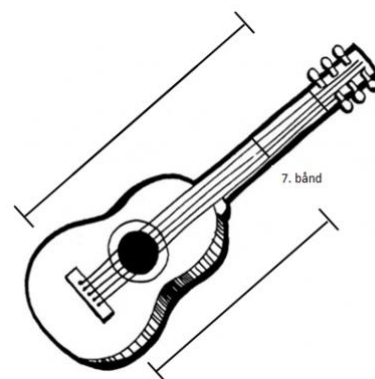
Dermed er frekvensen for tonen på n 'te bånd lig med

$$\text{frekvens}(n) = c_1 \cdot k_1^n$$

Da strenglængden er omvendt proportional med frekvensen, så må vi have at længden fra n 'te bånd til stolen må opfylde

$$\text{strengelængde}(n) = c_2 \cdot \left(\frac{1}{k_1}\right)^n$$

Strengelængden skal altså være en eksponentielt aftagende funktion af båndnummer. Grundtallet skal være $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}$



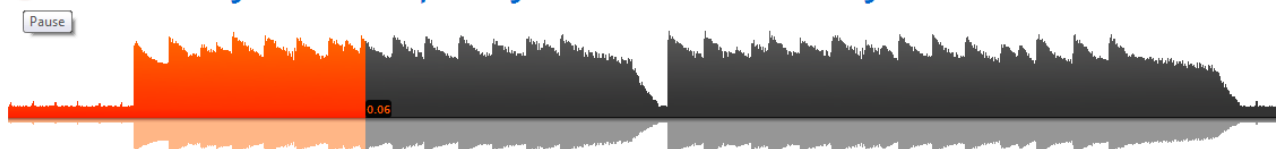
Øvelse: Sammenhæng mellem båndnummer og strenglængde

Mål nu sammenhængen mellem båndnummer og strenglængde. Båndnr. 0 svarer til hele strengen. Lav eksponentiel regression på talmaterialet. Vurder om grundtallet passer med det der er angivet ovenfor.

Lytteeksempel: Lyt til de to udgaver af *I østen stiger solen op*. Den ligesvævende stemning er god i alle tonearter. Her er alle problemer fordelt jævnt ud. Indspilningen i *gis*-dur lyder lige så godt som indspilningen i *g*-dur.

Hvad Er Matematik?

II I Østen Stiger Solen Op - Ligesvævende stemning - Gdur



Hvad Er Matematik?

II I Østen Stiger Solen Op - Ligesvævende stemning -Gisdur



https://soundcloud.com/hvad-er-musik/i_osten-lige-g

https://soundcloud.com/hvad-er-musik/i_osten-lige-gis

Sammenlign med eksemplerne for pythagoræisk stemning på side 36

Du kan også hente en tonegenerator der kan afspille treklange i forskellige stemninger her:

<http://www.frborg-gymhf.dk/gj/lyd/stemning/tonesystem.zip>

Du kan hente en lille vejledning her:

<http://www.frborg-gymhf.dk/gj/talogtangenter/TonegeneratorTonesystem-vejl.pdf>

Når tonegeneratoren er hentet skal zipfilen pakkes ud før den virker

4.2.3 Middeltonestemningen eller den prætorianske stemning.

I det foregående har vi set på den pythagoræiske stemning, der repræsenterer et ideal, men aldrig har været anvendt som et konkret svar på problemet med at stemme et klaver. Vi har også set på den ligesvævende stemning, der bruges i dag, hvor alle tonearter er gjort lige gode. Der er andre stemninger, der gennem tiden har været brugt som et bud på en løsning. Den mest interessante er den renaissancestemning, der hedder *middeltonestemningen* eller *den Prætorianske stemning* (opkaldt efter Michael Praetorius (1571 – 1621), der er komponist, musiker og musikteoretiker).

Den Prætorianske stemning repræsenterer en af de eneste ikke-tempererede stemninger, vi i dag bruger fx på gamle orgler. Det er denne stemning, som J.S.Bach og andre i hans samtid har gjort op med, og vi kan påvise, hvordan en del af Bachs værker ikke kunne være komponeret i renæssancen, simpelthen fordi stemningen lyder for grimt i de tonearter Bach komponerer i. Den *Prætorianske* stemning lyder godt, når man spiller med få eller ingen fortegn, men jo længere væk man kommer fra C-dur jo større bliver problemerne.

Princippet i den *Prætorianske stemning* eller *middeltonestemningen* er, at de store tertser skal være *rene* eller *perfekte*. Ser vi på et udsnit af kvintcirklen har vi, hvis vi går fire kvinter op fra c_0 så kommer vi gennem tonerne

$$c_0 - g_0 - d_1 - a_1 - e_2$$

Hvis den Prætorianske kvint svarer til frekvensforholdet k , så må frekvensforholdet mellem c_0 og e_2 være k^5 , men samtidig ved vi jo at tertsen c - e skal være ren, dvs svare til frekvensforholdet $5/4$ og dermed er der mellem c_0 og e_2 en ren storterts og to rene kvinter, og det svarer til

$$\frac{5}{4} \cdot 2 \cdot 2 = 5$$

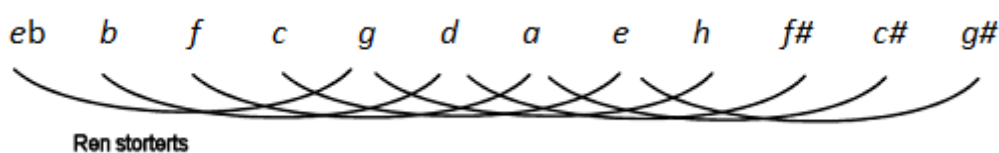
Vi skal altså løse: $k^4 = 5 \Leftrightarrow k = \sqrt[4]{5} \approx 1,4954$

$$k^4 = 5$$

$$k = \sqrt[4]{5} = 1.4954$$

Den prætorianske kvint svarer altså til en faktor lige under 1.5

Vi kan grafisk skitsere den prætorianske stemning ved



I den prætorianske stemning styres stemningen af at (mange af) tertserne er rene. Men bemærk at tertsen fx tertsen ab - c ikke er ren. Tonen as er nemlig ikke med. Det er derimod tonen $g\#$

Øvelse: Centværdien for den Prætorianske kvint

Vis, at centværdien for den Prætorianske kvint er 696.58, og centværdien af den rene storterts er 386.31. Hvor store er afvigelserne fra de perfekte intervaller for kvinten og stortertsen?

Dermed har vi også bestemt centværdien for tonerne e og g i skemaet nedenfor.

Iflg grafikken er der en ren storterts mellem g og h , så for h bliver centværdien $386.31 + 696.58 = 1082.89$

Tonen eb ligger en ren storterts *under* tonen g , så den har centværdien $696.58 - 386.31 = 310.27$

Tonen d ligger en prætoriansk kvint over g , og får dermed centværdien $696.58 + 696.58 - 1200 = 310.26$. De 1200 trækker vi fra, fordi vi også skal gå en oktav ned.

Prætoriansk stemning											
	c#	d	eb	e	f	f#	g	g#	a	bb	h
Afstand til C målt i cent	76.05	310.26	310.27	386.31	503.42	579.47	696.58	772.63	889.74	1006.84	1082.89

Øvelse: Bestemmelse af centværdier - 2

Forklar hvordan man bestemmer centværdierne for *c#*, *f*, *g#*, *a* og *bb*

Lytteeksempel: Lyt til de to udgaver af *I østen stiger solen op*. Den Prætorianske stemning er god i tonearter med få faste fortegn. Tertserne er helt rene. Til gengæld er der en meget voldsom ulvekvint mellem *gis* og *es*.



<https://soundcloud.com/jaja-2/praetoriansk-gdur>

<https://soundcloud.com/jaja-2/praetoriansk-gisdur>

Oplæg til SRP: Hvorfor blev de tempererede stemninger indført i barokken.

I et lidt større tværfagligt projekt i matematik og musik, kan man se på fx Bach's præludier og se på form og stiltræk ud fra en musik-synsvinkel og se på betydningen af, at man indfører de tempererede stemninger i barokken.

Konkret kan vi påvise, at udviklingen af de tempererede tonearter var helt nødvendig for at Bach kunne skrive musik i så mange forskellige tonearter. Som et eksempel kan vi se på, hvorfor et af hans præludier i H-dur ikke kan spilles i Prætoriansk stemning, men sagtens ville kunne være spillet, hvis det var transponeret til C-dur.

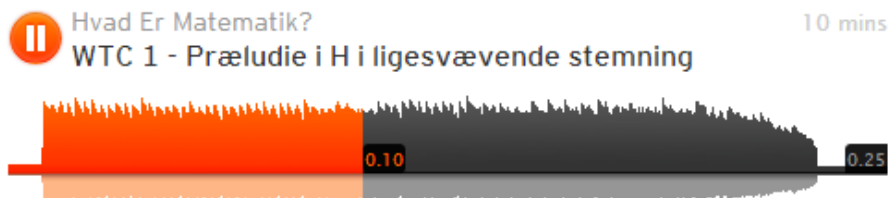
link til 4-b, og 4c1 og 4c2

Et svært spørgsmål at besvare er om den prætorianske stemning lyder bedre omkring C-dur, fordi tertserne er renere. Det har der helt sikkert været delte meninger om, men generelt foretrak man altså i renæssancen stemninger med rene tertser frem for rene kvinter. Når man ikke stemte tempereret, var det ikke fordi, man ikke kendte

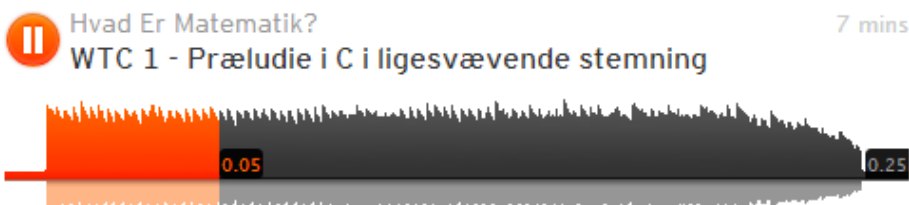
tempererede stemninger, men fordi man ikke synes, de lød så godt. Prøv selv at lytte til eksemplerne nedenfor og vurder om du kan høre forskel i de to stemninger i C-dur. Det er ikke så let. Det kan selvfølgelig også skyldes, at det lydkort der er brugt til indspilningen, ikke er optimalt.

links?

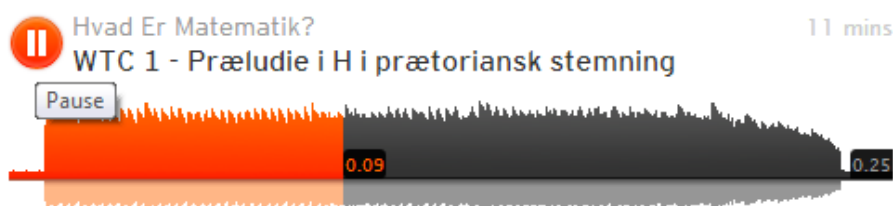
Lytteeksempel: Lyt til de 4 stemninger/tonerarter vi har analyseret



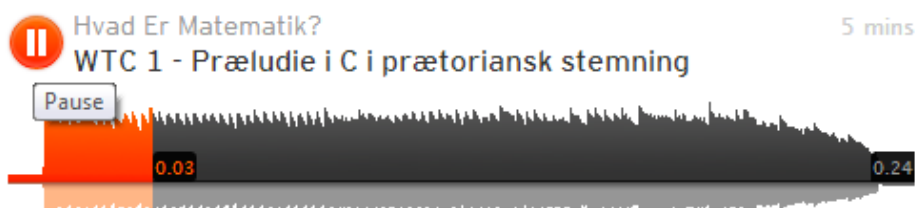
<https://soundcloud.com/hvad-er-musik/wtc1-h-lige>



<https://soundcloud.com/hvad-er-musik/wtc1-c-lige>



<https://soundcloud.com/hvad-er-musik/wtc1-h-praet>



<https://soundcloud.com/hvad-er-musik/wtc1-c-praet>

Hvad kan vi høre forskel på?

Kan du høre at den rene treklang lyder bedre end treklange i alle andre forskellige stemninger? Nogle af dem er meget lette at høre forskel på (hvilke?), mens andre er sværere.

Hvis der er store fejl i akkorden, så lyder den bare *grimt*, men ved ganske små afvigelser, skal vi snarere lytte efter om klangen "står stille" eller om den står og "sitrer" eller "støder", som vi kender det fra fx en harmonika.

<https://soundcloud.com/hvad-er-musik/cisdur-pyt-ren>
<https://soundcloud.com/hvad-er-musik/cisdur-praet-ren>
<https://soundcloud.com/hvad-er-musik/cisdur-lige-ren>
<https://soundcloud.com/hvad-er-musik/cdur-pyt-ren>
<https://soundcloud.com/hvad-er-musik/cdur-praet-ren>
<https://soundcloud.com/hvad-er-musik/cdur-lige-ren>

4.2.4 "Den rene stemning" ... eller snarere "De rene stemninger".

Mens den Pythagoræiske stemning ligger som et ideal, men ikke som et stemningssystem, der har været brugt i praksis til tasteinstrumenter, så repræsenterer *middeltonestemningen* og *den ligesvævende stemning* to eksempler på konkrete stemningssystemer, der har været og stadig er i brug. Samtidig repræsenterer de også dels et ikke-tempereret system og et tempereret system. Der er et (eller flere) stemningssystemer, der også omtales, som ligesom den pythagoræiske stemning primært repræsenterer et ideal, og det er stemningssystemer, hvor man prøver at stemme de hvide tangenter, så vi får en skala, der er bygget kun på *rene* eller *perfekte* intervaller ... bare i C-dur.

Hvis vi til en start stemmer alle de hvide tangenter så intervallerne til *c* bliver pæne, så har vi fastlagt de hvide tangenter på *e*, *f*, *g* og *a*. Den rene storsekst svarer til at gå en oktav op og gå en lille terts ned, dvs gange med 2/1 og dividere med 6/5

$$\frac{2}{1} : \frac{6}{5} = \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{3}$$

og derved får vi



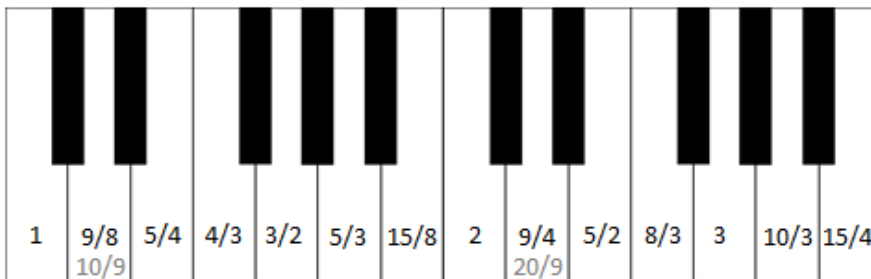
Tilføjer vi oktaven over har vi:



Bemærk at intervallet fra *e* op til *a* er en perfekt kvart, fordi $(5/3):(5/4)=4/3$, og at intervallet fra *a* op til *e* er en perfekt kvint, fordi $(5/2):(5/3)=3/2$.

Vi kan nu tilføje tonen *h* ud fra, at tertsen til *g* skal være ren: $(3/2)*(5/4)=15/8$. Vi kunne også vælge at sige, at vi ønskede kvinten til *e* ren: $(5/4)*(3/2)=15/8$, altså

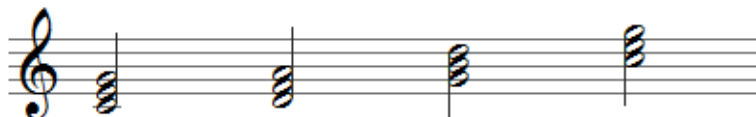
samme tone. Heldigt! Nu har vi placeret alle toner undtagen tonen *d* ... og her kommer problemerne:



Tonen *d* vil vi gerne have, så kvinten til *g* er ren altså med et frekvensforhold på $(3/2) \cdot (3/2) = 9/4$ og for oktaven under dermed $9/8$. Dermed er *G*-durakkorden ren – dominanten. Men hvad nu med afstanden til *a*? Hvis *d* skal bestemmes, så den ligger en kvint under *a* (og dermed så subdominantparallelle *D*-molakkorden bliver ren), så skal frekvensforholdet være $(5/3) : (3/2) = (5/3) \cdot (2/3) = 10/9$. Vi kunne også sige at *d* skulle ligge en kvart over *a* hvilket ville give $(5/3) \cdot (4/3) = 20/9$ og dermed $10/9$ i oktaven under.

Vi kan altså ikke stemme de hvide tangenter så både dominanten *G* eller subdominantparallelle *Dm* bliver rene. Og samtidig er de rene treklange dem, vi hele tiden sammenligner med, når vi skal vurdere en stemning.

Men det er ikke det eneste problem. Ser vi på en helt almindelig II-V-I kadence, så er det klart at vi gerne vil have rene kvinter mellem grundtonerne *d* – *g* – *c*, og det betyder at tonen *d* skal stemmes som $9/8$.



Men vi vil selvfølgelig også have rene kvinter indenfor hver akkord, og for <i>Dm</i> -akkorden betyder det, at kvinten <i>d</i> - <i>a</i> skal være ren, og dermed at tonen <i>a</i> skal have frekvensforholdet $27/8$ i stedet for $5/3$. Forskellen på disse to udgaver af tonen <i>a</i> er ca 21 cent dvs. omkring en kvart halvtone	$\text{cent} \left(\frac{5}{3} \right)$ 884.359 $\text{cent} \left(\frac{27}{16} \right)$ 905.865
--	---

Ønsket om at spille i helt rene stemninger leder altså meget hurtigt til problemer. En af løsningerne har været at lave enkelte tangenter i to udgaver (!), men det er stadigvæk kun lappeløsninger. Drømmen om *det rene* er under alle omstændigheder en drøm.

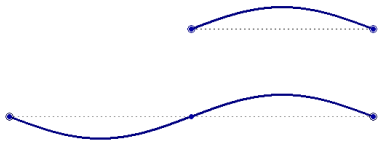
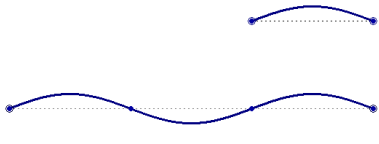
En mere radikal måde har været at dele oktaven op i fx 41 lige store spring, så man på den måde fx fik mulighed for at finde en "tangent" der var tæt på 884.4 cent og en anden, der var tæt på 905.9 cent. mere om det senere

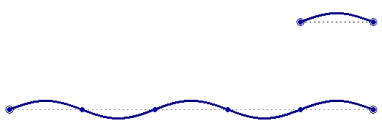
4.3 Den svingende streng – nu med toner

Når en streng svinger høres en tone, der først og fremmest er bestemt af strengens længde, den opstramning, dens materiale og de materialer, strengen evt sætter i sving. Det sidste høres fx når vi slår en streng slået an på en akkustisk guitar og på en elektrisk guitar med masiv krop. Vi hører det som om strengen klinger meget svagere på el-guitaren, men det er sådan set ikke rigtigt. Strengen klinger lige så meget. Der er bare ikke den samme resonansbund, og derfor forstærkes tonen ikke lige meget.

Men lad os se bort fra de andre parametre og se bare på strengen og se på hvilke svingninger der opstår.

