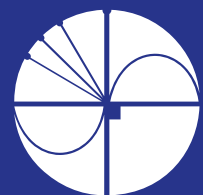
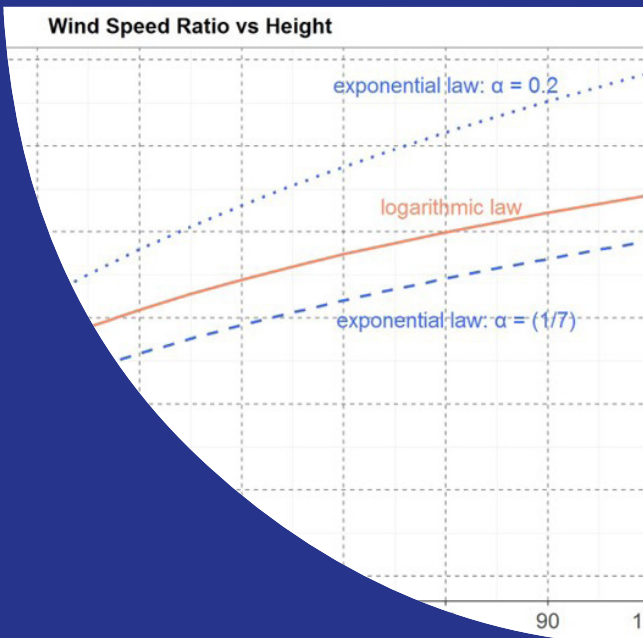


Matematikken bag vindenergi hos Vestas



Matematikken bag vindenergi hos Vestas

Undervisnings og Projektmaterialer
til filmen

Bjørn Grøn (red.), Per Rosenqvist og
Mads Peter Steenstrup

© 2020 Konceptet: *Træk virksomhederne ind i undervisningen* tilhører forfatterne til lærebogssystemet *Hvad er matematik?* Bjørn Grøn, Bodil Bruun og Olav Lyndrup.
© 2025 undervisningsmaterialer til filmen *Matematikken bag vindenergi hos Vestas* er produceret af HEM – Produktion og Formidling.

Grafisk koncept: Ulla Korgaard, Designeriet.

Filmene og de tilhørende projektmaterialer hostes af Lindhardt og Ringhof / Praxis på websitet: [Træk virksomhederne ind i undervisningen \(praxis.dk\)](https://praxis.dk)

Filmene og de tilhørende projektmaterialer kan frit downloades og anvendes til selvstudium og i undervisningen. Hverken film eller projektmaterialer må gøres til genstand for kommerciel udnyttelse. Henvendelser om materialerne kan rettes til Bjørn Grøn: bjgro1@gmail.com.

Undervisningsmaterialer til filmen *Matematikken bag vindenergi hos Vestas*.

Forfattere: Bjørn Grøn (red.), Per Rosenqvist og Mads Peter Steenstrup

Vi har forsøgt at finde eventuelle rettighedsindehavere, som kan tilkomme honorar i henhold til loven om op-havsret. Skulle der mod forventning være rettighedsindehavere, som måtte have krav på vederlag, vil dette blive håndteret, som om der var indgået en aftale.

Projektet *Træk virksomhederne ind i undervisningen* er forankret på Rysensteen Gymnasium. Film og tilhørende materialer er produceret med støtte fra Novo Nordisk Fonden