Lad os igen forestille os en streng med længden L og lad os sætte frekvensen til f

	1. partialtone Når vi slår strengen an hører vi tydeligst den tone, der har bølgelængden $2*L$. Dette kaldes 1. partialtone eller grundtonen. Bølgelængde = $2*L$ Frekvens = f
	2. partialtone Samtidig vil en del af strengen stå og svinge med en enkelt knude på midten. Den klinger lige som en streng med den halve længde - dvs en oktav over. Bølgelængde = L Frekvens = $2*f$
	3. partialtone Samtidig vil en del af strengen stå og svinge med to knuder. Den klinger lige som en streng med $2/3$ strengelængde af 2. partialtone og dermed en kvint over den anden partialtone. Den er dermed en oktav+kvint over grundtonen. Bølgelængde = $2/3*L$ Frekvens = $3*f$

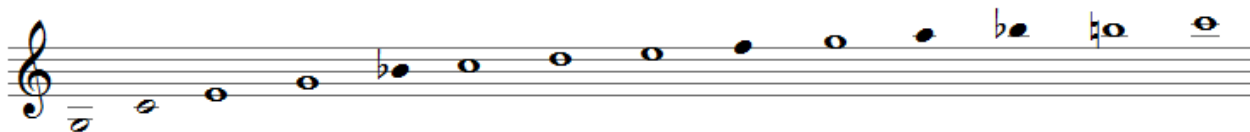
	4. partialtone Samtidig vil en del af strengen stå og svinge med tre knuder. Den klinger lige som en streng der er halvt så lang som strengen hørende til den 2. partialtone og dermed en oktav over den anden partialtone. Den er dermed en to oktaver over grundtonen. Bølgelængde = $1/2 * L$ Frekvens = $4 * f$
	5. partialtone Samtidig vil en del af strengen stå og svinge med fire knuder. Den klinger lige som en streng der er 4/5 så lang som strengen hørende til den 4. partialtone og dermed en storterts over den fjerde partialtone. Den er dermed en to oktaver+storterts over grundtonen. Bølgelængde = $2/5 * L$ Frekvens = $5 * f$
	6. partialtone Samtidig vil en del af strengen stå og svinge med fem knuder. Den klinger lige som en streng der er halvt så lang som strengen hørende til den 3. partialtone og dermed en oktav over den tredje partialtone. Den er dermed en to oktaver+kvint over grundtonen. Bølgelængde = $1/3 * L$ Frekvens = $6 * f$

I det ovenstående har vi brugt billedet med en streng, fordi den er så dejlig konkret, men det er samme princip for blæseinstrumenter, hvor det ikke er en streng der svinger men en luftsøjle der skaber tonen med dens partialtoner. Et særlig simpelt instrument er *naturtrompeten*, som vi nu skal se på.

Naturtrompeten

Den trompet, vi kender i dag, er ventiltrompeten, og den er udviklet omkring 1830. Før det havde man den såkaldte naturtrompet, der er en trompet uden ventiler, der mest af alt minder om jagthorn eller signalhorn. Derfor er alle de trompeter, der indgår i Mozarts symfonier naturtrompeter.

Naturtrompeten spiller i princippet kun på partialtonerækken. De to dybeste toner kan som regel ikke spilles, så vi har tonerne fra 3. til 16. partialtone, og de giverfor en trompet stemt i C følgende tonemateriale:



Nogle af tonerne i overtonerækken passer ikke helt, og de skal presses op eller ned med læberne - de er markeret med sorte hoveder ovenfor.

Udregner vi frekvensforholdet i forhold til c_0 , så er det for de indgående toner altså

	g_{-1}	c_0	e_0	g_0	b_0	c_1	d_1	e_1	f_1	g_1	a_1	b_1	h_1	c_2
frekvensforhold	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{12}{4}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{14}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{16}{4}$
d														

Øvelse: Vis at treklange c-e-g og g-h-d begge er helt rene.

Øvelse: Beregninger på naturtrompeten

Hvad skulle frekvensen for f være, hvis kvinten f -c skal være ren? Hvor mange cent afviger den tone i naturtrompeten, der svarer til f , fra den rene? (Heldigvis kan trompetister presse tonen lidt op eller ned)

Hvad skulle tonen a være, for at treklangen f -a-c skulle være ren? Hvor mange cent afviger den tone i naturtrompeten, der svarer til *denne tone*?

Denne begrænsning fører til at trompeterne har en meget afdæmpet rolle hos Mozart. Lyt fx til 1. sats i Mozart symfoni nr 26 i C (kv 200).

NB! Hvis du ser i partiturer, så står instrumentnavnene ofte på italiensk: *Trombe* =trompet, *Corni*=horn. Trompeten noteres altid i C men klinger i forskellige tonearter, fx er *Trombe in Mib/Es* en trompet stemt i Es. Ofte benyttes *do - re - mi - fa - so - la - ti* i stedet for *c - d - e - f - g - a - h* til angivelse af den toneart hornet er stemt i.

Lytteøvelse: Nedenfor er et lille simpelt nodeeksempel på hvordan en trompet kunne lyde, hvis den ikke var i stand til at presse tonen. hvor lyder det især dårligt? Hvorfor?



<https://soundcloud.com/hvad-er-musik/naturtrompet>

5.

Modellering med trigonometriske funktioner



De trigonometriske funktioner har en langt bredere anvendelse end alene i musikken. I dette kapitel vil vi med rund hånd demonstrere en række eksempler. Og selv om det ikke er så overraskende, at tidevandsbevægelser kan modelleres som summer af svingninger, så er det ikke let at se, hvordan det gøres i praksis. Men det gjorde den engelske fysiker og matematiker Lord Kelvin, og den Java-applet der her er gengivet et billede fra, er en digital version af den maskine han byggede. I kapitlet er der materialer til fx en SRP om dette. Modelleringen af månen Callistos omløb om Jupiter er matematisk mere ligetil, men i videnskabshistorien måske en endnu større begivenhed.

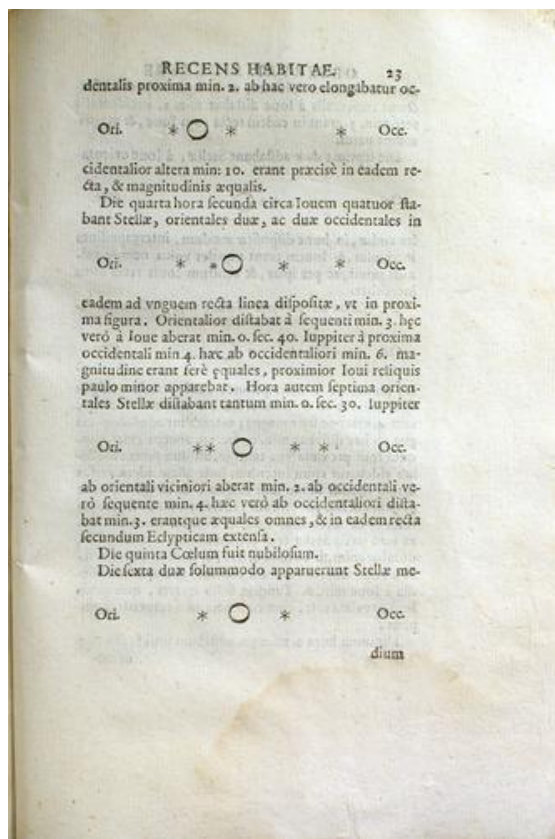
5. Modellering med trigonometriske funktioner

5.1 Omløbstiden for Jupiters måne Callisto

I dit værktøjsprogram er der indbygget en *sinusregression*, der kan anvendes, når vi ønsker at modellere et datasæt med en harmonisk svingning.

Galilei var den første, der så Jupiters måner, som han kaldte "Medici stjernerne" opkaldte efter den ledende slægt i Firenze.

Kikkerten var netop blevet opfundet, og han kunne se 4 af de mange måner. Han præsenterer sine opdagelser i et værk, han kalder *Budskabet fra Stjernerne*, og heri kan vi se den omfattende registrering af månernes bevægelser, han foretog. Værket kan hentes [her \(link til 5a1, hele værket, engelsk\)](#) eller [her \(link til 5a2, uddrag på dansk\)](#)



Jupiter og de 4 måner, som Galilei opdagede. De relative størrelser er korrekte, placeringen er fiktiv. Fra oven er det: Io, Europa, Ganymedes og Callisto,

Dag for dag, hvor der var klart vejr, noterede han i sin dagbog månernes positioner (markeret som *) i forhold til Jupiter (noteret som et stort **○**). Ori og Occ står for henh. vest og øst.

Ori. * * ○ * Occ.

Prikkerne fulgte med Jupiter de følgende dage og det stod hurtigt klart for Galilei, at hvad det end var, så bevægede de sig, men ikke væk fra Jupiter, så de måtte være knyttet til Jupiter. Jupiters måner blev studeret grundigt de følgende århundreder bl.a. med henblik på at bruge dem som et globalt astronomisk ur. Det var en tid, hvor man ikke havde noget, der stabilt kunne vise tiden, når man eksempelvis sejlede ud over verdenshavene.

Øvelse 5.1 Jupiters månesystem som et kosmisk urværk

Kan du gennemskue, hvordan tabeller over Jupiters måners positioner kan anvendes som en slags ur, som alle på Jorden kunne "stille deres ur efter"?

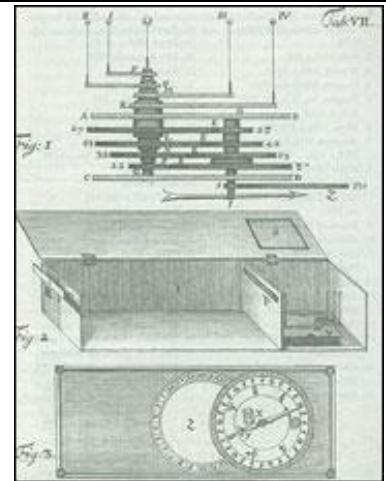
Den danske astronom Ole Rømer så også store muligheder heri, men i sit arbejde med at observere og tabellægge månernes bevægelser opdagede han, at "uret ikke gik præcist". Månerne var ikke, hvor de skulle være ifølge de tabeller, han havde til

rådighed. Da han opdagede, at det var en *systematisk* afvigelse, kobledede han sine observationer op på, hvordan planeterne stod i forhold til hinanden, og i 1675 gav han sit bud på en løsning: Det tager en vis tid for lyset fra Jupiter og dens måner at nå Jorden. Han havde her gjort en af naturvidenskabshistoriens store opdagelse, opdaget det, han selv betegnede som "lysets tøven". At lyset har en hastighed, er undersøgt nærmere i undervisningsmaterialerne til *Matematikken bag Power-to-X hos Topsoe*.

Øvelse 5.2. Lysets tøven og det kosmiske urværk.

Kan du forklare, hvordan "lysets tøven" kan være en forklaring på, at Rømer observerede månerne i en anden position, end de skulle være ifølge tabellerne. Lav en skitse over planternes placering som støtte for din forklaring.

Rømer konstruerede et mekanisk apparat, der kunne visualisere månernes bevægelser. Apparatet er gået tabt, men man har en detaljeret beskrivelse af det, og der er fremstillet en kopi på det grundlag. Man kunne fx kigge ind fra siden gennem et lille kighul, og ville da se banebevægelsen på samme måde som i en kikkert. Kopien kan ses på muset i Kroppedal.



Kopi af Ole Rømers Jovilarium

Hvis man forestiller sig at månerne bevæger sig i jævne cirkelbevægelser rundt om Jupiter og at vi ser ind på banebevægelsen langs baneplanet, vil det, vi ser, derfor være harmoniske svingninger frem og tilbage i baneplanet. I kapitel 2, afsnit 2,2 er der en illustration af dette fænomen: En cirkelbevægelse, fx en måne rundt om Jupiter, opleves af os som en bevægelse op og ned eller frem og tilbage i baneplanet.

Vi vil nu undersøge data for denne svingning i månen Callistos afstand til Jupiter. Data kan hentes [her-link til 5b](#) (udsvinget måles i en enhed der er uden betydning for opgaven).

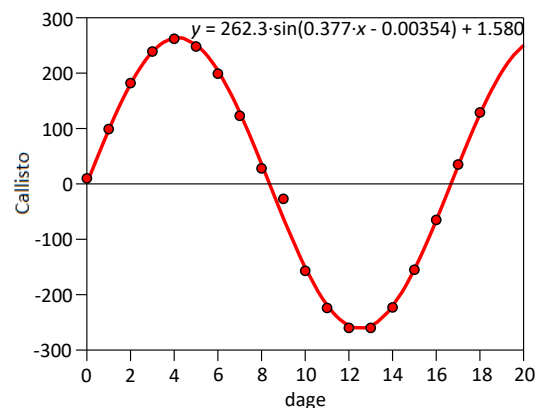
Tid (dage)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Callistos udsving	99	182	239	262	248	199	123	28	-27	-157	-224	-260	-260	-223	-155	-65	35	129

Når vi afbilder data i et punktplot, ligner det en sinus-svingning, der spænder over lidt mere end en periode. Udføres en sinusregression fås som vist ligningen $y = 262.292 \cdot \sin(0.376662 \cdot x - 0.003536) + 1.58025$.

Og vi ser, at sinus-grafen følger punkterne perfekt. Vi kan udnytte vinkelhastigheden $\omega = 0.376662$ til at finde omløbstiden for Callisto:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6.28319}{0.376662} = 16.6812$$

Callistos omløbstid er altså 16.7 dage.

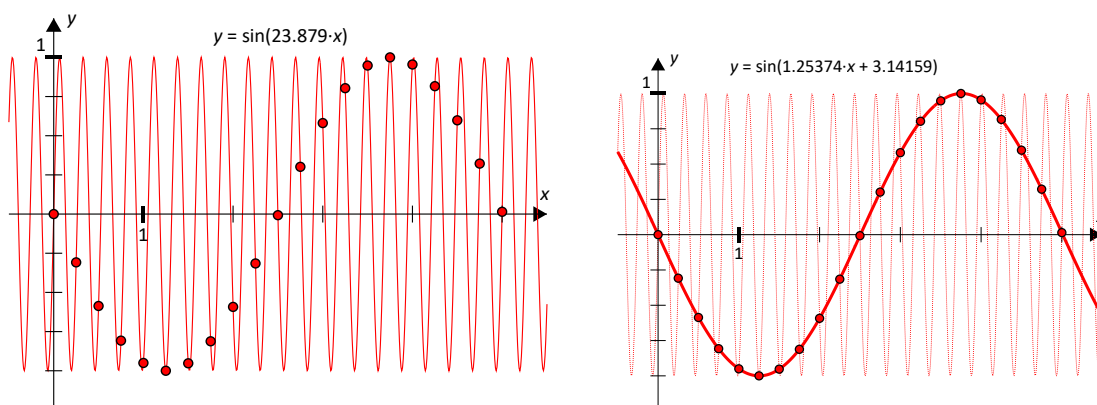


Øvelse 5.3

- Afbild data som et punktplot og prøv at aflæse koordinaterne til maksimumspunktet og minimumspunktet. Bestem her ud fra amplituden, ligevægtsværdien, perioden og begyndelsesfasen og sammenlign med det resultat du finder ved at udføre en sinusregression.
- Kontroller på internettet din omløbstid mod den officielle astronomiske omløbstid.

Kommentar om sinusregression.

Når vi anvender sinusregression, er det afgørende at data er af en god kvalitet med et rimeligt antal datapunkter per periode. Ellers kan vi risikere at få et helt forkert resultat, som følgende illustration viser:



Den "ukendte" harmoniske svingning, vi her leder efter, er funktionen $y = \sin(23.879 \cdot x)$. Læg mærke til at der kun er ca. en dataværdi per periode. Hvis vi anvender en sinusregression på disse data finder vi derfor som vist et helt forkert resultat $y = \sin(1.25374 \cdot x + 3.14159)$. En sinusregression behøver således ikke føre til den ønskede tilnærmelse og bør derfor altid kontrolleres grafisk.

5.2 Modellering af dagens længde

Dagens længde et bestemt sted på kloden er et eksempel på et periodisk fænomen. I en model kan længden af dagen i Anchorage Alaska som funktion af tiden beskrives ved

$$f(t) = 6,61 \cdot \sin(0,0167 \cdot t - 1,303) + 12,2, \quad 0 \leq t \leq 365$$

hvor $f(t)$ betegner længden af dagen (målt i timer) til tidspunktet t (målt i døgn efter 1. januar 2011).

- Tegn grafen for f i det nævnte interval – hvorfor har intervallet netop den længde?
- Benyt funktionen til at beregne dagslængden i Anchorage Alaska 100 døgn efter 1. januar 2011, og sammenlign denne værdi med den tilsvarende som kan aflæses på grafen.
- Løs ligningen $f(t) = 14$ grafisk, og giv en fortolkning af de to løsninger, du får.
- Bestem ved aflæsning på grafen det tidspunkt på året, hvor længden af dagen i Anchorage Alaska er størst.

- e) Bestem $f'(100)$ grafisk, og gør rede for, hvad dette tal fortæller om udviklingen i dagslængden.

Løsning til 5.2 Modellering af dagens længde

Prøv selv at svare på ovenstående spørgsmål. Du kan hente en facitliste [her – link til 5c](#)

3

5.3 Oplæg til SRP: Modellering af tidevandets niveau

I 1800-tallet efter Napoleons nederlag ved Waterloo og frem til 1. Verdenskrig var England den dominerende magt i verden. Det britiske imperium med Indien og Pakistan, Australien og Canada og alle de afrikanske kolonier var det største imperium verden endnu havde set. At opretholde den position krævede et omfattende militærapparat og en tilstedeværelse overalt på kloden, og det stillede store krav til moderlandet, der hverken hørte til de største eller de mest folkerige i verden. England herskede ikke mindst i kraft af sine investeringer i uddannelse og videnskab og sin altdominerende flåde. Allerede 100 år før havde det engelske parlament investeret store summer i udviklingen af pålidelige ure, der var helt afgørende for at kunne navigere og bestemme sin position på havet. Nu stillede man nye opgaver til sine videnskabsmænd.

Som verdens førende sømagtsnation var det fuldstændigt afgørende at kunne fremstille pålidelige tidevandstabeller for de Engelske havne, Indiske havne, osv. I princippet er vandstanden i en havn karakteriseret ved forholdsvis få svingninger koblet til Solens og Månens periodiske bevægelser på himmelkuglen. Men så let er det heller ikke.

Dels er der ikke nogen *pæne talforhold* i astronomien set på "den korte bane" mellem fx årets længde og hvor lang tid månen tager i sin bane rundt om Jorden. Men faktisk *er der en cyklus på 19 år*, hvorefter månens faser gentager sig på dato. Så man kunne foretage nøjagtige optegnelser i de vigtigste havne i Indien gennem 19 år – så ville man have de ønskede tabeller. Men 19 år er længe, så en anden metode skulle tages i brug – og det blev en *Fourieranalyse* på betydeligt færre data. Men Fourieranalysen vil ideelt set kunne afsløre mønstret.

Og dels er kloden ikke bare dækket af vand. Der er kontinenter, der spærrer for tidevandsbølgerne, der er dybhav og lavvandede områder, brede floder og en Engelsk kanal der giver et helt andet rodet billede. Størrelsen af

tidevandssvingningerne varierer meget efter de lokale forhold, fx om havnen ligger i et snævert stræde, inde i en kanal eller lignende. Tidevandsbølgen er således som en grundtone, der suppleres med en række overtoner, hvor grundtonen styres af den overordnede frekvens i solens og månens bevægelser, og alle overtonerne bestemmes



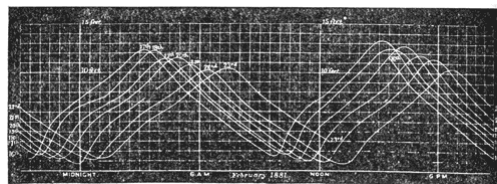
Højvande og lavvande i Port St. Ives, Cornwall, England.

af andre detaljer i himmelmeknikken og af de særlige lokale forhold. Hver eneste havn har sin helt egen karakteristiske "klang". Men det betyder også, at selv om man kunne finde en overordnet beskrivelse, så var man derefter nødt til at regne detaljerne ud i hver eneste større havn.

Problemet med udarbejdelse af pålidelige tidevandstabeller blev løst af den engelske matematiker og fysiker Kelvin. Ved at måle vandstanden i en havn over en længere periode opdagede han nogle mønstre der gav ham ideen til en løsning.

5.3.1 Kelvin og The Tidal Commission

Kelvin, der havde fået i opdrag at finde metoder til at forudsige tidevandsbevægelser, kendte naturligvis til Fourieranalyse, og han formåede på en meget kreativ måde at udnytte denne nye matematiske metode til at analysere grafiske optegnelser af tidevandsbevægelser, så han kunne få beskrevet det samlede svingningsmønster for tidevandet som en sum af rene svingninger.



Kelvins tidevandskurver

I 1882 holder Kelvin et større foredrag, hvor han bla. beskriver målet med analyserne, og hvor han fortæller om sin konstruktion af en mageløs maskine, der kunne løse det omfattende beregningsarbejde. Samtidig får vi et indtryk af, hvor omfattende et projekt dette var for imperiet:

The object of the harmonic analysis is to analyse out from the complicated curve traced by the tide gauge the simplest harmonic elements. A simple harmonic motion may be imagined as that of a body which moves simply up and down in a straight line, keeping level with the end of a clock hand, moving uniformly round. The exceedingly complicated motion that we have in the tides is analysed into a series of simple harmonic motions in different periods and with different amplitudes or ranges; and these simple harmonic constituents added together give the complicated tides.

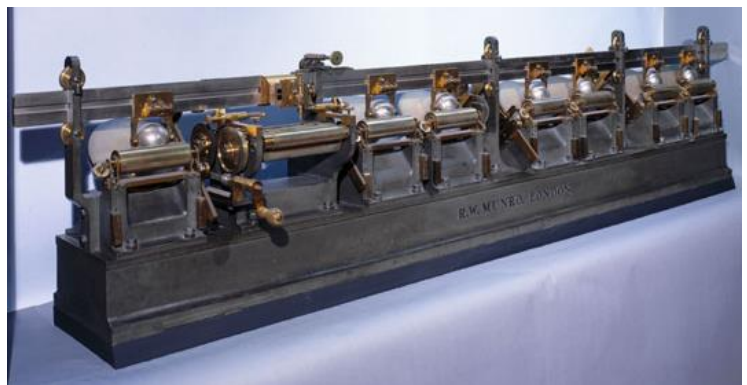
I hold in my hand the Reports of the late Tidal Committee of the British Association with the results of the harmonic analysis—about eight years' work carried on with great labour, and by aid of successive grants from the British Association. The Indian Government has continued the harmonic analysis for the seaports of India. The Tide Tables for Indian Ports for the Year 1882, issued under the authority of the Indian Government, show this analysis as in progress for the following ports, viz.: Aden, Kurrachee, Okha Point and Beyt Harbour at the entrance to the Gulf of Cutch, Bombay, Karwar, Beypore, Paumben Pass, Madras, Vizagapatam, Diamond Harbour, Fort Gloster and Kidderpore on the River Hooghly, Rangoon, Moulmein, and Port Blair. Mr. Roberts, who was first employed as calculator by the Committee of the British Association, has been asked to carry on the work for the Indian Government, and latterly, in India, native calculators

under Major Baird, have worked by the methods and forms by which Mr. Roberts had worked in England for the British Association. The object is to find the values of the different tidal constituents. We want to separate out from the whole rise and fall of the ocean the part due to the sun, the part due to the moon, the part due to one portion of the moon's effect, and the part due to another. There are complications depending on the moon's position—declinational tides according as the moon is or is not in the plane of the earth's equator—and also on that of the sun...

Hele foredraget, hvor også maskinen omtalt nedenfor gennemgås, kan hentes på hjemmesiden: http://zapatopi.net/kelvin/papers/the_tides.html)

5.3.2 Kelvins mageløse maskiner til harmonisk analyse og syntese

Fouriers metode indebar, at amplituderne til de enkelte rene sinussvingninger beregnes som et integral. Men hvis man ikke kender funktionen, så må integralet udregnes som et areal, og skal det være nøjagtigt, er det overordentlig tidkrævende. Kelvin løste som omtalt dette beregningsproblem ved at bygge en maskine, der kunne udføre integralerne mekanisk, når man fordrede den med en tidevandskurve optegnet på et stykke papir.

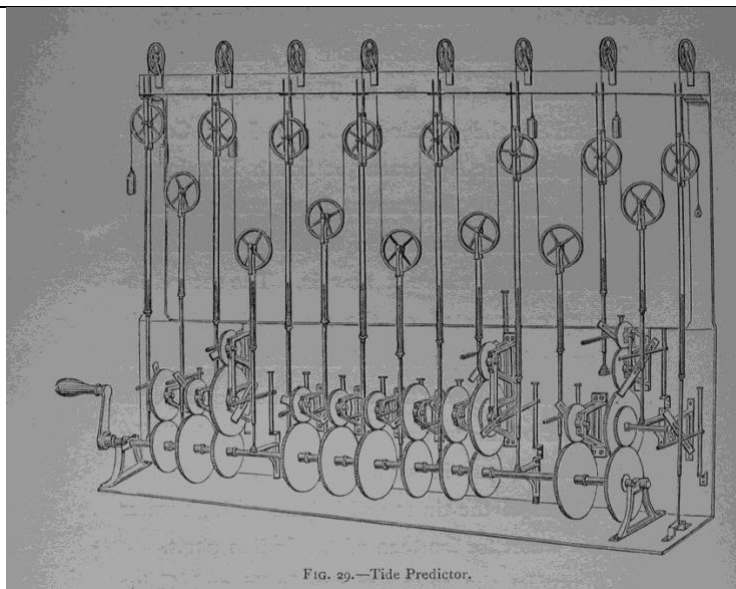


Kelvins harmoniske analysator fra 1878. Den opbevares i dag på Science-museet i London.

Efter kørslen kunne man på en påmonteret skala til slut aflæse integralet. På denne måde kunne Kelvin i 1878 bygge en maskine, der kunne analysere en tidevandskurve for de første 10 amplituder, hvilket var tilstrækkeligt til at frembringe brugbare tidevandstabeller. Senere maskiner blev bygget til at kunne finde flere amplituder (30-60).

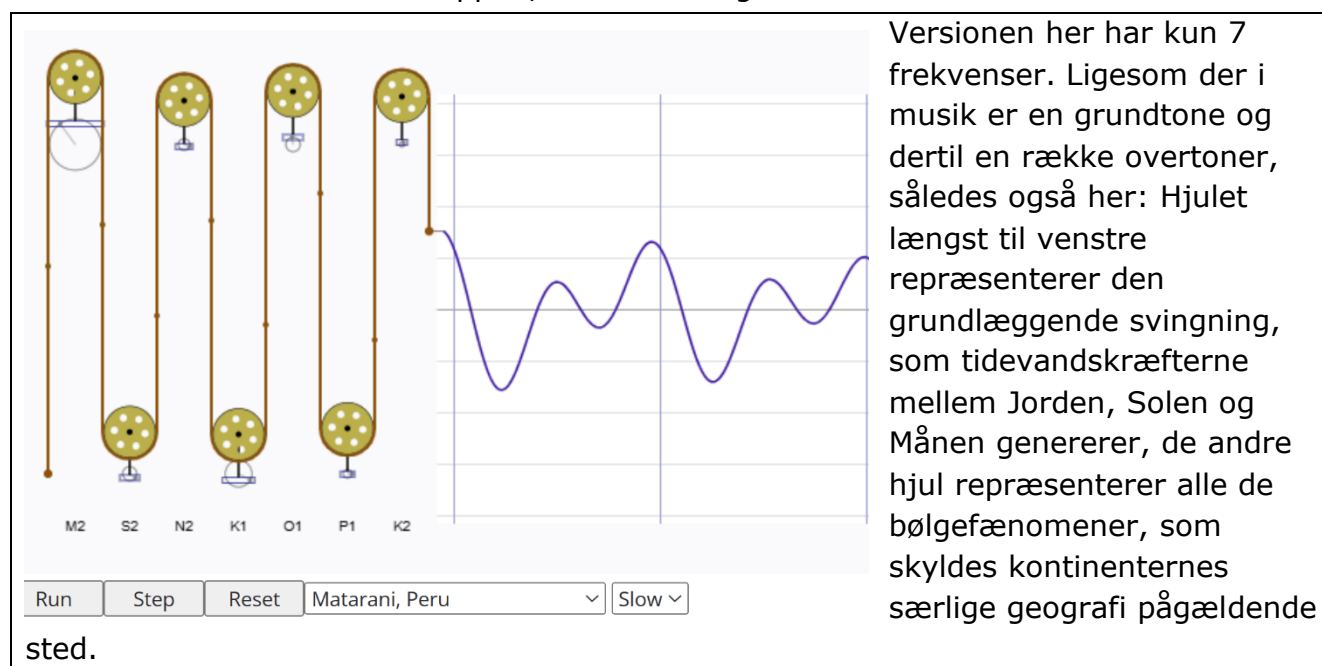
Hvis man omvendt kender amplituderne og frekvenserne, så kan man, som vi så ovenfor, lægge sinussvingningerne sammen og få et billede af den sammensatte svingning.

Også dette løste Kelvin mekanisk, idet han byggede *en maskine til at udføre harmonisk syntese, dvs. tegne tidevandskurven* hørende til de 10-20 mest betydningsfulde frekvenser. Nedenfor kan du se en animation, der gengiver tidevandssvingninger i en række havne verden over



På American Mathematical Society, AMS' hjemmeside kan man finde inspirerende materialer om næsten alt, man kan komme i tanker om. Fx om Kelvins kortlægning af tidevandsbevægelser. Se her: <https://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-tidesiii3>

På siden kan du finde denne applet, som er en digital version af Kelvins maskine



For en given havn havde man måske foretaget jævnlige registreringer af vandstandens højde gennem en periode, dvs man havde grafen over tidevandsbølgerne repræsenteret ved en række punkter (dataværdier).

På grundlag af disse punkter på grafen kan man ved brug af numerisk integration bestemme koefficienterne til den tilhørende Fourierrække.

The following constituent amplitudes were used in the simulation:

	M2	S2	N2	K1	O1	P1	K2
Matarani, Peru	0.995	0.274	0.225	0.514	0.279	0.167	0.101 ft
Yamato Wan, Kuril Islands	0.59	0.23	0.11	0.95	0.79	0.31	0.06
New York NY	2.104	0.437	0.469	0.321	0.170	0.104	0.127
Otomari, Sakhalin Island	0.656	0.312	0.102	0.719	0.715	0.240	0.095
Cordova, Alaska	4.712	1.599	0.957	1.615	1.001	0.530	0.463
Ras at Tannura, Saudi Arabia	1.951	0.651	0.416	0.471	0.380	0.142	0.231
Recife, Brazil	76.2	27.5	5.3	4.3	5.0	1.4	8.1 cm

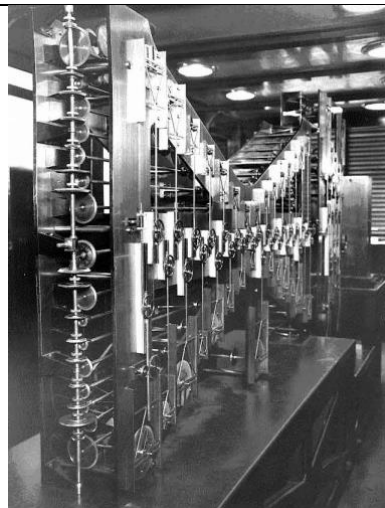
Øvelse 5.5 Bestemme Fourierrækken ud fra datapunkter.

Du kan [her – link til 5d](#) - finde et mapleark, hvor du skal generere 100 datapunkter til en given graf over en lidt kompliceret funktion. Med disse datapunkter i hånden skal du lade som om du ikke kender forskriften. I stedet skal du anvende de 100 datapunkter til at bestemme de 15 første Fourierkoefficienterne til den funktion, der ligger bag. Og dette skal gøres ved numerisk integration.

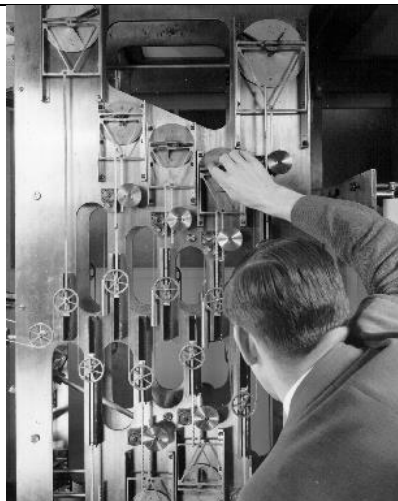
Derved kan vi opskrive Fourierrækken og vi kan tegne grafen – og forhåbentlig se, at denne går igennem de oprindelige datapunkter.

I tabellen her er for hver havn angivet de 7 værdier, der er knyttet til de 7 hjul i appletten. Da han havde dem i hus, så tog Kelvin kontakt til en af datidens store instrumentmagere, og fik ham til at lave ovenstående *Tide Predictor*.

I 1910 byggede man i USA deres egen *Predicter*, som du nedenfor ser fotos af.



Maskinen havde 37 hjul!



De enkelte hjul indstilles.



Tidevandsforudsigelser produceres. Bemærk håndtaget – og se Kelvins trisse-apparat!

Kelvins maskiner var en del af en stor bevægelse i matematikken i 1700- og 1800-tallet. Man var i stand til at løse rigtig mange problemer - i princippet. Men der var ofte et enormt beregningsarbejde tilbage. Så tog man fat på at mekanisere processen, så maskiner kunne overtage at integrere, løse differentiaalligninger osv. Det var datidens computere, men de var udtænkt efter et andet princip. De var analoge og ikke digitale, som vor tids computere.

5.3.3 Tidevandets musik – hver havn har sin melodi

Den matematiske beskrivelse af tidevandsbevægelsen sker ved hjælp af sinussvingninger, kombineret i en Fourier-række. Hvert led i række har en frekvens og kan derfor spilles, som var det et stykke musik! Hver havn har sin tidevandsmusik. Gå ind på denne hjemmeside:

<https://www.math.stonybrook.edu/~tony/tides/tidesounds.html>

og prøv at afspille nogle af "musikstykkerne"!

5.3.4 En SRP om at skabe sig en sikker havn.

Historien om det engelske imperiums behov for at deres skibe, der "ruled the waves" kunne anløbe sikre havne, hvor end de var på kloden er et spændende kapitel i nyere historie. De investerede ikke alene i at uddanne folk til at styre kolonierne, så godt det nu kunne lade sig gøre, men også stort i videnskab, og et af de punkter, hvor de var andre konkurrerende nationer overlegne i 1800-tallet var netop på evnen til at mobilisere videnskaben til at understøtte imperiets mange behov. Historien om Tidal Commission er et godt udgangspunkt for studieretningsprojekter mellem engelsk eller historie sammen med matematik. Kelvins arbejde og hans taler, hvor et lille afsnit er gengivet, men hvor han i hele fremstillingen gør meget ud af at fortælle om tidevandskræfterne, giver et levende indtryk af, hvordan matematik naturligt spiller ind i alt dette. Kan det virkelig lade sig gøre, det Kelvin fik i opdrag? Fagene kan bindes fint sammen her.

5.4 Mangfoldigheden i modellering med trigonometriske funktioner



De følgende opgaver, der alle handler om anvendelser af de trigonometriske funktioner i en modellering, er vejledende eller rigtige eksamensopgaver stillet i 90'erne, 0'erne og 10'erne. De er naturligvis meget reducerede ift. rigtige anvendelser, men kan alligevel give et indtryk af mangfoldigheden af anvendelser.

A) Vandstanden i en havn

I en model kan vandstanden i en bestemt havn beskrives ved funktionen

$$f(t) = 0,71 \cdot \sin(0,26 \cdot t) + 1,12, \quad 0 \leq t \leq 24$$

hvor $f(t)$ betegner vandstanden (målt i meter) til tidspunktet t (målt i timer efter kl. 00.00).

- Tegn grafen for f i det angivne interval – hvorfor er det netop dette interval?
- Bestem vandstanden ved lavvande og ved højvande, og bestemt der ud fra hvor stort et udsving vandstanden har i løbet af det pågældende døgn.
- Bestem de tidspunkter på døgnet, hvor vandstanden er 1,5 meter.
- Bestem de tidsrum, hvor vandstanden er under 1 meter.
- Bestem $f'(18)$, og gør rede for betydningen af dette tal.

B) Gennemsnitstemperaturen et sted i Danmark

I en model kan udviklingen i gennemsnitstemperatur i 2011 et bestemt sted i Danmark beskrives ved funktionen:

$$f(t) = 9,34 \cdot \sin(0,017 \cdot t - 1,53) + 11,12, \quad 0 \leq t \leq 365$$

hvor $f(t)$ betegner temperaturen (målt i $^{\circ}\text{C}$), og t betegner tiden (målt i døgn efter 1. januar 2011).

- Tegn grafen for f i det nævnte interval.
- Benyt funktionen til at beregne gennemsnitstemperaturen d. 1. april 2011, og sammenlign denne værdi med den tilsvarende, som kan aflæses på grafen.
- Løs ligningen $f(t) = 10$ grafisk, og giv en fortolkning af de to løsninger, du får.
- Hvilken del af året var gennemsnits temperaturen over 10°C ?
- Bestem ved aflæsning på grafen den dag på året, hvor man oplevede den højeste temperatur.
- Bestem væksthastigheden for temperaturen d. 1. maj 2011.

C) Tidevandets bevægelser

På grund af tidevandet ændres vanddybden over en sandrevle. I et bestemt døgn er vanddybden $f(t)$, målt i meter, bestemt ved

$$f(t) = 7 + 5 \sin\left(\frac{1}{2}t - 1\right) \quad 0 \leq t \leq 24$$

hvor t angiver antallet af timer efter middag.

- Bestem den største og den mindste vanddybde over sandrevlen i døgnets løb.
- Bestem $f'(t)$ og bestem den hastighed, hvormed vanddybden ændrer sig, til tidspunktet $t = 12$.

(Kilde: Eksamensopgaver i matematik, gymnasiet, matematisk linje 3 årigt forløb til A niveau, 1999)

D) Omkostningsfunktion

Med $O(x)$ betegnes de samlede omkostninger, angivet i mio. kroner, ved produktionen af x enheder af en vare.

Funktionen O er givet ved

$$O(x) = 0,2x + 100 + 30 \sin(0,006x) \quad x \in [0; 1000]$$

- Vis at benytte $O'(x)$, at $O(x)$ er en voksende funktion af x .

Hver produceret enhed sælges for 0,35 mio. kroner. Fortjenesten F som funktion af antallet x af producerede enheder er derfor bestemt ved $F(x) = 0,35x - O(x)$

- Vis ved at benytte $F'(x)$, at fortjenesten har en størsteværdi, og bestem denne.

(Kilde: Eksamensopgaver i matematik, gymnasiet, matematisk linje 3 årigt forløb til A niveau, 1999)

E) Lungefunktion

For en person i hvile kan lungerumfanget tilnærmelsesvist beskrives ved funktionen

$$V(t) = 0,2 \cdot \sin(1,57 \cdot t) + 2,5$$

hvor t betegner tiden, målt i sekunder, og $V(t)$ betegner personens lungevolumen (målt i liter).

- Tegn grafen for V .
- Hvor mange liter luft indånder personen i løbet af et minut.
- Hvor mange gange pr. minut trækker personen vejret (ånder ind og ud)?
- Hvor stort et rumfang vil lungerne have efter en udånding?

F) Stemplet i en dieselmotor

En bestemt type skibsdieselmotor har en slaglængde på 2180 mm. Slaglængden er afstanden mellem øverste og nederste stilling af stempelmotoren.

Stemplets afstand fra topstillingen målt i mm er en funktion af tiden målt i sekunder. Denne funktion er af formen

$$f(t) = r(1 - \cos(mt))$$

hvor r og m er positive konstanter.

Stemplet udfører 97 gange i minuttet en hel bevægelse fra topstilling til bundstilling og tilbage igen.

- Bestem konstanterne r og m .
- Bestem stemplets maksimale fart.

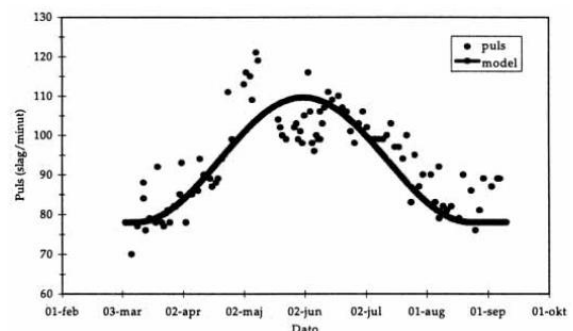
Indsprøjtningen af dieselolie til motoren sker en gang for hver hele stempelbevægelse. Indsprøjtningen begynder, når stemplet befinder sig 1,49 mm fra topstillingen på vej opad, og slutter, når stemplet efter at have passeret topstillingen befinder sig 37,14 mm under denne.

- Hvor lang tid varer en indsprøjtning?



G) Aktivitetspulsen for råvildt

"Sæsonvariation i aktivitetspuls for uforstyrrede dyr. Sinuskurven er den kurvefunktion, som bedst beskriver materialet. Data repræsenterer i alt 2.071 timers registrering i 96 forskellige døgn." Sådan står der i rapporten *Råvildt og forstyrrelser*. Faglig rapport fra DMU nr. 237 fra 1998.