Indholdsfortegnelse

0. Indledning	7
1. Udnyttelse af Vindenergi gennem historien	8
1.1 Poul la Cour og den danske vindmølletradition	9
1.2 Sugningsteorien og stødteorien	10
2. Skalering	13
3. Hvor meget energi kan vi høste – Betz lov uden differentialregning	16
3.1 Udledning af Betz lov	19
<i>Tredjegradspolynomiers symmetriegenskaber</i>	21
4. Vindhastighed, højde og ruhed	23
4.1 Vindmøller, størrelse og effekt	24
4.1.1 Model for vindhastighed	24
4.1.2 Vindhastighed og effekt	28
5. Hvor meget energi kan vi høste - Betz lov med brug af differentialregning	30
5.1 Udledning af Betz lov	32
6. Hvorfor blæser det – hvor blæser det	35
6.1 Opdrift og hvorfor varm luft stiger til vejrs	36
6.1.1 Hvorfor stiger varm luft op?	37
6.2 Det primære vindsystem	38
6.2.1 Ved ækvator	38
6.2.2 Hadley- og Ferrellcellerne	39
6.2.3 Coriolisafbøjning	39
6.2.4 Polarområderne	40
6.3 Hyppigheden af de forskellige vindhastigheder	40
<i>Projektoplæg del 1 om vind og Weibull-fordelingen</i>	42
6.3.1 Vindhastighed og energi – gennemsnitlig effekt	44
<i>Middelhastigheden</i>	44
<i>Middelværdier for funktioner af den stokastiske variabel</i>	44
<i>Varians og spredning</i>	45
6.3.2 Luftens energi- og effektstrøm	46
<i>Projektoplæg om vind og Weibull-fordelingen</i>	47
7. Hvorfor drejer vingerne rundt – aerodynamik og vingedesign	48
7.1 Kraftmoment og impulsmoment	50
7.2 Rotation om en fast akse - Inertimoment	53
7.3 Kræfter på mølletårnet ved nedbremsning af rotoren	56
7.3.1 Rotationsenergi – hvordan overføres vindens energi til rotationsenergi af vingerne?	57
7.4 Tryk og trykgradientkræfter – hvorfor drejer vingerne rundt?	59
7.4.1 Angrebsvinklen	59
7.4.2 Bernoullis lov	61
<i>Projekt Autentiske data fra vinge i vindtunnel med forskellige angrebsvinkler</i>	63
<i>Numerisk integration af kræfterne på vingen</i>	65
<i>Datasættene</i>	65
<i>Trapezintegration</i>	68
7.5 Aerodynamik og vingedesign	72
7.5.1 Vindhastigheder set fra forskellige koordinatsystemer – Galileitransformationen	72

8. Elektromagnetisme, jævnstrøm, vekselstrøm, og højspænding..... 75

8.1 Elektromagnetisme	76
<i>H.C. Ørsteds opdagelse af elektromagnetisme</i>	<i>76</i>
<i>Simulation af Induktion</i>	<i>76</i>
<i>Forslag til eksperimenter</i>	<i>77</i>
<i>Generator</i>	<i>77</i>
<i>Forslag til eksperimenter</i>	<i>78</i>
<i>Transformation kvalitativt</i>	<i>78</i>
8.2 Magnetisk Flux og Faradays Induktionslov	79
8.2.1 Magnetisk Flux (Φ_B)	79
8.2.2 Faradays Induktionslov	80
8.3 Transformatorer og transformation	81
8.3.1 Hvordan bestemmer vi spændingerne?	81
8.3.2 Hvordan bestemmer vi strømmen?	82
8.4 Jævnstrøm og vekselstrøm, almindelig og højspænding	83
8.4.1 Effekten i vekselstrøm	83
<i>Modellering af vekselstrøm og beregning af effekt</i>	<i>83</i>
<i>Strøm i hjemmet</i>	<i>85</i>
<i>Gennemsnit virker ikke</i>	<i>85</i>
<i>RMS spænding</i>	<i>85</i>
8.4.2 Hvordan genererer strømmens to faser	85
8.4.3 Hvordan genererer strømmens tre faser	86
8.4.4 Transformering af vekselstrøm	86
<i>Anvendelse af transformere</i>	<i>87</i>
<i>Effekt og energitab</i>	<i>87</i>
8.4.5 Energitab og transmission	87

9. Priser og data..... 89

10. Støj fra vindmøller..... 92

10.1 Lydintensitet og lydstyrke	93
10.1.1 Decibelskalaen – Hvorfor bruger vi den?	93
10.2 Afstandskvadratloven	95
10.2.1 Afstandskvadratloven – en fysisk antagelse	95
<i>Ekperiment: Afstandskvadratloven for lydstyrke?</i>	<i>96</i>
<i>Ekperiment Afstandskvadratloven for lyd igen – også selvom du ikke har lavet forsøget</i>	<i>98</i>
10.2.2 Addition af støj	98
<i>Projektskitse/SRP: Støj fra vindmølleparker</i>	<i>99</i>

0. Indledning

I projektet *Træk virksomhederne ind i undervisningen* bliver der produceret 12 film med tilhørende undervisningsmaterialer til hver film. Det foreliggende er skrevet i tilknytning til filmen **Matematikken bag vindenergi hos Vestas**. Enkelte steder opfordres til at se korte sekvenser i filmen, men hovedparten af materialet kan sagtens anvendes uafhængigt af filmen. Så man behøver ikke have filmen kørende, mens man arbejder med de matematiske problemer.