<Kilde: http://www2.dmu.dk/1_viden/2_publicationer/3_fagrapporter/rapporter/FR237.pdf > [ill er herfra](#)

Sinuskurven på figuren kan således anvendes som model for sæsonvariationen i aktivitetspulsen for råvildt. Kurven er graf for funktionen

$$p(t) = 15,8 \cdot \sin(0,038 \cdot t - 4,25) + 93,8, \quad 0 \leq t \leq 365$$

hvor $p(t)$ betegner pulsen (målt i antal hjerteslag pr. minut) til tidspunktet t (målt i døgn efter 1. januar)

- a) Tegn grafen for p
- b) Bestem $p(120)$, og gør rede for hvad dette tal betyder.
- c) Løs ligningen $p(t) = 90$, og gør rede for, hvad løsningerne fortæller om rådyrets aktivitetspuls.
- d) Bestem den procentvise stigning i rådyrets aktivitetspuls i tidsrummet $[120; 140]$
- e) Bestem rådyrets laveste og højeste aktivitetspuls.

6.

Fourrierrækker og Fourieranalyse



Når vi skal analysere lydbølger vha. matematik, støder vi hurtigt ind i udfordringer med, at lydbølger ofte er temmelig komplicerede, selvom de opfører sig "pænt" og periodisk. Det gælder specielt, hvis lydbølgen er sammensat af flere instrumenter med masser af toner og overtoner. I 1820'erne opfandt den franske videnskabsmand Jean-Baptist Joseph Fourier imidlertid en metode til at tackle lige netop de udfordringer. I kapitlet her dykker vi ned i de uendelige Fourierrækker og kigger på, hvordan de kan anvendes til analyse af lydbølger.

6. Fourrierrækker og Fourieranalyse

6.1 Analyse af sammensatte lydbilleder

Start evt med at se [filmens sekvens fra 12.35 til 18.02](#), hvor der lægges op til det følgende.

Mennesker har til alle tider sunget, spillet på musikinstrumenter og leget med lyde. Allerede i oldtiden erfarede man, at nogle toner klinger godt sammen, hvorimod andre tonesammensætninger resulterer i disharmoni.

Omkring år 500 f.Kr. undersøgte pythagoræerne, der var et filosofisk og religiøst fællesskab grundlagt af Pythagoras i Syditalien, sammenhængen mellem tal og toner.

Pythagoræerne var af den opfattelse, at alt i universet kunne forklares vha. matematik, også musik og toner. En myte fortæller blandt andet, hvordan pythagoræerne som de første i historien opdagede en ganske simpel sammenhæng mellem strengelængder og klang, nemlig at når du halverer længden af en streng, får du en tone, der er nøjagtig én oktav højere.

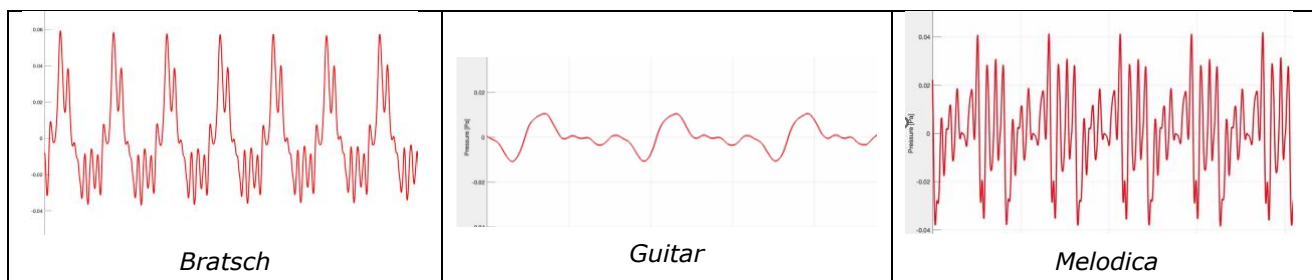


Øvelse 6.1

Sammenhængen mellem en lydbølges hastighed v (målt i m/s), bølgelængde λ (målt i m) og frekvens f (målt i Hz) er givet ved formlen: $v = f \cdot \lambda$.

- Hvis lyden ved en temperatur på $20^\circ C$ bevæger sig med en hastighed på $343 \frac{m}{s}$ gennem luften, hvad er så bølgelængden for en lydbølge svarende til kammertonen A, som har en frekvens på $f = 440 Hz$?
- Hvad er bølgelængden på overtonen A5 med $f = 880 Hz$ ved $20^\circ C$?
- Tonen C2 har ved $20^\circ C$ en bølgelængde på $65,55 cm$. Hvilken frekvens svarer det til?

I B&O filmen spiller Jakob på tre forskellige instrumenter: bratsch, guitar og melodica og viser, at hvis man slår en tone an på instrumentet, frembringes samtidigt en række toner og overtoner:



På graferne ovenfor har vi tiden på x-aksen og det af lydbølgen frembragte lufttryk op ad y-aksen. Vi kan se, at de tre bølgefunktioner er meget forskellige: melodicaen frembringer mange flere overtoner end guitareren, så når et helt symfoniorkester med en række forskellige instrumenter spiller sammen, så frembringes et meget komplekst lydbillede.

Rent matematisk kan det komplekse lydbillede fra orkesteret opfattes som en sum af mange, rene sinussvingninger, men det er ikke umiddelbart nogen let sag at analysere

sådan et lydbillede med matematik, og først i starten af 1800-tallet kom der et gennembrud på feltet.

6.2 Fouriers gennembrud

Den franske videnskabsmand Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) havde et usædvanligt spændende livsforløb. Som ung i 1790'erne var han i kølvandet på den franske revolution fængslet i Paris på grund af politisk arbejde, senere blev han løsladt og arbejdede som kejserlig, videnskabelig rådgiver for Napoleon Bonaparte og rejste med ham på felttog til Ægypten, hvor han af Napoleon blev udnævnt som fransk guvernør. I 1801 vendte Fourier tilbage i Paris, hvor han blev matematikprofessor på École Polytechnique, et af de allerbedste universiteter i Europa på daværende tidspunkt.



Frankrig er stolt af sine videnskabsmænd og -kvinder. Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), er én af de 72 franske videnskabsfolk, der har fået sit navn på Eiffeltårnet.

Hen mod slutningen af sin videnskabelige karriere arbejdede Fourier med teorier om hvad der ændrer sig, når man bringer flere legemer med forskellige starttemperaturer sammen. Som udgangspunkt benyttede Fourier sine egne eksperimentelle undersøgelser samt Newtons afkølingslov, der var blevet fremsat af Sir Isaac Newton ca. 100 år tidligere.

I forbindelse med udledningen af sin varmeledningsteori blev Fourier nødt til at analysere funktioner og differentiallyigninger, som var vanskelige at håndtere med datidens matematik. Han fik derfor den idé at approksimere de besværlige funktioner med summer af de velkendte trigonometriske funktioner $\sin(x)$ og $\cos(x)$. De trigonometriske funktioner har jo den åbenlyse fordel, at de er lette både at differentiere, integrere og anvende til ligningsløsning.

Øvelse 6.2 Afledte funktioner og stamfunktioner til $\sin$ og $\cos$

Kan du huske hvordan man differentierer og integrerer $\sin(x)$ og $\cos(x)$?

- Hvad er $\sin'(x)$ og hvad er $\cos'(x)$?
- Hvad er $\int \sin(x) dx$ og hvad er $\int \cos(x) dx$?

I 1822, samme år som han blev præsident for det franske videnskabsakademi, udgav Fourier en bog med hele sin varmeledningsteori: *Théorie analytique de la chaleur*.

Hurtigt skulle det dog vise sig, at de matematiske metoder, som Fourier havde udtænkt, kunne anvendes til meget mere end blot varmeledningsteori, for teorien bygger på, hvordan en sammensat bølge eller svingning elegant kan beskrives som en sum af forskellige trigonometriske funktioner med hver sin frekvens og amplitude, hvilket jo lige

præcis er det gennembrud, vi har brug for, for at kunne analysere komplekse lydbilleder med grundtoner og overtoner.

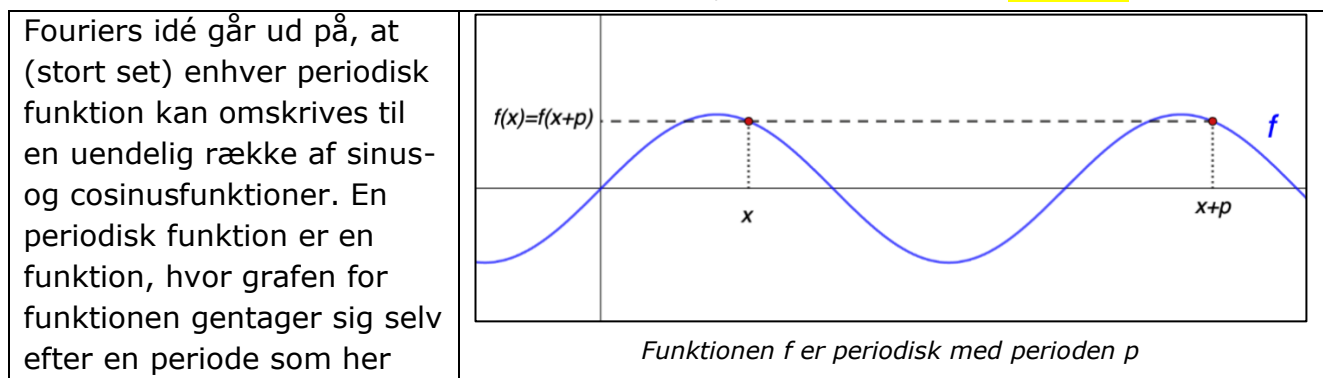
Øvelse 6.3

Som med så mange andre af 1700- og 1800-tallets videnskabsfolk var Fourier et geni på mange områder: matematik, fysik, kemi, samfundsvidenskab og religion blandt andet. I 1827 udgav han en meget berømt artikel: *Mémoire sur Les Temperatures du Globe Terrestre et Des Espaces Planétaires*, hvor han som én af de første i videnskabshistorien omtaler noget, vi taler meget om i dag.

- a) Undersøg på nettet, hvad Fouriers artikel handler om og hvorfor den blev meget berømt.

6.3 Idéen bag Fourierrækker

Start evt med at se en lille film fra UCLA om fourierrækker, som kan hentes her – [link til 6a.](#)



Periodicitet kan vi definere med formelsprog således:

Definition

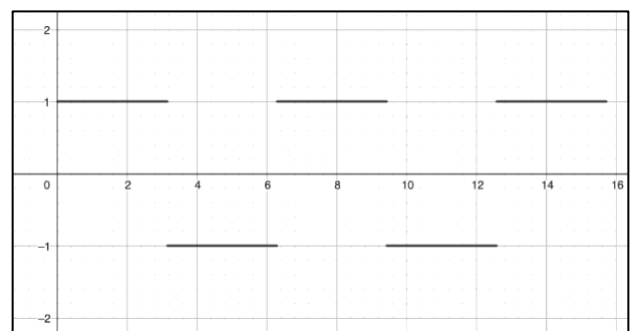
En funktion f siges at være periodisk med perioden p , hvis der gælder, at:

$$f(x + p) = f(x), \text{ for alle } x \text{ i definitionsmængden}$$

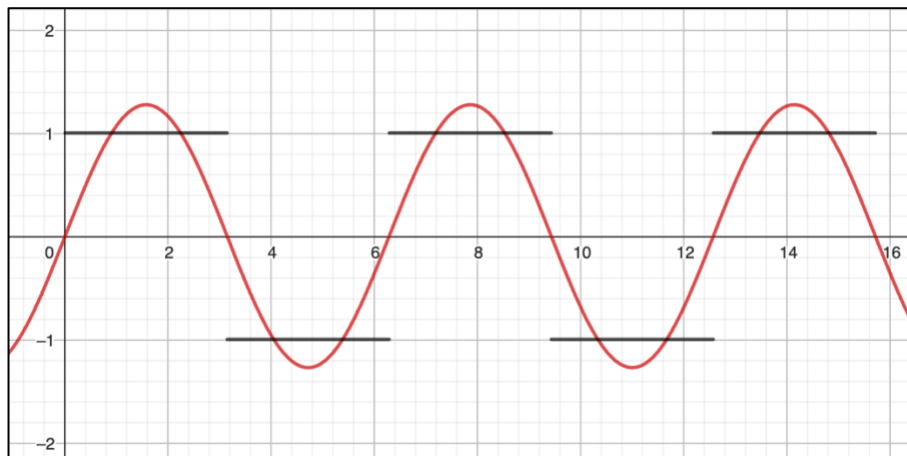
Lad os se på et par eksempler på Fouriers idé:

Firkantsignalet, du ser her, er grafen for en periodisk funktion:

Funktionsværdierne skifter mellem $+1$ og -1 således: i intervallerne $[0; \pi]$, $[2\pi; 3\pi]$, $[4\pi; 5\pi]$ osv. er funktionsværdien $+1$, og i intervallerne $[\pi; 2\pi]$, $[3\pi; 4\pi]$, $[5\pi; 6\pi]$ osv. er funktionsværdien -1 . Funktionen er altså periodisk med perioden 2π .



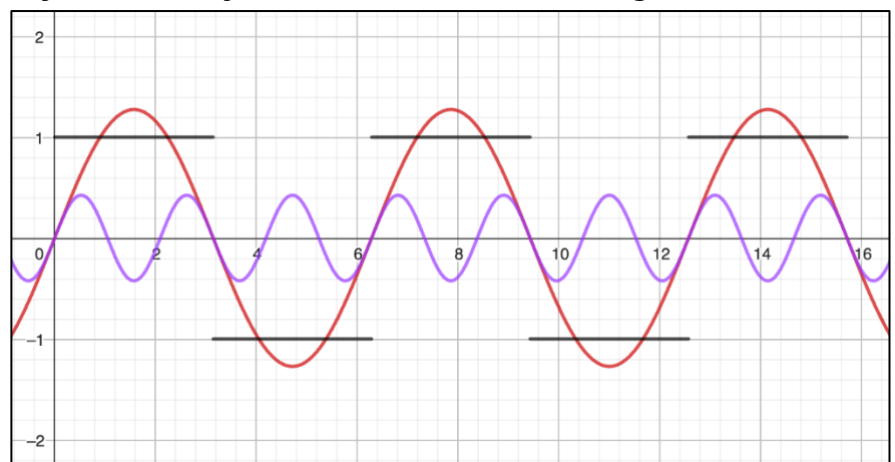
Vi tegner nu **med rødt** og i samme koordinatsystem, grafen for sinussvingningen $f_1(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin(x)$:



Vi ser der er et sammenfald mellem de to funktioner: den diskrete firkantsspænding og den kontinuerte sinuskurve har minima og maksima de samme steder. Sinuskurven er altså ret god til at approksimere firkantssignalet, men vi kan komme endnu tættere på, for den røde sinuskurve rammer jo lidt for højt i maksimumsværdierne og lidt for lavt i minimumsværdierne. Her har vi tegnet grafen for firkantssignalet sammen med funktionen

$f_1(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin(x)$ og en ny funktion $f_3(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \sin(3x)$ (med lilla):

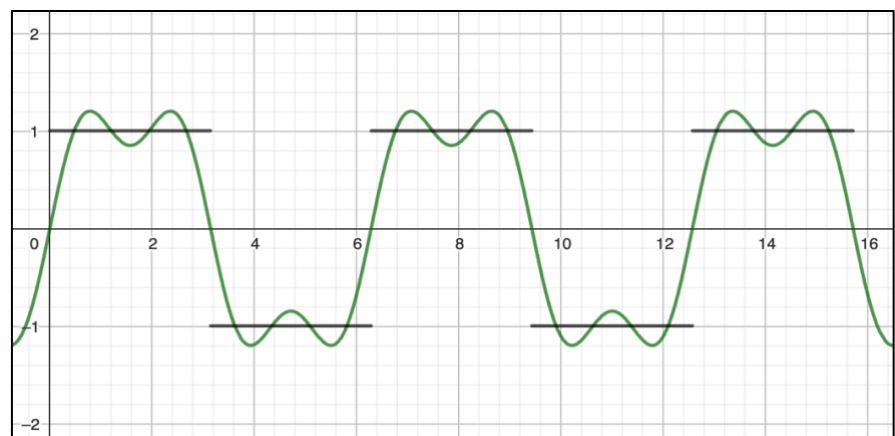
Vi kan se, at den lilla graf "kompenserer" ret godt for den røde grafs overskud og underskud mht. maksima og minima.



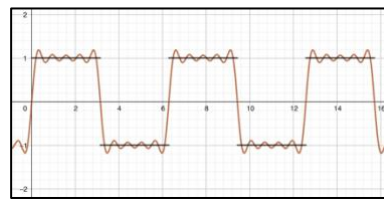
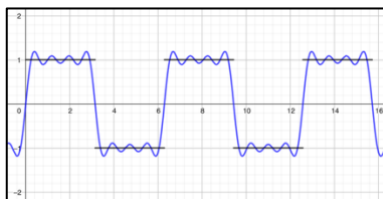
Hvad hvis vi nu lægger de to funktioner sammen?

Det giver os den **grønne graf**!

Approximationen bliver endnu bedre! Den grønne graf for $f_1(x) + f_3(x)$ rammer endnu tættere på firkantssignalet. Og således kan vi fortsætte "systemet":



kan vi fortsætte "systemet":



$$f_1(x) + f_3(x) + f_5(x)$$

$$f_1(x) + f_3(x) + f_5(x) + f_7(x)$$

$$f_1(x) + f_3(x) + f_5(x) + f_7(x) + f_9(x)$$

$$\text{hvor } f_5(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{5} \sin(5x)$$

$$\text{hvor } f_7(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{7} \sin(7x)$$

$$\text{hvor } f_9(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{9} \sin(9x)$$

Approximationen bliver bedre og bedre, for hvert led vi tilføjer. Der gælder åbenbart:

$$\text{Firkantssignalet} \approx f_1(x) + f_3(x) + f_5(x) + f_7(x) + f_9(x) + \dots, \text{ eller:}$$

$$\text{Firkantssignalet} \approx \frac{4}{\pi} \cdot \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \frac{1}{7} \sin(7x) + \frac{1}{9} \sin(9x) + \dots \right)$$

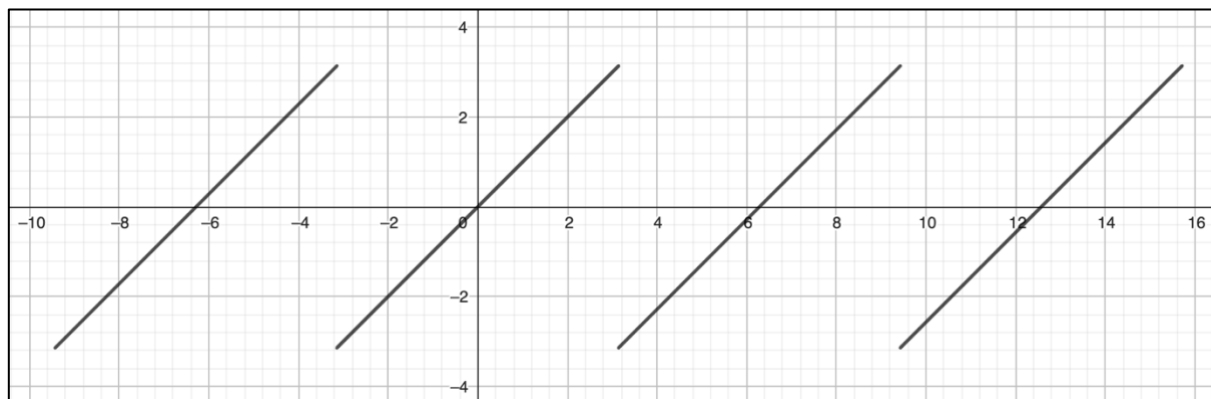
Det kan også skrives mere "kompakt" med brug af sigma-symbolet:

$$\text{Firkantssignalet} = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cdot \sin((2n-1) \cdot x)$$

Øvelse 6.4

Forklar, hvordan vi skal forstå udtrykket med sigma-tegnet ovenfor

Grafen for den såkaldte "savtak"-funktion ser således ud (hvor savtakkerne ville fremkomme, hvis man forbandt de skrå linjer med lodrette linjer):



Funktionen er åbenlyst periodisk med periode 2π . I det følgende vil vi nøjes med at se på funktionen i intervallet fra $-\pi$ til π . Kaldet vi funktionen $g(x)$, har vi altså:

$$g(x) = x, \quad x \in [-\pi; \pi]$$

Øvelse 6.5 En sum af sinusfunktioner, der tilnærmer savtak

- Tegn i et værktøjsprogram grafen for $g(x)$ i det givne interval.
- Tegn i samme koordinatsystem, grafen for $f_1(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sin(x)$.
- Tegn i samme koordinatsystem, grafen for $f_1 + f_2$, hvor $f_2(x) = -\frac{2}{\pi} \sin(2x)$.
- Tegn i samme koordinatsystem, grafen for $f_1 + f_2 + f_3$, hvor $f_3(x) = \frac{2}{\pi} \sin(3x)$.