Materialet er opdelt i en række kapitler, der kan gennemgås hver for sig. Det enkelte kapitel bygger således ikke på de foregående. Med symboler er det markeret, at dette kapitel eller afsnit kan man arbejde med, når man er på pågældende niveau. Man kan naturligvis også have glæde af at se et stof på nye måder, selv om man selv nu befinder sig på et lidt højere niveau. Og man kan prøve at udfordre sig selv ved at gå i krig med et emne og øvelser, der er markeret til et højere niveau end ens eget. Niveauerne er markeret med symbolerne:

 9. klasse og 1.g	 Slut 1.g og 2.g	 3.g
---	--	--

Gå selv på opdagelse: Du vil finde mange forslag til mindre projekter som afleveringsopgaver, til SRP'er og til at eleverne kan arbejde eksperimenterende med stoffet. De første kapitler om det historiske, om skalering kan man arbejde med i starten af 1.g, og kapitel 9 om priser og data kan man arbejde med når man er fortrolig med regneark. Nogle kapitler som kapitel 5 forudsætter differentialregning, og andre forudsætter kendskab til logaritmefunktioner. Kapitler 6, 7 og 8 rummer mere komplicerede emner, som nok kræver den modenhed eleverne har fået i 3.g

Film og materialer er til fri download og anvendelse i undervisning og selvstudier. Bliver undervisningsmaterialet downloadet og dele af det kopieret, skal der angives kilde.

Forkortelsen HEM står for lærebogssystemet: *Hvad er matematik?* Fra HEM's website: [Hvad er matematik - LRU.dk \(praxis.dk\)](http://Hvad%20er%20matematik%20-%20LRU.dk%20(praxis.dk)) kan der bla. frit hentes mange projekter.

Hvor der er markeret **Link til 7** (og andre tal) angives, at her kan der hentes ekstra materialer ind. Disse tilgås via website for filmen. Find nummeret og klik.

Vi vil meget gerne have feedback med kommentarer og forslag, der kan forbedre de kommende samlinger af undervisningsmaterialer.

Film og undervisningsmaterialer produceres med støtte fra Novo Nordisk Fonden.

1.

Udnyttelse af Vindenergi gennem historien



Danmark har en meget stærk placering globalt indenfor vindenergi. Internationale rapporter om, hvordan det går med overgang til udnyttelse af vedvarende energi, har i mange år fremhævet Danmark som foregangsland. Det skyldes dels avancerede virksomheder som Vestas, men det skyldes også en særlig historisk udvikling, hvor der gennem 150 år er blevet eksperimenteret med udnyttelse af vindenergien. Det giver vi et indkig til i dette kapitel.

1. Udnyttelse af Vindenergi gennem historien

Overalt i det danske landskab er der siden 1990'erne blevet rejst moderne vindmøller. Det er stadig mere gigantiske bygningsværker med mølletårne, der rejser sig 100 meter op, og med vinger på over 80 meter. *Rotorarealet*, der er det areal vingerne overstryger, er i sådanne møller større end adskillige fodboldbaner!

Øvelse 1.1

Udviklingen af vindmølleindustrien i Danmark tog fart i slutningen af 1970'erne. Hvad kan være årsagen hertil?

Vindmølleindustrien er blevet "Big Business", og Danmark har som den lille nation vi er, en bemærkelsesværdig stærk international placering. Det er ikke mindst bemærkelsesværdigt, fordi udnyttelsen af vindenergi i samme takt er blevet virkelig "Big science". Der arbejdes med de samme spørgsmål og anvendes samme avancerede metoder som hos de førende flyfabrikanter. Udformningen af de vingeprofiler, der udnytter vindens energi bedst muligt, er principielt samme spørgsmål for flyindustrien som for vindmølleindustrien. Dette fordyber vi os i i kapitel 7.

1.1 Poul la Cour og den danske vindmølletradition

En af forklaringerne på Danmarks stærke placering er den historiske tradition. Danmark var det første land i verden, hvor der blev fremstillet en el-producerende vindmølle. Det skete på Askov højskole i 1891. Askov højskole var blevet oprettet året efter nederlaget i 1864, hvor grænsen til Tyskland blev flyttet op til Kongeåen. Derved kom Rødding højskole, der havde været den første og den ledende kraft i højskolebevægelsen til at ligge syd for grænsen.

Men Askov blev ikke bare en videreførelse af den gamle højskolebevægelse. I den kritiske situation, Danmark befandt sig i efter at have mistet 1/3 af riget, var det nødvendigt at tænke nyt. Landet blev større gennem opdyrkning af heden. Og landet skulle blive klogere gennem øget oplysning. I Askov var svaret at højskolernes oplysningsprojekt skulle suppleres med et øget fokus på de naturvidenskabelige fag. Kendskab til matematik og fysik og anvendelse af eksperimenterende arbejdsformer skulle udbredes, og det lykkedes at tiltrække nye elevgrupper og fremragende lærerkræfter som bl.a. Poul la Cour.



I Askov Højskoles foredragssal har Erik Henningsen malet forstanderen Ludvig Schrøder ved vinterskolens afslutning i 1902. I dagens anledning er han flankeret af sin hustru og datter og bag dem de faste lærere Heinrich Nutzhorn, Jacob Appel (stående), Poul la Cour, H.F. Feilberg (i forgrunden) og Poul Bjerge.

Poul la Cour (1846-1908) havde været med til at oprette Meteorologisk Institut i 1872 og var en alsidig begavet opfindertype. Tankerne fra Askov om et naturvidenskabeligt oplysningsprojekt tændte ham, og han forlod den videnskabelige karriere og fik ansættelse i Askov i 1878. Det var her, han rejste forsøgsmøllen i 1891.

"Sikke masser af energi, der passerer over Askov, ja over hele landet, mens landet importerer andre masser af energi i form af kul og betaler den i dyre domme. ... Mon ikke man skulle kunne .. (få hjælp).. fra naturkræfternes område, således at vinden kunne blive os en lige så lydig som billig tjener?" Således skrev la Cour i en lille selvbiografi 10 år senere. Og han fik hjælp, i første omgang fra den danske stat. Der blev i en længere årrække bevilget ganske store beløb over finansloven til Poul la Cour og forsøgsmøllen i Askov, hvor man søgte svar på spørgsmålet: Hvordan skal en vindmølle designses, så vi kan høste mest mulig energi? En anden del af forsøgsarbejdet drejede sig i om, hvordan vindenergi kan oplagres, hvor la Cour eksperimenterede med oplagring i form af brint.



I 1897 opretter Poul la Cour et egentligt forsøgscenter i Askov. På det samtidige billede ses til højre den oprindelige forsøgsmølle og til venstre den nye, der blev tegnet af arkitekten P.V. Jensen Klint, der siden blev berømt som arkitekten bag Grundtvigskirken. Jensen Klint lærte la Cour at kende som elev på højskolen. Forsøgscentret fungerer i dag som museum for Danmarks vindmøllehistorie samt som undervisningssted for børn og unge i naturvidenskabelige fag.

1.2 Sugningsteorien og stødteorien

Selv om der forelå mange teoretiske beregninger, så var der på la Cours tid også store uenigheder blandt ingeniører og videnskabsfolk om så grundlæggende spørgsmål som: *Hvad er det får en møllevinge til at dreje rundt, eller får en flyvemaskine til at blive i luften?*

Poul la Cour troede grundlæggende mest på den eksperimentelle metode og udførte i årene omkring århundredskiftet en række forsøg i vindtunneller - en metode, der stadig

indgår som den afgørende test af vinger til fly og møller. Striden stod mellem to teorier, henholdsvis *stødteorien* og *sugningsteorien*, som de blev kaldt:

Er det luftens molekyler, der *støder* vingerne rundt, og som *trykker* nedefra på fugle og flyvinger, så de holdes oppe? Eller er der i virkeligheden et undertryk over flyvingen eller på den ene side af møllevingen, som *suger* vingen op, eller rundt?

Sugningsteorien var teoretisk begrundet af Daniel Bernoulli (1700-1782) allerede i 1738, men selv om enhver kan efterprøve den ved at puste henover et stykke bøjet papir, så stred den mod sund fornuft og blev latterliggjort. Enhver kan jo mærke, at vinden støder mod én, når man er ude i blæsevej. Og her hjalp det ikke, at bygningshåndværkere gennem århundreder har kendt til det problem, at tagsten i langt højere grad bliver suget af i læsiden, end stødt af i vindsiden, når der er storm. På Ribe Domkirke havde man lært af erfaringerne med vestenvinden og udstyret tagstenene øverst oppe i læsiden med hængsler, så de kunne lægge sig på plads igen, efter at være suget op. Et mere nærliggende eksempel som alle moderne mennesker kender: Når man skal tage et bad i en brusekabine, der er afskærmet af et bruseforhæng, og tænder for bruseren, så oplever man at forhænget suges ind og ikke stødes ud.