- e) Kan du se "systemet"? Fortsæt et par gange mere.
 f) Du skal få de første led i følgende formel for tilnærmelse af savtak med en sum af sinusfunktioner:

$$\text{Savtakfunktionen} \approx \frac{2}{1} \sin(x) - \frac{2}{2} \sin(2x) + \frac{2}{3} \sin(3x) - \frac{2}{4} \sin(4x) + \dots$$

$$\text{Savtakfunktionen} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n} \sin(n \cdot x)$$

På denne hjemmeside kan du se, hvordan øvelsen er besvaret i GeoGebra:

<https://www.geogebra.org/classic/gwm8atdb>

Du kan også selv fortsætte udforskningen i en app du henter **her – link til 6b**

6.4 Definition af Fourierrækken

Vi vil her se på selve definitionen af Fourierrækken. Den lyder således:

Sætning: Fourierrækken for en funktion

Funktionen $f(x)$, der er defineret i intervallet $]-L; L]$, kan under visse betingelser (*) approksimeres med den uendelige sum:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \right)$$

hvor koefficienterne a_n og b_n er givet ved formlerne:

$$a_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{L} \cdot n \cdot x\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} \cdot n \cdot x\right) dx$$

Den uendelige sum kalder vi for funktionens *Fourierrække*.

(*) De særlige kriterier, som funktionen skal opfylde, er følgende:

- $f(x)$ skal være integrabel i intervallet
- $f(x)$ må ikke have uendeligt mange diskontinuitetspunkter i intervallet
- $f(x)$ må ikke have uendeligt mange lokale ekstrema i intervallet

Vi vil ikke komme nærmere ind på betingelserne her, men blot konstatere, at stort set alle funktioner, vi møder i gymnasiematematik, opfylder dem og derved har en Fourierrække.

Ved første øjekast virker definitionen svært tilgængelig, men lad os igen se på firkantssignalet, hvor vi jo fandt frem til:

$$\text{Firkantssignalet} \approx \frac{4}{\pi} \cdot \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3x) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5x) + \frac{1}{7} \cdot \sin(7x) + \frac{1}{9} \cdot \sin(9x) + \dots \right)$$

Eller:
$$\text{Firkantssignalet} \approx \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot n - 1} \cdot \sin((2 \cdot n - 1) \cdot x)$$

I næste øvelse, skal du vise, at dette netop er Fourierrækken for firkantsignalet.

Øvelse 6.6

Lad firkantssignalet være givet ved funktionen:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq \pi \\ -1, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

- a) Vis ud fra definitionen af Fourierrækken, at $a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) dx$
(Hint: hvad er $\cos\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right)$, når $n = 0$?)
- b) Vis, at ovenstående integral giver os, at $a_0 = 0$
(Hint: del integralet op i to delintegraler, et fra 0 til π , og et fra π til 2π)
- c) Argumentér for, at $a_n = 0$ for alle n .
- d) Vis ud fra definitionen af Fourierrækken, at $b_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(x) dx$
- e) Vis, at ovenstående integral giver os, at $b_1 = \frac{4}{\pi}$
(Hint: det integralet op i to delintegraler, et fra 0 til π , og et fra π til 2π)
- f) Vis på tilsvarende måde, at $b_2 = 0$
- g) Argumentér for, at $b_n = 0$, for alle lige n 'er.
- h) Argumentér for, at $b_n = \frac{4}{n \cdot \pi}$, når n er ulige.
- i) Vis, at man derfor får den givne Fourierrække for firkantssignalet.

Øvelse 6.7

Lad savtakssignalet være givet ved funktionen:

$$g(x) = x, -\pi \leq x \leq \pi$$

Ovenfor fandt vi frem til approksimationen:

$$\text{Savtaksfunktionen} \approx \frac{2}{1} \cdot \sin(x) - \frac{2}{2} \cdot \sin(2x) + \frac{2}{3} \cdot \sin(3x) - \frac{2}{4} \cdot \sin(4x) + \dots$$

Eller skrevet med sigma-notation:

$$\text{Savtaksfunktionen} \approx \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{2}{n} \cdot \sin(n \cdot x)$$

Herunder skal du vise, at den approksimation netop er Fourierrækken for $g(x)$:

- a) Vis, at $a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(0 \cdot x) dx = 0$
- b) Argumentér for, at $a_n = 0$ for alle n .
- c) Vis, at $b_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(1 \cdot x) dx = 2$
- d) Vis, at $b_2 = -1$
- e) Vis, at $b_3 = \frac{2}{3}$
- f) Vis, at $b_4 = -\frac{1}{2}$
- g) Argumentér for, at $b_n = -\frac{2}{n}$, for alle lige n 'er.
- h) Argumentér for, at $b_n = \frac{2}{n}$, når n er ulige.

i) Vis, at man derfor får den givne Fourierrække for firkantssignalet.

Resultatet i Øvelse 5.6 har for øvrigt en interessant applikation. Vi kom frem til, at funktionen $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq \pi \\ -1, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$ kan approksimeres med:

$$f(x) \approx \frac{4}{\pi} \cdot \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3x) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5x) + \frac{1}{7} \cdot \sin(7x) + \frac{1}{9} \cdot \sin(9x) + \dots \right)$$

Det gælder for alle x 'er, også for $x = \frac{\pi}{2}$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \approx \frac{4}{\pi} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \frac{1}{7} \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) + \frac{1}{9} \cdot \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) + \dots \right)$$

Øvelse 6.8

a) Vis, at approksimationen:

$$1 \approx \frac{4}{\pi} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \frac{1}{7} \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) + \frac{1}{9} \cdot \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) + \dots \right)$$

kan omskrives til følgende tilnærmelse af tallet π :

$$\pi \approx 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots \right)$$

b) Tjek resultatet vha. et værktøjsprogram.

Resultatet kaldes for Gregorys pi-approksimation opkaldt efter den skotske matematiker James Gregory (1638-1675)

6.5 Hvor kommer Fourierkoefficienterne fra?

I dette afsnit præsenteres ideerne i udledningen af koefficienterne i Fourierrækken, men vi gennemfører ikke hele regnearbejdet. Hvis man ønsker en mere omfattende gennemgang kan det findes [her \(link til 6c\)](#)

Det er ikke mærkeligt, at de færreste i samtiden ville godtage Fouriers påstand.

Resultatet er meget overraskende. Det virker mærkværdigt, at man kan approksimere alle mulige forskellige funktioner vha. trigonometriske funktioner. Selv hvis funktionerne er diskontinuerte og ikke-differentiable, går det faktisk an! Herunder vil vi se på, at den lidt gådefulde definition af koefficienterne a_n og b_n giver rigtig god mening:

$$a_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{L} \cdot n \cdot x\right) dx$$
$$b_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} \cdot n \cdot x\right) dx$$

Vi starter med vores definition på Fourierrækken:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \right)$$

Vi udnytter, at $L = \pi$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

Vi ganger med $\cos(mx)$ på begge sider (hvor $m \geq 1$), og integrerer fra $-\pi$ til π :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)) \right) \cdot \cos(mx) dx$$

Og omskriver højresiden lidt:

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cdot \cos(mx) dx$$

Øvelse 6.9

a) Vis nu, at $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx = 0$ for alle heltalsværdier af m .

Tilsvarende kan man vise, at:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cdot \cos(mx) dx = 0 \text{ for alle værdier af } n \text{ og } m.$$

Og man kan vise, at:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) dx = \begin{cases} \pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

Alt dette giver os, at det kun er det blå udtryk herunder, der ikke giver 0:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(mx) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cdot \cos(mx) dx$$

Og vi får:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(mx) dx = a_m \cdot \pi$$

Og hvis vi isolerer a_m :

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(mx) dx$$

Definitionen af Fourierkoefficienterne a_n giver altså rigtig god mening!

Øvelse 6.10

a) Vis på tilsvarende måde, at definitionen af koefficienterne b_n er fornuftig.

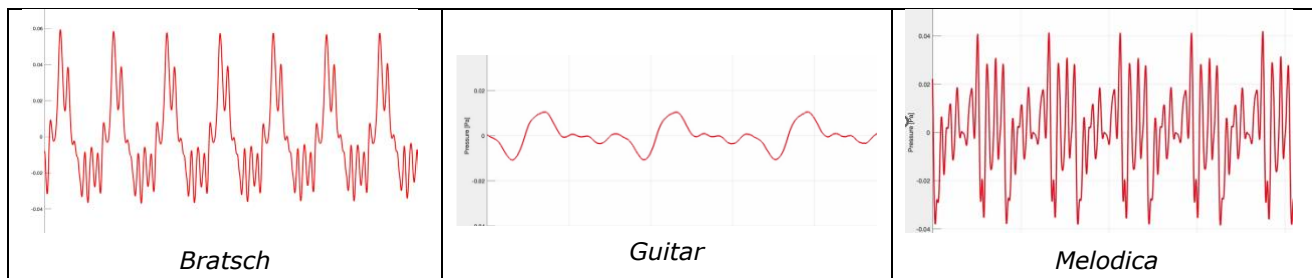
Hint: Start med definitionen på Fourierrækken:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

hvor du ganger på begge sider af lighedstegnet med $\sin(mx)$ (hvor $m \geq 1$), og integrerer fra $-\pi$ til π .

6.6 Fourieranalyse i praksis

Ovenfor har vi set på firkantssignalet og på savtaksfunktionen. I musikkens verden er det jo de færreste lydsignaler, der ser sådan ud i praksis, men vi kan stadig benytte os af Fouriers interessante idé. Det, vi er på udkig efter, er jo en metode til at opdele en kompliceret lydbølge (fra eksempelvis et symfoniorkester eller fra de nedenstående instrumenter) i dens bestanddele. Denne procedure kaldes *Fourieranalyse*.



Tricket består nu i at udtrykke ovenstående grafer vha. Fourierrækker:

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{L}\right) + b_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{L}\right) + a_2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{L}\right) + b_2 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{L}\right) + \dots$$

Derved får vi udtrykt lydsignalet som en sum af simple "rene lyde". Det n'te led i Fourierrækken af lydsignalet:

$$a_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot t}{L}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot t}{L}\right)$$

kaldes det n'te harmoniske led, og det kan faktisk omskrives til én sinussvingning, men med en faseforskydning, så den ikke nødvendigvis starter i 0. Dette leds amplitude er givet ved formlen: $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

Amplituden fortæller hvor meget det enkelte led "vægter" i det samlede lydsignal.

Øvelse 6.11

Der findes mange hjemmesider på internettet, hvor man kan optage lyd, lege med Fourieranalyse af bølger og afprøve tonegeneratorer. Prøv f.eks. følgende:

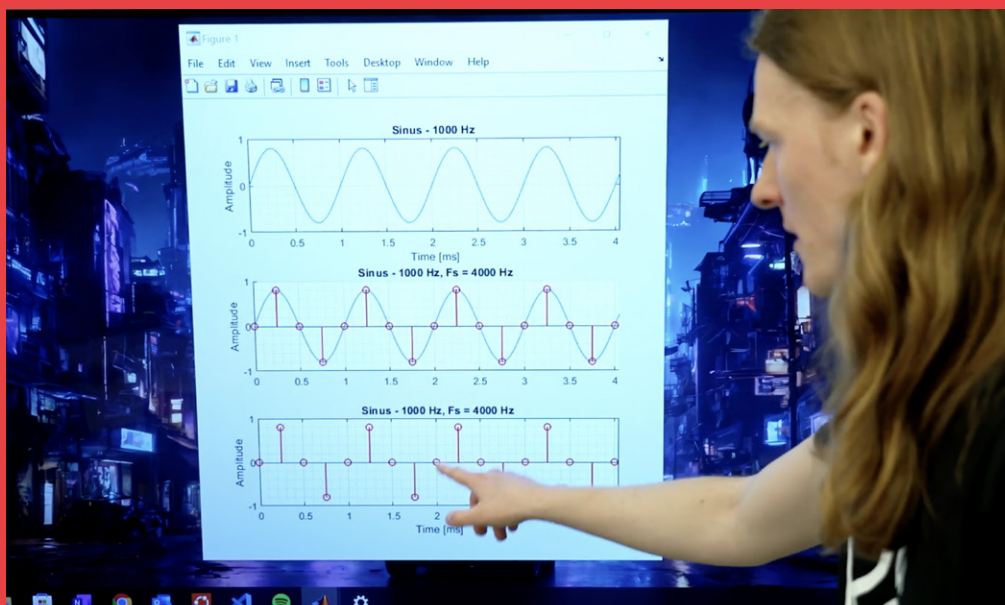
https://iwant2study.org/lookangejss/04waves_14sound/ejss_model_fouriersound/

https://phet.colorado.edu/sims/html/fourier-making-waves/latest/fourier-making-waves_all.html

<https://onlinetonegenerator.com/>

7.

Sampling og Nyquist-teoremet

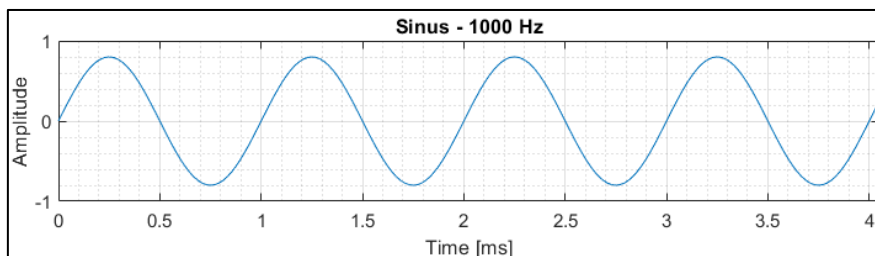


Lyd er svingninger og vibrationer i luft, som vi nemt kan modellere matematisk ved hjælp af pæne, kontinuerte sinusfunktioner. Men hvordan repræsenterer vi analoge lydbølger i den digitale verden? Hvordan kan kontinuerte funktioner gøres diskrete og omsættes til binært data? Svaret er vha. sampling. I dette kapitel kan du læse om sampling, bitdybde og om principperne bag den såkaldte Nyquist-frekvens, et kriterium, der skal sikre at vigtig information ikke går tabt i digitalisering af analoge signaler.

7. Sampling og Nyquist-teoremet

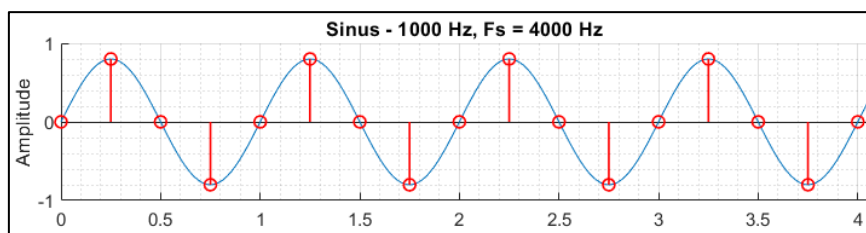
7.1 Sampling

Når en kontinuert, analog lydbølge skal transformeres til et diskret, digitalt signal, sker det vha. *sampling*. Kort fortalt går sampling ud på, at man tager nogle målinger på udsvinget af lydbølgen og gør dette med jævne mellemrum, bestemt af vores *sample-frekvens*. I B&O filmen (ca 22.13) illustrer Peter, hvordan man kan sample en sinusbølge med frekvensen $f = 1000 \text{ Hz}$. Grafisk ser bølgen således ud:

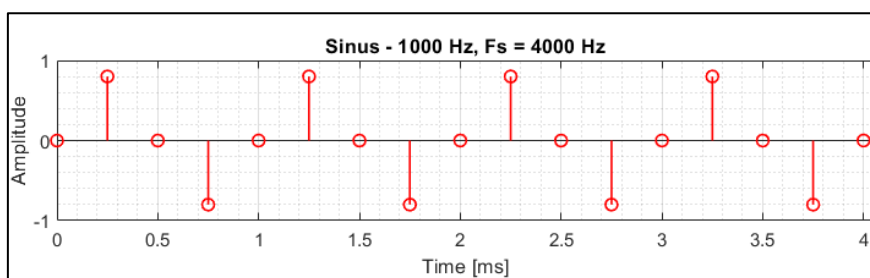


Bølgen foretager altså 1000 svingninger pr. sekund, hvilket også fremgår af grafen, da vi kan se, at den foretager præcis fire svingninger på 4 ms.

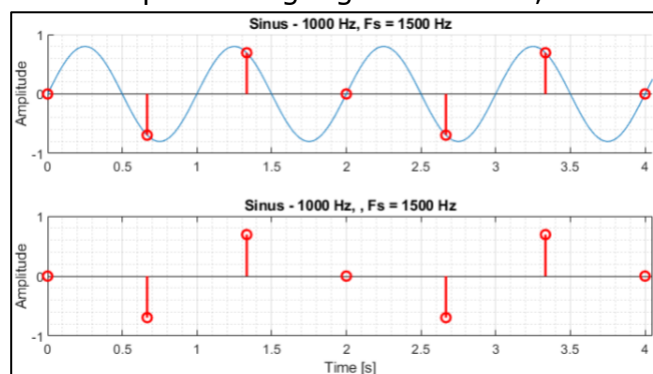
I første omgang vælger Peter en *samlingsfrekvens* (*sampler rate*) på 4000 gange i sekundet, dvs: $f_s = 4000 \text{ Hz}$.



På billedet ovenfor kan vi ud fra de røde markeringer se, hvordan funktionsværdierne på sinusgrafen " aflæses " 4 gange i hver periode, fordi *samlingsfrekvens* er 4 gange højere end sinusbølgens frekvens. Herved bliver den kontinuerte lydbølge altså reduceret til nedenstående diskrete signal.



For at spare på data kunne man også nøjes med at sample 1500 gange i sekundet, dvs. med $f_s = 1500 \text{ Hz}$. Så ville det diskrete output være således:

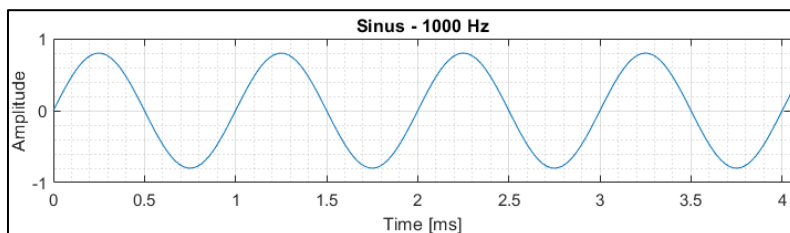


Øvelse 7.1 Samplingsinterval

- Udregn samplingsintervallerne, når frekvensen er henh. 4000 Hz og 1500 Hz.
- Kontroller på de to grafer, at der faktisk er disse intervaller mellem punkterne.

Øvelse 7.2

- Tegn outputtet, hvis du samplede sinuskurven ovenfor med $f_s = 1000\text{Hz}$.
- Tegn outputtet, hvis du samplede sinuskurven ovenfor med $f_s = 10000\text{Hz}$



Øvelse 7.3

Prøv at lytte til lydfileerne nedenfor fra B&O-filmen. [Hent dem her- Link 7a \(de tre lydfile\) - eller se filmen 25.50](#)

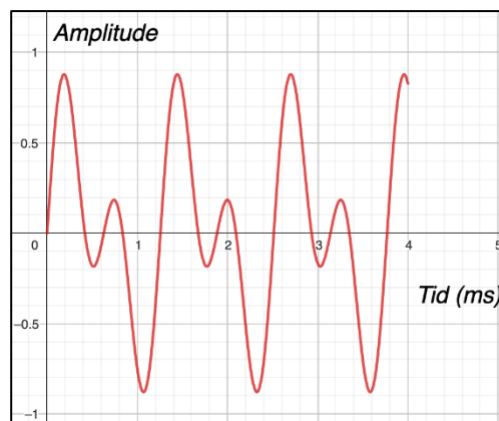
		
Original 1000 Hz sinusbølge	Sampling med $f_s = 4000\text{Hz}$	Sampling med $f_s = 1500\text{Hz}$

- Kan du høre forskel på originalen og 4000 Hz-samplingen?
- Hvorfor lyder 1500 Hz-samplingen dybere? Kan du give en forklaring ud fra samplingsgraferne?

Øvelse 7.4

Nedenfor er vist grafen for en sammensat lydbølge. Du kan finde en forstørret version af grafen som kan printes på linket her [Link 7b \(A4-print ark med bølgen\)](#).