Øvelse 1.2

En af la Cours venner, Ingeniør Vogt, der omtales nedenfor gav i tidsskriftet *Ingeniøren* en udregning af en svanes muligheder for at flyve, hvis den skulle efterleve stødteorien. Du kan finde hans beregninger [her](#) (link til 1a-Ingeniør Vogt om svaners muligheder for at flyve)

Gennem vindtunnelforsøg demonstrerede Poul la Cour og ikke mindst hans meningsfæller ingeniør Vogt og gasværksbestyrer Irminger, at sugningsteorien var korrekt. Vogts forsøg var særligt spektakulære, idet han brugte skorstenen på Østre Gasværk som vindtunnel, og via trækkanalerne påviste sugningens dominerende indflydelse. Offentliggørelsen af disse forsøg betød, at sugningsteorien vandt afgørende tilslutning i stort set alle videnskabelige miljøer kloden rundt. Dog ikke umiddelbart i den amerikanske hær, hvor en professor Langley nægtede at tro på det og fortsatte med at designe flyvemaskiner efter den gamle teori. Disse havde imidlertid så skuffende flyveegenskaber, at han endte med at tage sit eget liv. (Poul Vinding, Dansk Teknik gennem hundrede år, 1941, s 100).

I dag designes møllevinger med en profil som fly-vinger med det resultat, at møllevingerne suges rundt, fordi der er undertryk på den buede overside.

Øvelse 1.3

Via [hjemmesiden <Student Airfoil Interactive | Glenn Research Center | NASA>](#) kan du åbne en side, hvor du eksperimentelt kan undersøge vindens bevægelser langs en vingeprofil. Siden opdateres ikke under Trump, da bevillinger til NASA er beskåret.

Øvelse 1.4

Via hjemmesiden <<http://www.youtube.com/watch?v=6UlsArvbTeo>> kan du finde en film, der illustrerer luftens bevægelse over og under vingeprofilen ved forskellige indstillinger af vingen. Bernouillis teoretiske argumentation for sugningsteorien bliver ofte refereret som om luften er et væsen, der efter at være blevet kløvet af flyvingens kant stræber mod at blive samlet igen. Derfor skal luften bevæge sig hurtigere over vingen og dermed skabes undertryk. Fysikken er noget mere kompliceret og luften stræber ikke efter noget.

- a) I filmen kan vi følge luftens bevægelse over og under vingen ved hjælp af røgspor. Hvad ser vi?
- b) Hvad vil det sige, at "stalle"? I hvilke situationer sker det?

Poul la Cour troede som omtalt mere på den eksperimentelle metode end på de teoretiske beregninger. I spørgsmålet om, hvad det er, der får møllevingerne til at dreje, og hvordan man skal udnytte svaret på dette spørgsmål i et design af møllevingerne, viste der sig at være god overensstemmelse mellem teorien og forsøgene.

Projekt: Hvorfor drejer møllevinger og hvorfor kan en Airbus flyve?

Du skal redegøre for de historiske kontroverser om svaret på dette spørgsmål, og selv grundigt analysere problemet.

Via beregninger skal du demonstrere, at der ikke er simple svar på spørgsmålet.

Via nettet eller ved direkte henvendelser skal du undersøge, hvad NASA's eller ESA's svar er og hvad Niels Bohrinstittets svar er.

Ved henvendelser til Vestas og / eller Siemens skal du præsentere hvad deres svar er, og dernæst give en kritisk analyse af disse svar.

Møllevingerne på Poul la Cours tid og møllevingerne i dag drejer jo rundt. Så det mere praktiske spørgsmål er: Hvordan skal en mølle designes, så man høster mest mulig af vindens energi. Og hvor effektive møller kan man i det hele taget konstruere?

Det overraskende resultat er her, at der er en øvre teoretisk grænse for vindmøllers effektivitet. Det viste den tyske fysiker Alfred Betz (1885 - 1968) i 1919, godt 10 år efter at Poul la Cour var død. Med simple metoder fra differentialregning udledte han det, der siden er blevet kaldt *Betz lov*, nemlig at en vindmølle ikke kan udnytte mere end 59,3% af vindens energi. Det er emnet for kapitel 3.