- Hvilken frekvens har lydbølgen?
- Lav en sampling med $f_s = 2000\text{ Hz}$
- Lav en sampling med $f_s = 1000\text{ Hz}$
- Lav en sampling med $f_s = 500\text{ Hz}$
- Kommentér på din undersøgelse



7.2 Nyquist-teoremet

Som det fremgår af ovenstående, bliver kvaliteten af lydsamplingen bedre jo højere samplingsfrekvensen er, men høje samplingsfrekvenser kræver også mere dataplads, så hvor går grænsen? Hvor lav samplingsfrekvens kan man anvende uden at gå på kompromis med kvaliteten af lyden i det diskrete output?

Svaret på spørgsmålet ligger gemt i det såkaldte Nyquist-teorem:

Sætning 7.1 Nyquist-teoremet:

I en sampling skal den anvendte samplingsfrekvens være mindst dobbelt så stor som den største frekvens, der forekommer i det lydsignal, der samples.

Eller formuleret matematisk: $f_s \geq 2 \cdot f_{\max}$

I eksemplet gennemgået ovenfor fra B&O-filmen, hvor Peter samler en sinusbølge med frekvensen $f = 1000\text{ Hz}$, kunne vi høre, at en sampling med frekvensen $f_s = 4000\text{ Hz}$ gik fint, hvorimod $f_s = 1500\text{ Hz}$ gav et forvrænget lydbillede. Forklaringen er ifølge Nyquist-

teoremet helt ligetil: Den mindste værdi af samplingsfrekvens, der kan benyttes på en 1000 Hz sinusbølge, må være $f_s = 2 \cdot 1000 \text{ Hz} = 2000 \text{ Hz}$.

Øvelse 7.5



Når lydfiler digitaliseres til eksempelvis streamingtjenester som *Spotify* eller *Apple Music* eller til CD-lyd benyttes for det meste en samplingsfrekvens på $f_s = 44100 \text{ Hz} = 44,1 \text{ kHz}$.

a) Hvorfor vælger man mon $f_s = 44100 \text{ Hz} = 44,1 \text{ kHz}$?

Nyquist-teoremet er opkaldt efter den svensk-amerikanske fysiker Harry Nyquist (1889-1976), der gennem det meste af sin karriere arbejdede for *AT&T Labs* (senere *Bell Telephone Labs*) i New York, USA.

Øvelse 7.6

AT&T Labs blev stiftet tilbage i 1874 som et patentkontor for at beskytte rettighederne til Alexander Graham Bells epokegørende opfindelse.

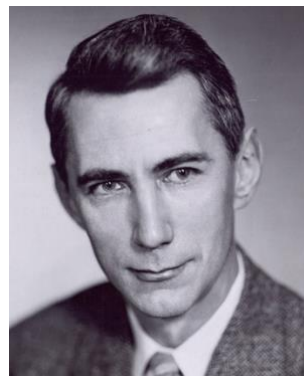
a) Undersøg på internettet, hvad Alexander Graham Bell havde opfundet. Hvornår skete det?

På *AT&T Labs* arbejdede Harry Nyquist primært med termisk støj og feedback loops i lydsignaler. I 1920'erne udgav han artiklerne "*Certain factors affecting telegraph speed*" og "*Certain topics in Telegraph Transmission Theory*", hvor han postulerede resultatet: $f_s \geq 2 \cdot f_{\max}$ ud fra egne eksperimentelle erfaringer.

Nyquist-teoremet blev først formelt bevist i 1949 af den amerikanske matematiker og opfinder Claude Shannon (1916-2001), og derfor kaldes resultatet også ofte for Nyquist-Shannon-teoremet.



Harry Nyquist (1889-1976)



Claude Shannon (1916-2001)

Beviset for teoremet er relativt avanceret, og det bygger på Fouriertransformation af bølger. Vi vil ikke komme nærmere ind på beviset her, men i Kapitel 3, kan du læse mere om Fourierrækkerne, som Fouriertransformation er en overbygning på.

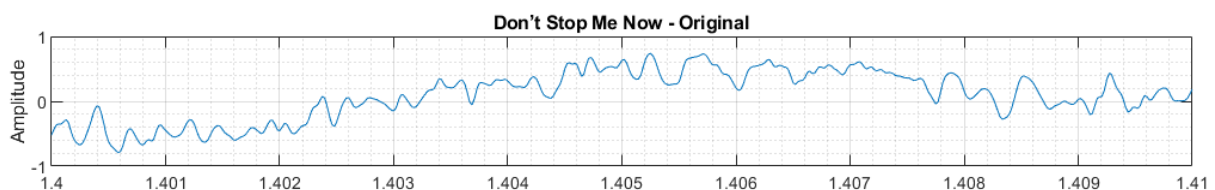
7.3 Kvantisering og bitdybde

Ud over kriteriet om at overholde Nyquistteoremet i forbindelse med sampling af kontinuerte lydsignaler er selve kvantiseringen væsentlig. For hvordan oversætter man egentlig lydsignalerne til binære data, som computeren kan bearbejde? Her spiller begrebet *bitdybde* en stor rolle. Lad os se på det eksempel, som Peter viser i B&O-filmen, en sampling af Queen-nummeret "Don't stop me now" fra albummet *Jazz*, 1978.



Bandet Queen anno 1978

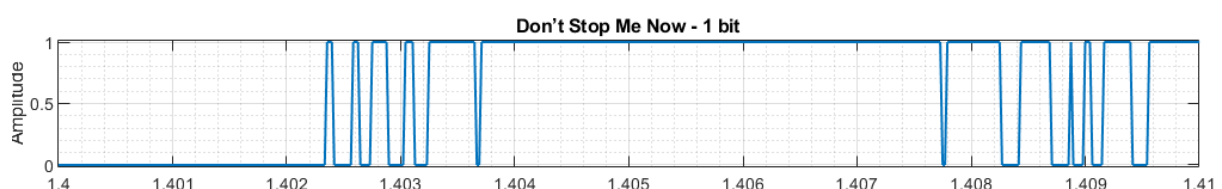
Et klip fra det originale lydspor ser således ud:



På x-aksen har vi tiden og op ad y-aksen har vi lydbølgens amplitude. Hvis der nu samples med en bitdybde på 1 bit pr. sample betyder det, at vi i praksis har 2^1 , altså to mulige binære tal til rådighed i kvantiseringen af lydbølgen: 0 eller 1. Vi opstiller derfor følgende kriterier:

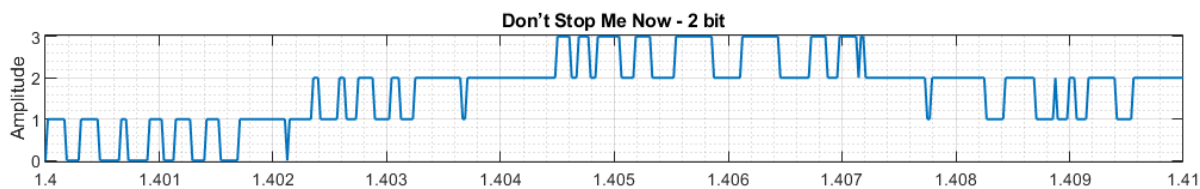
- Hvis amplituden i samplingsøjeblikket er positiv gives værdien 1, dvs. $A \geq 0$: 1
- Hvis amplituden i samplingsøjeblikket er negativ gives værdien 0, dvs. $A < 0$: 0

Det giver os følgende digitale signal:

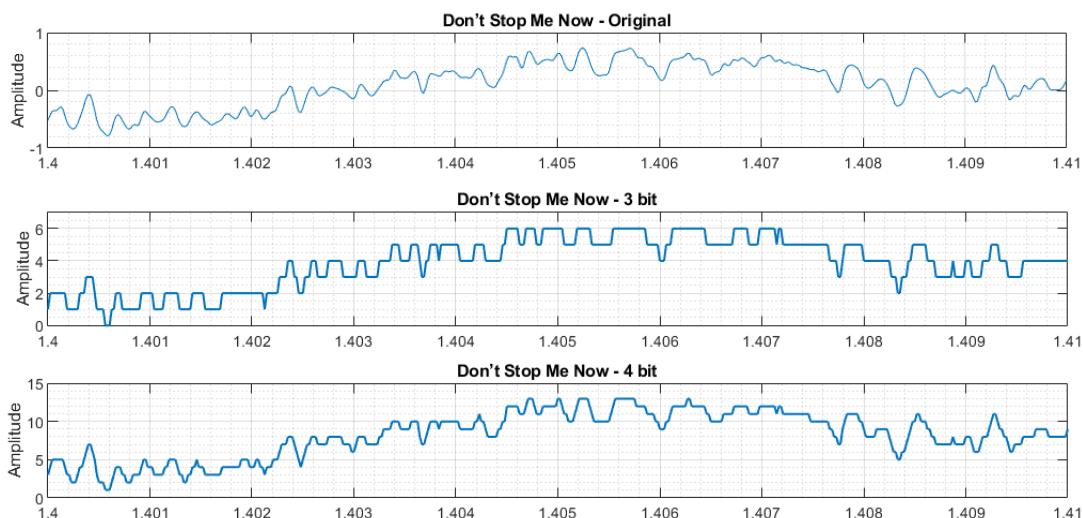


Hvis vi i stedet sampler med en bitdybde på 2 bits pr. sample betyder det i praksis 2^2 , altså fire mulige binære tal til rådighed i kvantiseringen af lydbølgen, og vi opstiller derfor fire muligheder: $0,5 \leq A < 1$, $0 \leq A < 0,5$, $-0,5 \leq A < 0$ og $-1 < A < -0,5$.

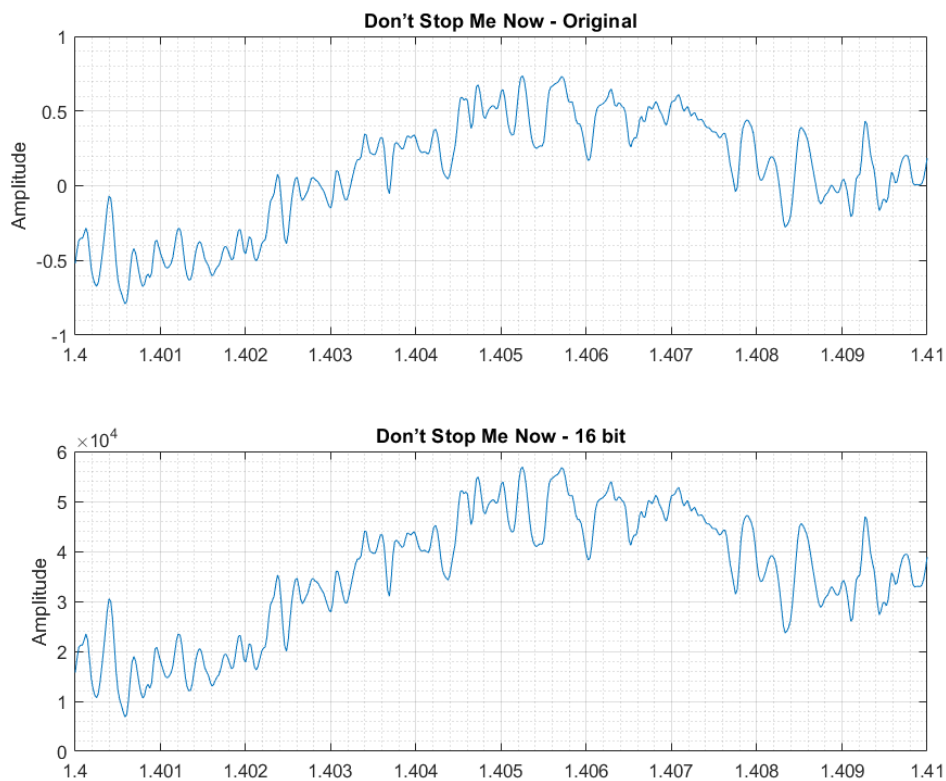
Grafisk ser det således ud:



Tilsvarende giver en sampling med bitdybde på 3 mulighed for at opdele signalet i $2^3 = 8$ forskellige værdier. En bitdybde på 4 giver 16 opdelingsmuligheder osv.

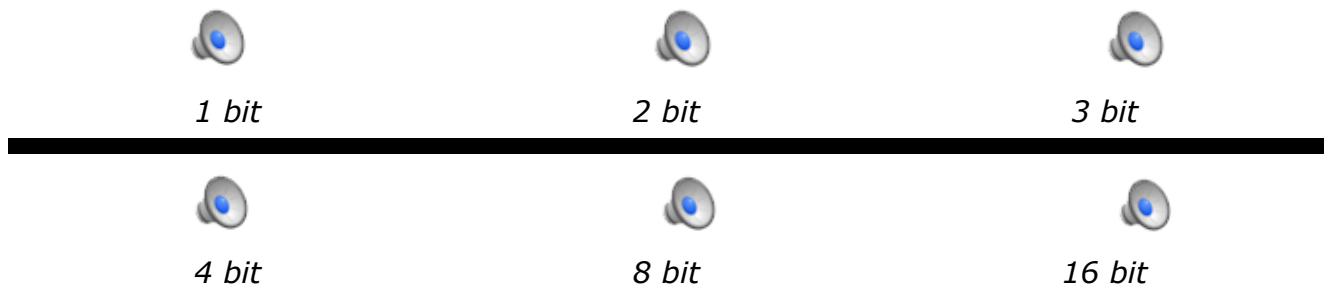


Vi kan se, hvordan det diskrete digitale signal kommer til at ligne den kontinuerte lydbølge mere og mere efterhånden som bitdybden forøges. Hvis vi sampler med en bitdybde på 16, dvs. vi opdeler i $2^{16} = 65536$ muligheder er det digitale signal næste umuligt at skelne fra det analoge:



Øvelse 7.7

Prøv at lytte til samplingen af "Don't stop me now" med forskellige bitdybder: [Hent dem her- Link 7c \(de tre lydfiler\) – eller se filmen 31.15](#)



[Link 7c \(de seks lydfiler\)](#)

a) Kan du høre støj på 16 bit optagelsen? Hvad med 8 bit? 4 bit? 2 bit?

7.4 Digital lydfilstørrelse

Størrelsen af en digital lydfil har stor betydning, når data skal sendes, streames eller distribueres. Den ukomprimerede filstørrelse S målt i MB kan beregnes vha. følgende formel:

$$S = \frac{f_s \cdot b \cdot c \cdot t}{8 \cdot 10^6}$$

hvor de øvrige inputs i formelen står for:

- Filens længde målt i sekunder, t
- Samplingsfrekvensen målt i Hz, f_s
- Bitdybden målt i bits, b
- Antal kanaler, c (mono=1, stereo=2, osv.)

Eksempelvis vil en lydfil på 3 minutter og 29 sekunder (længden af hele musiknummeret "Don't stop med now" med Queen) i ukomprimeret CD-kvalitet fylde:

$$S = \frac{f_s \cdot b \cdot c \cdot t}{8 \cdot 10^6} = \frac{44100 \text{ Hz} \cdot 16 \text{ bits} \cdot 2 \cdot (3 \cdot 60 + 29) \text{ s}}{8 \cdot 10^6 \frac{\text{bits}}{\text{MB}}} = 36,9 \text{ MB}$$

Øvelse 7.8

Kan du argumentere for formelen for filstørrelse målt i MB? Hvorfor divideres mon med $8 \cdot 10^6$?

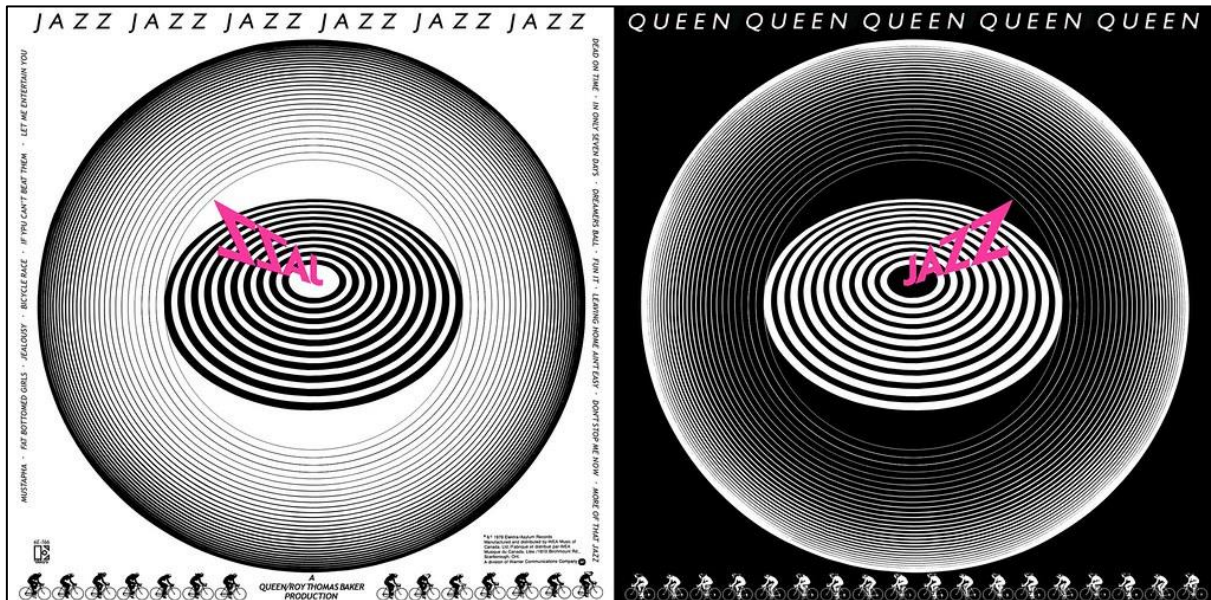
Ofte angiver man blot lydfilstørrelse i kbps (kilobits pr. sekund). CD-kvalitet svarer til:

$$S = \frac{f_s \cdot b \cdot c}{10^3} = \frac{44100 \text{ Hz} \cdot 16 \text{ bits} \cdot 2}{10^3 \frac{\text{bits}}{\text{kb}}} = 1411 \frac{\text{kb}}{\text{s}}$$

Øvelse 7.9

Kan du argumentere for formelen for filstørrelse målt i kbps? Hvorfor divideres mon med 10^3 ?

Øvelse 7.10



Hele Queen-pladen *Jazz* fra 1978 indeholder 13 sange og har en samlet spilletid på 44 minutter og 40 sekunder.

- Beregn albummets digitale filstørrelse i CD-kvalitet målt i MB.
- Beregn albummets digitale filstørrelse i CD-kvalitet målt i kbps.

Man kan også sample lydfile i såkaldt high-resolution. Det indebærer typisk en bitdybde på 24 bits og en samplingsfrekvens på 192 kHz fordelt på 11 kanaler.

- Hvor meget fylder albummet *Jazz* i High-resolution?

Øvelse 7.10

På denne hjemmeside kan du lege lidt med digitale filstørrelser, bitdybder og samplingsfrekvenser.

<https://www.colincrawley.com/audio-file-size-calculator/>

7.5 Nyquist kritiske frekvens – hvor kommer den fra?

Man kan godt ud fra alene gymnasiematematikken sætte sig ind i hvor Nyquist-frekvensen kommer fra. Der findes på dansk en tilgængelig fremstilling i Steen Albrechtsens bog *Fourieranalyse*, ED data, 1991. En af styrkerne i Steen Albrechtsens fremstilling er, at han tager udgangspunkt i et stort datamateriale, som han ønsker at opstille en model for. Det bringer os ind i Fourieranalyse, men fører naturligt til spørgsmålet: Hvad kræves der af datamaterialet og modellen, for at den gengiver det oprindelige signal korrekt. Det er udfordrende, men man belønnes også med at få stor indsigt i dette.

8.

Det binære talsystem



Ved digital kommunikation sendes beskeder som en række af bits, hvor hver bit kan være enten 0 eller 1. Dette gælder også de lydfile, som B&O arbejder med. En kort digital besked består for eksempel af de seks bits 111001. En længere besked, et musiknummer eller en spillefilm består af millioner af bits. I dette kapitel ser vi nærmere på det binære talsystem, dvs. et talsystem udelukkende baseret på tallene 0 og 1. Hvordan omregner man mellem decimaltal og binære tal? Og hvordan regner man med binære tal. Det får du svar på her.

8. Det binære talsystem

8.1 Talsystemer

Det talsystem, du kender fra matematiktimerne kaldes for 10-talssystemet eller decimalsystemet, fordi systemet er opbygget af ti forskellige cifre: 0, 1, ..., 9. Af og til omtaler man også systemet som det indiske-arabiske talsystem, da dets oprindelse kan spores tilbage til Indien ca. 300 f.Kr. I den tidligere middelalder blev 10-talssystemet via arabiske handelsmænd introduceret i Europa, hvor det gradvist i løbet nogle århundreder afløste romertallene. I dag er det verdens mest udbredte talsystem. Herunder ses 10-talsystemets ti forskellige cifre på fire forskellige sprog:

Kinesisk:	一, 二, 三, 四, 五, 六, 七, 八, 九
Khmer:	០, ១, ២, ៣, ៤, ៥, ៦, ៧, ៨, ៩
Latin:	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Persisk:	۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹

10-talssystemet er et såkaldt positionelt talsystem, hvilket betyder, at et ciffer i et tal, for eksempel 3, betyder noget forskelligt alt efter, hvilken *position* i tallet 3 har. For eksempel betyder tallet 4**3**72, at der er 4 tusinder, **3 hundreder**, 7 tiere og 2 enere:

$$4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 = 4000 + 300 + 70 + 2,$$

hvorimod tallet 47**3**2 indikerer et tal med 4 tusinder, 7 hundreder, **3 tiere** og 2 enere:

$$4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 = 4000 + 700 + 30 + 2.$$

I 10-talssystemet tælles cifferpositionerne altid fra højre mod venstre:

Position	7	6	5	4	3	2	1
Værdi	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
Tæller antal...	Millioner	Hundrede-tusinder	Titusinder	Tusinder	Hundreder	Tiere	Enere

Øvelse 8.1

Det er nok ikke tilfældigt, at lige netop tallet 10 er grundtal for verdens mest udbredte talsystem. Hvorfor mon?

Det mest kendte talsystem ud over 10-talssystemet er romertallene, som stadig benyttes i et vist omfang i dag. Romertalssystemet er ikke et positionssystem men derimod et additivt talsystem, hvilket vil sige, at værdien af et tal findes ved at lægge cifrene i tallet sammen. Cifrenes position i tallet har ingen umiddelbar betydning for værdien. I romertalssystemet benyttes kun syv forskellige cifre: I, V, X, L, C, D og M. Romertallene har den store ulempe i forhold til decimaltallene, at det er lidt besværligt at regne med dem.

Øvelse 8.2

Prøv at "oversætte" disse romertal til 10-talsystemet:

- a) VII
- b) XL
- c) LX
- d) MMXXV

Øvelse 8.3

Skriv din alder med romertal.

8.2 Det binære talsystem

Decimalsystemet har altså nogle åbenlyse fordele som talsystem i dagligdagen, men når det kommer til digital teknologi, er talsystemet lettere uhensigtsmæssigt. I computere benyttes i stedet totalssystemet, også kaldet det binære talsystem for at sikre en effektiv og pålidelig databehandling.

Den umiddelbare forklaring på dette er, at et elektrisk kredsløb har præcis to tilstande: tændt (tallet 1) eller slukket (tallet 0), dvs. enten løber der en elektrisk strøm i kredsløbet, eller også gør der ikke. Det betyder, at data som for eksempel tekster, billeder eller lyd nemt kan lagres i form af sekvenser af 0'ere og 1-taller, kaldet bits.

Det binære talsystem er ligesom decimalsystemet et positionssystem blot med kun to forskellige cifre i stedet for 10:

Position	7	6	5	4	3	2	1
Værdi	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Tæller antal...	64'ere	32'ere	16'ere	8'ere	4'ere	2'ere	1'ere

Tallet 10011 i det binære talsystem svarer altså til:

$$1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^4 = 1 + 2 + 16 = 19$$

i decimalsystemet, og tilsvarende svarer tallet 110111 til:

$$1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 = 1 + 2 + 4 + 16 + 32 = 55$$

Omvendt kan man også nemt omregne fra decimaltal til binære tal. Det gøres således:

$$\begin{aligned} 415 &= 256 + 128 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 \\ &= 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^8 \end{aligned}$$

altså det binære tal: 110011111

Endnu et eksempel:

$$200 = 128 + 64 + 8 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 = 11001000$$

Øvelse 8.4

Omskriv disse binære tal til tal fra 10-talsystemet:

- a) 10
- b) 10101
- c) 1000000
- d) 101
- e) 1111
- f) 101010

Øvelse 8.5

Omskriv disse tal fra 10-talsystemet til binære tal:

- a) 10
- b) 64
- c) 100
- d) 21
- e) 2025

8.3 Regning med binære tal

Addition

Det er relativt simpelt at regne med binære tal. Når man lægger binære tal sammen (*adderer*) gøres det således:

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 0 \text{ plus } 1 \text{ "in mente"}$$

Hvis man vil beregne $1011 + 101$ gøres det således (tal "in mente" markeret med **rød**):

$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1 \\ + 1\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 1\ 0\ \textcolor{red}{1}\ 1\ 1 \\ + 1\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 1\ \textcolor{red}{1}\ 0\ \textcolor{red}{1}\ 1\ 1 \\ + 1\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \textcolor{red}{1}\ \textcolor{red}{1}\ 0\ \textcolor{red}{1}\ 1\ 1 \\ + 1\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \textcolor{red}{1}\ \textcolor{red}{1}\ 0\ \textcolor{red}{1}\ 1\ 1 \\ + 1\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$
	0	0 0	0 0 0	1 0 0 0 0

Øvelse 8.6

Forklar regnestykket ovenfor og benyt samme metode til at udregne disse additionsstykker for binære tal:

- a) $1 + 10$
- b) $10 + 10$
- c) $100 + 10$
- d) $11 + 11$
- e) $100 + 101$
- f) $101010 + 110011$

Subtraktion

Når man trækker binære tal fra hinanden (*subtraherer*) gøres det således:

$$0 - 0 = 0$$

$$1 - 0 = 1$$

$$0 - 1 = 1 \text{ hvis vi "låner"}$$

$$1 - 1 = 0$$

Vi vil beregne $1011 - 1001$:

$\begin{array}{r} 1011 \\ - 1001 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 1011 \\ - 1001 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1011 \\ - 1001 \\ \hline 10 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1011 \\ - 1001 \\ \hline 010 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1011 \\ - 1001 \\ \hline 0010 \end{array}$
---	---	--	---	--

Det gik nemt. Hvis man får brug for at låne, bliver det lidt mere besværligt. Tag f.eks. regnestykket $1010 - 101$ (når vi "låner" markeres med **rødt**):

$\begin{array}{r} 1010 \\ - 101 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 10\textcolor{red}{1}0 \\ - 101 \\ \hline 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 10\textcolor{red}{1}0 \\ - 101 \\ \hline 01 \end{array}$	$\begin{array}{r} \textcolor{red}{1}0\textcolor{red}{1}0 \\ - 101 \\ \hline 101 \end{array}$	$\begin{array}{r} \textcolor{red}{1}0\textcolor{red}{1}0 \\ - 101 \\ \hline 0101 \end{array}$
--	---	--	--	---

Øvelse 8.7

Prøv om du kan forklare regnestykket ovenfor og benyt samme metode til at udregne disse subtraktionsstykker for binære tal:

- a) $10 - 1$
- b) $110 - 10$
- c) $100 - 11$
- d) $1100 - 111$
- e) $1000 - 101$
- f) $110011 - 101010$

Multiplikation

Multiplikation er meget simpelt med binære tal. *Den lille tabel* ser således ud:

.	0	1
0	0	0
1	0	1

Øvelse 8.8

Udregn disse multiplikationsstykker for binære tal:

- a) $1 \cdot 10$
- b) $10 \cdot 10$
- c) $100 \cdot 10$
- d) $11 \cdot 11$
- e) $100 \cdot 101$

Øvelse 8.9

Udfyld den *udvidede lille tabel* for multiplikation med binære tal:

.	0	1	10	11
0				
1				
10				
11				

Hvis man skal multiplicere to "store" binære tal med hinanden, kan det gøres på samme måde som ved multiplikation af decimaltal. Vi genopfrisker, hvordan det kan gøres med regnestykket $731 \cdot 24$:

$731 \cdot 24$	$731 \cdot 24$	$731 \cdot 24$	$731 \cdot 24$	$731 \cdot 24$
	24	24	24	24
		720	720	+720
			16800	+16800
				17544

Et eksempel med to binære tal $1001 \cdot 111$:

$1001 \cdot 111$	$1001 \cdot 111$	$1001 \cdot 111$	$1001 \cdot 111$	$1001 \cdot 111$	$1001 \cdot 111$
	111	111	111	111	111
		0000	0000	0000	+0000
			00000	00000	+00000
				111000	+111000
					111111

Øvelse 8.10

Prøv om du kan forklare regnestykket ovenfor og benyt samme metode til at udregne disse multiplikationsstykker for binære tal:

- $10 \cdot 1$
- $110 \cdot 10$
- $100 \cdot 11$
- $1100 \cdot 111$
- $1000 \cdot 101$
- $111001 \cdot 101010$

Division

Helt tilsvarende gælder, at hvis man skal dividere to "store" binære tal med hinanden, kan det gøres på samme måde som ved division af decimaltal. Der findes mange forskellige metoder til division. Kig på følgende eksempel for regnestykket

10693:17. Muligvis har du lært en anden algoritme til division i din grundskole, men så kan du bare benytte den:

10693:17	10693:17 = 6	10693:17 = 6	10693:17 = 62	10693:17 = 62	10693:17 = 629
	<u>102</u>	<u>102</u>	<u>102</u>	<u>102</u>	<u>102</u>
	4	49	49	49	49
			<u>34</u>	<u>34</u>	<u>34</u>
			15	153	153
					<u>153</u>
					0

Lad os tage et eksempel på en division med to binære tal 1110111:111:

1110111:111	1110111:111 = 1	1110111:111 = 1	1110111:111 = 1000
	<u>111</u>	<u>111</u>	<u>111</u>
	0	00	00111

1110111:111 = 10001
<u>111</u>
00111
<u>111</u>
0

Øvelse 8.11

Prøv om du kan forklare regnestykket ovenfor og benyt samme metode til at udregne disse divisionsstykker for binære tal:

- 110:10
- 1001 · 11
- 1010 · 101
- 111100 · 1111
- 11100 · 111
- 1111001 · 1011

8.4 Bits og bytes - lagring af data

Som nævnt er det oplagt at anvende det binære talsystem til digital lagring af data, fordi tallene 1 og 0 i et elektrisk kredsløb i eksempelvis en computer jo kan repræsentere om der løber strøm eller ej: 'on' eller 'off'.

Et enkelt binært ciffer kaldes for en *bit*, og en streng af 8 bits betegnes en *byte*, dvs. 1 byte = 8 bits. En byte kan med andre ord repræsentere $2^8 = 256$ forskellige tal fra tallet 0 til tallet 11111111 (255 i decimaltalssystemet). Normalt betegnes bits med *b* og bytes med *B*, så vi kan skrive, at $1b = 8B$.

Når det kommer til *bytes* afviger præfikserne kilo-, mega-, giga-, og tera- osv. fra de sædvanlige præfiksbetegnelser, som vi kender fra de naturvidenskabelige fag. Normalt betegner præfikset "kilo" tusinder, så 1 Km er 1000 m . Tilsvarende svarer mega- normalt til millioner, 10^6 , giga- svarer til milliarder 10^9 , og tera- til billioner, 10^{12} . Sådan er det ikke altid mht. datakapacitet. I computerverdenen er der nemlig en vis tradition for, at:

- $1\text{ KB} = 2^{10}\text{ bytes} = 1024\text{ B}$
- $1\text{ MB} = 2^{20}\text{ bytes} = 1,048,576\text{ B}$
- $1\text{ Gb} = 2^{30}\text{ bytes} = 1,073,741,824\text{ bytes}$
- $1\text{ Tb} = 2^{40}\text{ bytes} = 1,099,511,627,776\text{ bytes}$

Afvigelsen fra de sædvanlige præfiksbetegnelser er dog ikke så stor.

Øvelse 8.12

- Hvor mange procent afviger 1 MB fra 10^6 bytes?
- Præfikset *yotta* betyder normalt 10^{24} , men i datalagring refererer 1 YB oftest til 2^{80} bytes . Hvor mange procent afviger 1 YB fra 10^{24} bytes?

Hvor meget fylder forskellige former for data, der skal lagres digitalt? Herunder er nogle eksempler:

Standard sms uden grafik	100 B
Word-dokument på 1 side uden grafik	12 KB
Shakespeares skuespil "Romeo og Julie" i Word uden grafik	135 KB
Digitalt foto i medium opløsning	2 MB
Digitalt foto i høj opløsning	10 MB
Lydfil på 3 minutter i MP3-format	15 MB
Spillefilm i lav kvalitet	1 GB
Spillefilm 4K-kvalitet	10 GB

Øvelse 8.13

En bestemt digital version af Beethovens berømte femte symfoni fylder 219 MB.

- Hvor mange bytes er der tale om?
- Hvor mange bits, dvs. 0'er eller 1'er, svarer det til?

I Kapitel 7 i dette hæfte kan du læse mere om, hvordan man *sampler* og laver analog lyd om til digitale signaler blandt andet ved hjælp af det binære talsystem og under hensyn til det såkaldte Nyquist-theorem.

9. ANC og Filtre



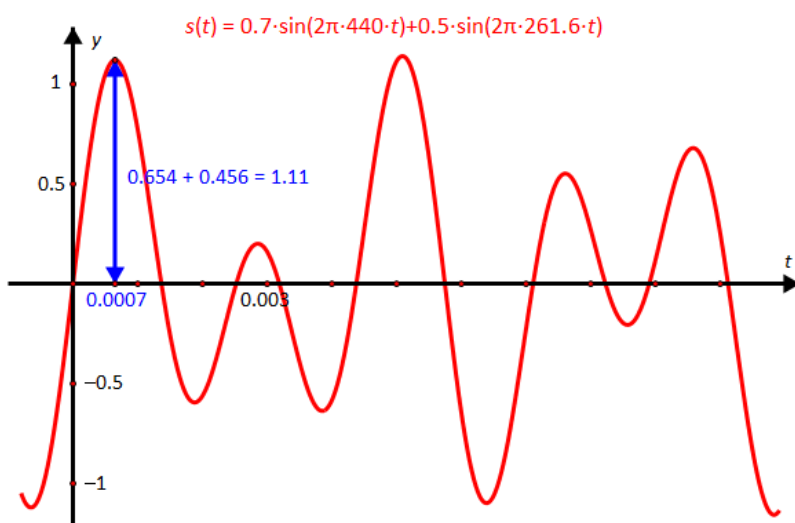
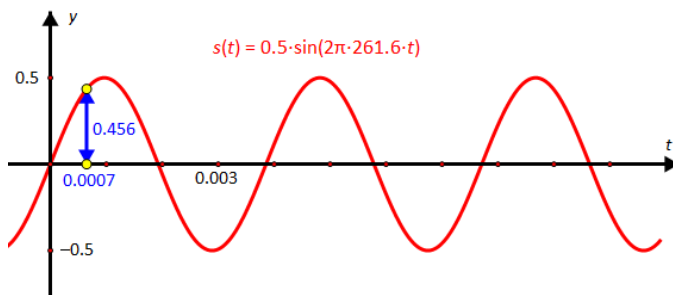
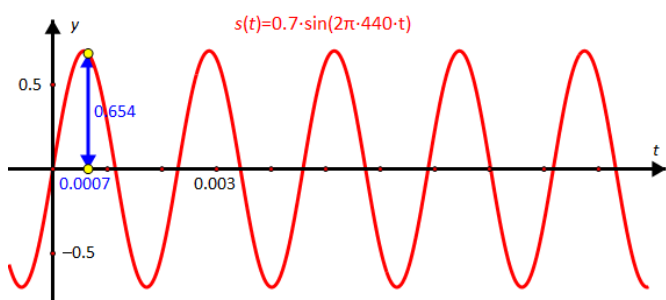
Aktiv støjreduktion kender de fleste til – men hvordan i alverden lykkes det at lukke støj ude? Faktisk ved at sende flere lydbølger ind som en slags “anti-støj”, der ophæver det uønskede. Interesserer man sig meget for musik kender man begreber filtre, specielt Low Pass og High Pass. Det er også fintuning det drejer sig om, men de matematiske principper kan vi godt forstå.

9. ANC og Filtre

9.1 Active Noise Cancelling

9.1.1 Sammensatte toner og interferens

Når to eller flere bølger befinder sig på samme sted til samme tidspunkt, så vil de påvirke hinanden, og man siger at de *interfererer*. De interferer på en sådan måde, at den samlede bølge, der frembringes, når de to bølger møder hinanden, får et udsving, der svarer til de to bølgers udsving lagt sammen (regnet med fortegn!). Dette kaldes superpositionsprincippet. Vi kan høre, at der er opstået en ny lydbølge, men tegner vi det grafiske billede ser den noget anderledes ud end en sinussvingning. På figuren ses en tone, sammensat af de to rene toner, nemlig kammertonen A, som har frekvens 440 Hz (med amplitude 0,7) og tonen C, som har en frekvens på 261,6 Hz (med amplitude på 0,5):



Den sammensatte tone kan matematisk beskrives ved en sum af de to sinusfunktioner dvs.:

$$s(t) = 0,7 \cdot \sin(2\pi \cdot 440 \cdot t) + 0,5 \cdot \sin(2\pi \cdot 261,2 \cdot t)$$

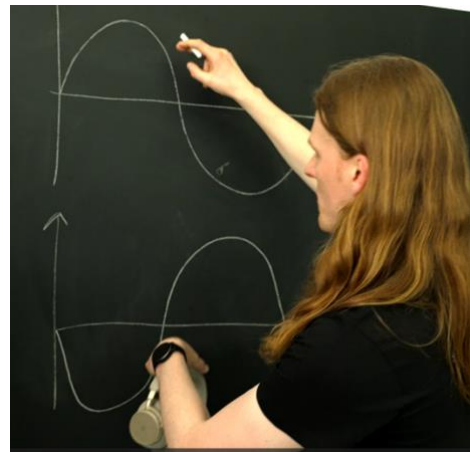
Øvelse 9.1

- Vælg to andre toner sammensæt disse, idet du anvender amplituderne 0,6 og 0,9. Frekvenserne finder du på klavertangent-oversigten fra øvelse 7.2.
- Læg en tone mere til, så der nu er tre rene svingninger – vælg selv amplituden!
- Konstruér din helt egen lyd, idet du lægger et antal toners sinuskurver sammen med passende amplituder valgt i intervallet $[0; 1]$.

Øvelse 9.2 Faseforskydning og destruktiv interferens

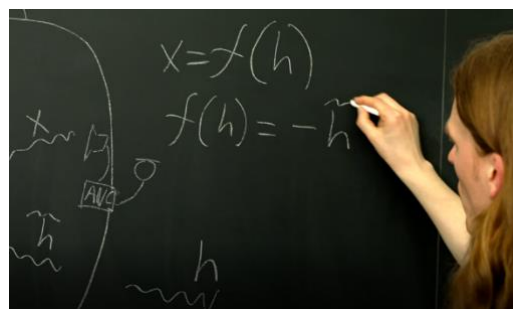
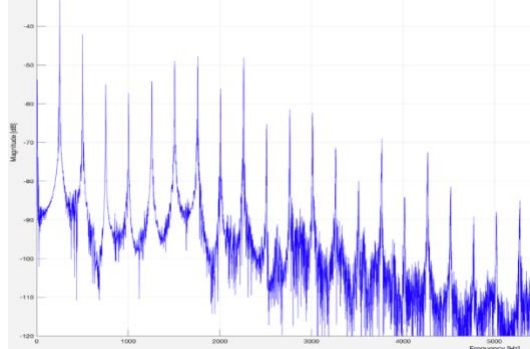
I filmen fortæller Peter om *destruktiv* interferens fra ca 36.30. Han tegner som udgangspunkt en sinusbølge, og siger dernæst, at han nu vil tegne grafen for en ny sinussvingning, der er den samme, blot faseforskydet "180 grader". 180 grader svarer i radianer til π . I kapitel 1 kan du læse om faseforskydning. Lad os som udgangspunkt sige, at Peters kurve er grafen for funktionen: $f(x) = 3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot x)$.

- Tegn grafen for $f(x)$.
- Tegn i samme koordinatsystem, grafen for en funktion $g(x)$, der er faseforskydet π radianer i forhold til f .
- Tegn i samme koordinatsystem, grafen for funktionen $f(x) + g(x)$.
- Tegn i samme koordinatsystem, grafen for funktionen $-f(x)$.
- Kommenter det du ser.



9.1.2 Implementeringen

Når uønsket støj, der i Peters gennemgang repræsenteres med funktionen h , rammer hovedtelefonerne, så filtreres noget af selve "ørekopperne", men en del slipper igennem, og repræsenteres på tegningen af $\tilde{h}$. For at kunne udnytte ideen i destruktiv interferens skal vi have støjen, dvs $\tilde{h}$ dekomponeret i alle dens enkelte dele (som alle er sinussvingninger), dvs vi skal kende alle de *uønskede* svingningers frekvenser og amplituder.



Men det kan ske ved hjælp af den teknik, som det er det, som Jakob fortæller om i filmen ca 17.00. Der er det en frekvensanalyse af en tone afspillet på en bratsch, som giver billedet her. Den teknik, som Jakob anvendte hedder *Fouriertransformation*: Den transformerer signaler, der er funktioner af tiden, til signaler, der repræsenteres af alle de frekvenser, de indeholder. På illustrationen her er det overtoner, men generelt giver

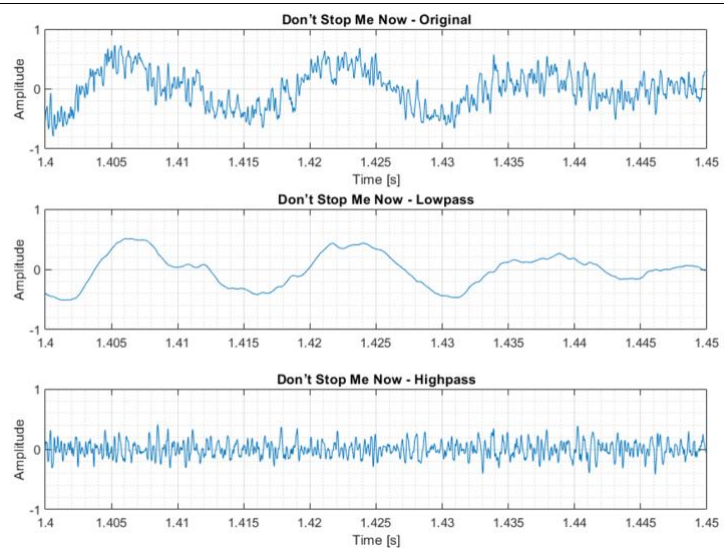
fouriertransformationen os spektret af alle de frekvenser, signalet indeholder. Og samtidig får vi amplituderne for hver – det er højden af de blå frekvenspinde.

Den software, der sidder i hovedtelefonen, dekomponerer altså i et splitsekund signalet $\tilde{h}$, og giver derved muligheder for at generere den funktion, der skal udsende $-\tilde{h}$. Der er meget at finjustere her, fx også at skabe et tids-delay, så de to signaler $\tilde{h}$ og $-\tilde{h}$ er i præcis modfase, så støjen billedligt talt destrueres af den "modstøj" vi laver. Men vi kan høre, at det fungerer.

9.2 Filtre i højtalere

9.2.1 Low Pass filter og High pass filter

Elektronisk kan man fjerne højfrekvent støj med et såkaldt **Low Pass filter**, hvor kun de lave frekvenser kommer igennem. Et Low Pass filter udnytter en matematisk teknik, der kaldes *foldning*, og som også af og til bare kaldes *smoothing* – som vi også hører Peter omtale det i filmen. Ved hjælp af denne teknik, kan vi nemlig glatte den øverste kurve, så vi får den midterste.



Hvis man i stedet vil have de hurtige svingninger, men fjerne de langsomme kan det gøres ved at trække det midterste fra det oprindelige signal. Hvis $f(t)$ er det oprindelige signal og $h(t)$ er Low Pass signalet, så er **High Pass signalet** $f(t) - h(t)$.

9.2.2 Glidende gennemsnit

Teorien for matematisk foldning, der på engelsk kaldes *convolution*, har vi præsenteret nærmere i undervisningsmaterialerne til 3Shape: *Matematikken bag moderne dentalteknologi*. Her i dette afsnit vil vi se på den specielle teknik indenfor foldningsteorien, der kaldes glidende gennemsnit (eng: *moving average*). Selv om foldningsteorien er ret avanceret matematik, så kan denne specielle del godt forstås på gymnasieniveau.

Lad os illustrere det med et eksempel vi kan regne på – i hånden faktisk! Eller man kan tage sit værktøjsprogram i brug.

Øvelse 9.3 En undersøgelse på en model "der ligner"

Vi betragter funktionen $s(x) = \cos\left(\frac{\pi}{10}x\right) + \frac{1}{3}\cos(2\pi x)$.

a) Tegn først graferne for de to funktioner hver for sig i samme koordinatsystem, med $x \in [0; 40]$.

b) Angiv amplituderne for de to særskilte funktioner.

c) Frekvensen f , der er *antal* hele svingninger pr sekund, er let at aflæse, når funktioner er skrevet på formen:

$$p(x) = \cos(2\pi \cdot f \cdot x)$$

Hvad er frekvensen for de to funktioner?

d) Svingningstiden er den *tid* det tager at gennemløbe en hel periode. Kender vi frekvensen er det letteste ofte at bestemme svingningstiden T ud fra formelen:

$$T = \frac{1}{f} \quad \text{eller} \quad f = \frac{1}{T}$$

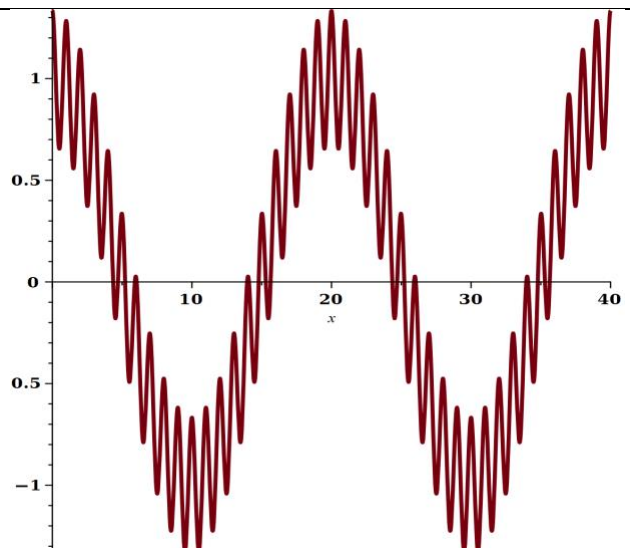
Argumenter for denne formel, ved at anvende definitionerne på f og T .

e) Hvad er svingningstiden for de to funktioner?

f) Tegn nu grafen for

$$s(x) = \cos\left(\frac{\pi}{10}x\right) + \frac{1}{3}\cos(2\pi x)$$

Du skal få noget der ligner denne.



Der er et vist slægtskab mellem formen som denne graf har, og grafen over det lille stykke fra Queen. Forskellene er mange, men ikke mindst, at vi her har en forskrift, det har vi selvfølgelig ikke med Queen. Men vi undersøger $s(x)$, fordi det kan give en ide til, hvordan man kan konstruere det omtalte Low Pass filter.

Vi kender alle gennemsnit af diskrete værdier. Vi vil nu gennemføre en øvelse, der giver os en første fornemmelse af, hvad glidende gennemsnit er – og hvad det kan.

Øvelse 9.4 Glidende gennemsnit af diskrete værdier

Vi har følgende dataværdier, stillet op i et sildeben. Data ligger i **et excelark, du kan hente her (link til 9a)**. I arket finder du også facit til nogle af spørgsmålene

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y	6,5	5,9	6,1	4,9	7,2	5,8	6,3	4,8	7,1	5,7	5,2	6,4	5,8	6,0

a) Kopier data ind i et regneark og frembring en graf, hvor punkterne er forbundet.

b) Udregn middelværdi og spredning (standard-deviation) af dataværdierne

(Du skal få henh. 5.9786 og 0,6878)

c) Et glidende gennemsnit med tre dataværdier af gangen udregnes ved at tage gennemsnittet af en given y -værdi og dens to naboer, fx $\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$. Den tilhørende x -værdi er x_2 . Udnyt regnearkets faciliteter til at udregne og udfylde dette:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y						6,43								

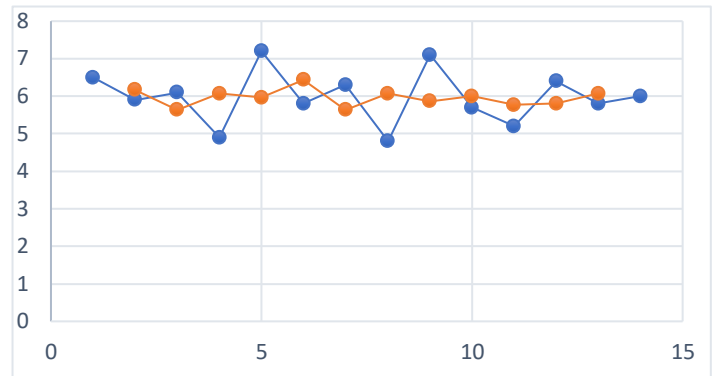
Som kontrol er indsat en af de værdier du skal få.

d) Udregn middelværdi og spredning af disse dataværdier. *Du skal få: 5,956 og 0,221.*

e) Frembring en graf af disse data i samme koordinatsystem som den oprindelige graf.

Du skal få noget der ligner dette:

f) Kommenter resultaterne i d) og e).



Det umiddelbare indtryk af øvelsen ovenfor er, at grafen gattes ud. Det kan også udtrykkes ved at sige, at

gennemsnittet er stort set uændret, men spredningen er betydeligt mindre.

Når det hedder "glidende gennemsnit" er det fordi *udvælgelsen* af de tre værdier vi beregner gennemsnit af, glider hen over datasættet.

Tre er ikke et helligt tal her, man kunne i stedet vælge 5.

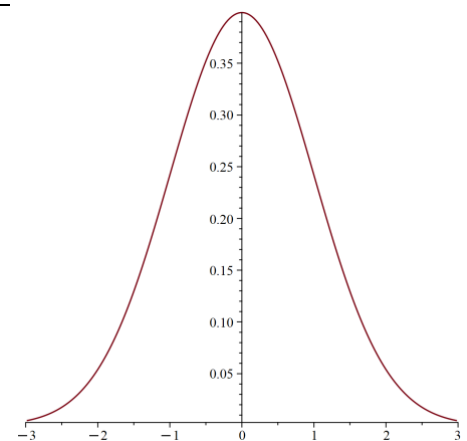
Men man vælger ofte i stedet at beregne *vægtede gennemsnit*.

9.2.3 Glidende gennemsnit med Gaussisk vægtning

I et vægtet gennemsnit eller vejet gennemsnit, kan man i og for sig lægge de vægte på dataværdierne, som man erfaringsmæssigt ved, giver de bedste resultater, her mht udglatning. I lyd- og billedbehandling vil man ofte vægte med en Gaussisk funktion. Vi anvender her standardnormalfordelingen:

$$f(x) = 0.3989 \cdot \exp(-0.50 \cdot x^2),$$

hvis graf du ser her. Funktionen er defineret i $[-\infty; +\infty]$, men udenfor tre gange spredningen fader den betydeligt ud.



Vi vil nu anvende disse funktionsværdier som vægte:

$$f(0) = 0,3989, \quad f(-1) = f(1) = 0,24197, \quad f(-2) = f(2) = 0,05399$$

Det Gaussiske glidende gennemsnit beregnes ud fra 5 dataværdier ad gangen, nemlig en given dataværdi og så dennes fire naboer, to til hver side. Hver dataværdi tillægges her de omtalte vægte, så eksempelvis værdien knyttet til x_5 udregnes således:

$$f(-2) \cdot y_3 + f(-1) \cdot y_4 + f(0) \cdot y_5 + f(1) \cdot y_6 + f(2) \cdot y_7$$

Ovenfor dividerede vi med 3. Hvorfor skal vi ikke dividere med 5 her?

(**Hint:** Prøv at udregne summen af de 5 vægte, dvs de 5 funktionsværdier)

Øvelse 9.5 De Gaussiske værdier og de binære tal

Computere foretager udregninger med binære tal, og vil ikke være specielt tilfredse med de funktionsværdiers decimalformer, som angivet ovenfor.

- a) Prøv at omskrive følgende brøker til decimaltal: $\frac{7}{128}$, $\frac{32}{128}$, $\frac{50}{128}$, og sammenlign med de 5 funktionsværdier.
- b) Hvad kan være fordelene ved at have en nævner som 128?

Øvelse 9.6 Fortsættelse af øvelse 9.4 med Gaussisk vægtning

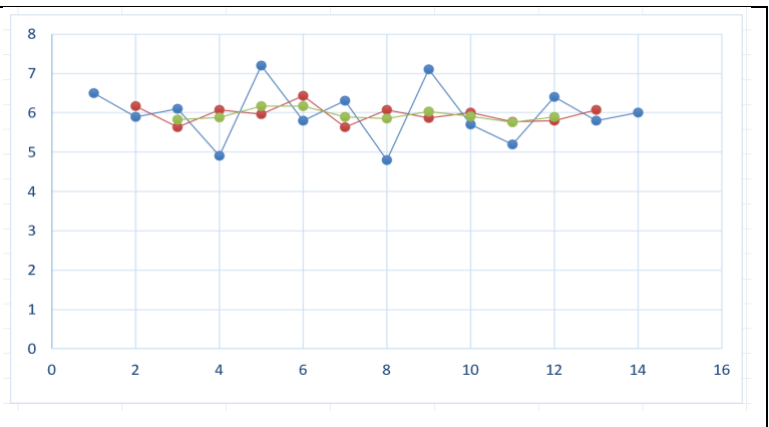
- a) Vend tilbage til det regneark, du arbejdede med i øvelse 9.4, og indsæt nu en ny kolonne, hvor du skal udregne et vægtet gennemsnit, og *her med de Gaussiske vægte*, i den tilnærmede form, som vi fandt i øvelse 9.5. Dvs. den nye kolonne skal udregne dataværdier ud fra denne formel: $\frac{1}{128} \cdot (7 \cdot y_3 + 32 \cdot y_2 + 50 \cdot y_3 + 32 \cdot y_4 + 7 \cdot y_5)$. Udnyt igen regnearkets faciliteter til at udfylde dette sildeben:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y								5,85						

Som kontrol er indsat en af de værdier du skal få.

- b) Udregn middelværdi og spredning af disse dataværdier. *Du skal få: 5,939 og 0,131.*

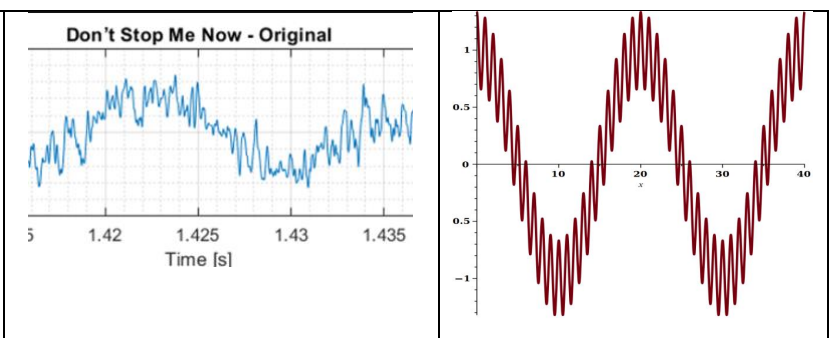
- e) Frembring en graf af disse data i samme koordinatsystem som de to øvrige grafer. Du skal få noget der ligner dette, afhængig af det værktøj, du anvender. Den blå er de oprindelige data, den røde det uvægtede og den grønne det vægtede glidende gennemsnit.



- f) Kommenter resultaterne i d) og e)

Vi vil nu udnytte erfaringerne fra øvelserne med de små tabeller ovenfor i en undersøgelse af funktionen $s(x)$ fra øvelse 9.3. Planen er følgende:

Vi vil repræsentere grafen med en række datapunkter, og så "glemme" hvad vi ved om forskriften og udelukkende anvende datapunkterne. Det kan vi nemlig tilsvarende gøre med grafen over Queens musik.



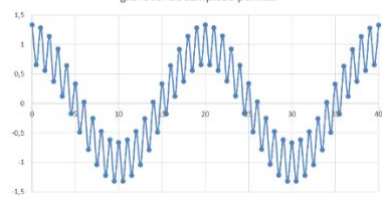
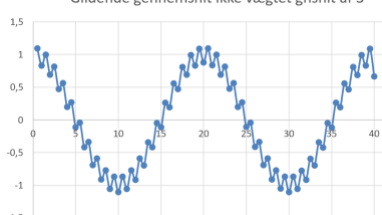
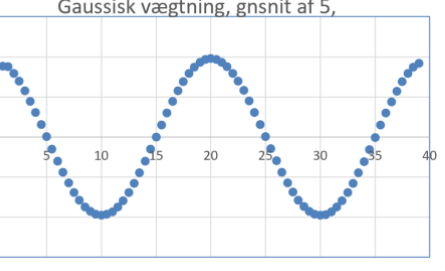
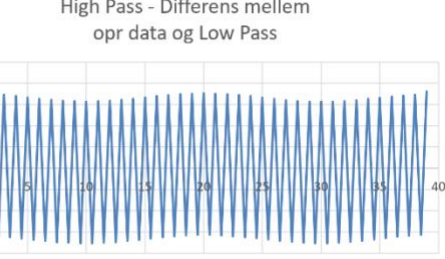
Og så vil vi forsøge at udglatte grafen ved hjælp af glidende gennemsnit med Gaussisk vægtning. Når vi vælger at øve os på en graf som $s(x)$, er det fordi vi her kan kontrollere, hvor godt resultatet er, da vi jo ved, hvad forskriften er.

$s(x)$ består af to funktioner, hvor den største frekvens er 1. Vi vil derfor lave en sampling med en frekvens på 2 – det er kravet i Nyquist teoremet. En frekvens på 2 svarer til et samplingsinterval på $\frac{1}{2}$. Dvs. vores datapunkters x -værdier og y -værdier er:

$\{0, 0.5, 1, 1.5, 2, \dots, 39, 39.5, 40\}$

og $\{s(0), s(0.5), s(1), s(1.5), s(2), \dots, s(39), s(39.5), s(40)\}$

Øvelse 9.7 Udglatning af en graf med mange udsving

a) Opret i et regneark to søjler med disse x- og y-værdier. b) Tegn en graf over disse datapunkter, hvor punkterne forbindes. Det ligner det oprindelige billede og er en kontrol på, at vi har de korrekte datapunkter	
c) Udregn nu først et glidende gennemsnit over 3 værdier og uden vægtning – ligesom i øvelse 9.4. Tegn grafen – du skal få noget som dette. Der er sket en vis udjævning, men ikke tilfredsstillende	
d) Udregn dernæst det glidende gennemsnit med Gaussisk vægtning og over 5 værdier. Tegn grafen – du skal få noget som dette. Vi ser nu, at kurven er helt udglattet – som Peter demonstrerede med Low Pass filteret.	
e) Hvad så med High Pass filteret? Hele signalet må jo være summen af Low Pass og High Pass. Så High Pass filteret må være differensen mellem oprindelige signal og Low Pass. Udregn disse dataværdier og tegn grafen. Du skal få noget som dette.	

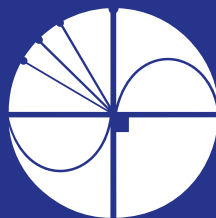
Rent matematisk kan vi altså skille de langsomme svingninger fra de hurtige, også når vi ikke kender en matematisk forskrift. Læg mærke til, at vi ikke udnyttede forskriften for $s(x)$ til andet end at generere datapunkterne.

Projektet **Træk virksomhederne ind i undervisningen** fortæller, hvordan matematik er uundværlig for avancerede virksomheder i et moderne samfund. I filmene besøger Casper, Anton og Nicoline 12 forskellige virksomheder og lærer noget om den matematik, de anvender.

Casper, Anton og Nicoline møder ansatte, der er med helt i front af det matematiske arbejde: statistikere, ingeniører, matematik-økonomer, epidemiologer m.fl. Alle har uddannelser med et betydelig matematisk indhold.

Til hver film kan du downloade undervisningsmaterialer. Her finder du øvelser, opgaveforløb, projekter og oplæg til studieretningsprojekter. Materialerne er opdelt i tre niveauer af sværhedsgrad fra 9 kl til 3 g. Emnerne er inspireret af filmen om virksomheden og den anvendte matematik, men man kan arbejde med materialet uden at have filmen kørende.

Hæftet om Matematikken bag den store lyd hos B&O knytter sig til filmen af samme navn.



**matematik
i arbejde**