2. Skalering



Skalering er en grundlæggende simpel metode til at udregne, hvad der sker med arealer og rumfang af geometriske figurer eller med talstørrelser udregnet ud fra kendte formler, når en af de variable skaleres op eller ned, dvs. forstørres eller formindskes med en bestemt faktor. Selv om det matematisk set er grundlæggende simpelt, så bryder det alligevel ofte vores intuition og giver overraskende resultater.

2. Skalering

Når man forstørrer ting, er det vigtigt at have styr på dimensionerne. Hvis længde og bredde på en fodboldbane begge bliver 20% længere, så bliver arealet af fodboldbanen $(1+r) \cdot (1+r) = 1,2 \cdot 1,2 = 1,44$ gange større. Dvs arealet vokser med 44%. Hvis de tre sider i en kasse bliver dobbelt så store, så bliver kassens rumfang $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ gange større.

Filmen om Vestas starter med den samme type problemstilling:

Øvelse 2.1 Møllevingernes længde og den energi møllen producerer

Se følgende klip af filmen og gør derefter rede for, hvad det er Casper siger, hans venner har misforstået: **Fra start til 00.40.**

Ved besøget på Vestas forsøgscenter i Måde, hvor Nicoline tager med op i toppen og ind i nacellen, spørger hun ledende maskinmester Allan Kruse Andersen, om det er korrekt, at man skal fordoble møllevingernes længde for at få dobbelt så meget energi. **Se klippet fra 1.55 til 2.34.** Hvad svarer Allan?

Se dernæst **klippet 3.53 – 7.48** fra Vestas hovedkvarter ved Århus, hvor Casper spørger Tue Vissing Jensen om, hvordan det forholder sig med skalering. Tue svarer ved at opstille nogle beregninger - på nacellens overflade! Prøv selv at gengive Tues udregninger og forklaringer. Hvad er konklusionen mht. sammenhængen mellem møllevingernes længde og den energi den kan producere.

Øvelse 2.2 Forsøgsmøllen i Østerild

At få placeret kæmpemøllerne på land og på vand er en særlig udfordring. Her er det nacellen til møllen i Østerild, der blev kørt i gå-tempo fra Hanstholm Havn til Østerild Testcenter. Nacellen alene vejer 700 tons.

- Undersøg via nettet dimensionerne på Vestas kæmpemølle i Østerild. Hvor stort et areal overstryger vingerne?
- Undersøg via nettet dimensionerne på en standard fodboldbane. Hvor stort er arealet?
- Hvor mange fodboldbaner svarer det overstrøgne areal du udregnede i punkt a) til?
- Hvor mange husstande kan møllen levere strøm til?



Øvelse 2.3 Møllevingernes dovne omdrejninger

I den fortsatte diskussion mellem Casper og Tue fra øvelse 2.1 giver Casper udtryk for, at møllevingerne er noget dovne i deres omdrejninger – **se klippet fra 8.40 til 10.45.** I det første klip fortalte Allan, hvor lange møllevingerne i Måde er. De foretager ca. 8 omdrejninger pr minut. Hvilken hastighed giver det for vingspidserne?

Før man byggede disse megastore møller regnede man med et antal omdrejninger på omkring 20 pr minut. Hvad ville hastigheden på vingspidserne i Måde være med 20

omdrejninger? Sammenlign med lydens hastighed, som er ca 340 m/s, afhængig af temperaturen.

Oplæg til SRP: Hvor hårdt slider regnvejlr på møllevingerne?

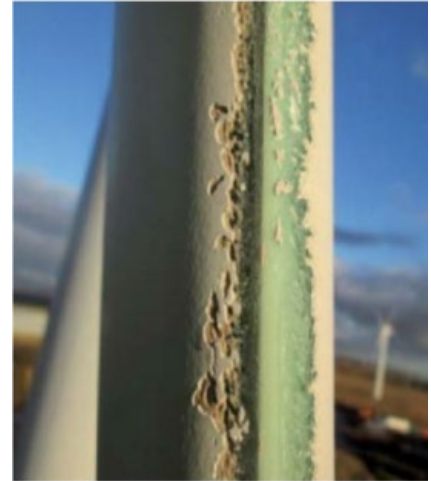
I diskussionen om problemer med alt for store hastigheder for møllevingerne omtaler Tue Vissing Jensen i [et klip fra 10.45 til 11.45](#) et problem de færreste nok tænker over: Regnvejr med tunge dråber kan erodere møllevingerne ganske voldsomt, som billedet nedenfor viser.

Sammenstødet mellem regndråberne og møllevingerne kommer med en voldsom hastighed – som at brage ind i en mur med over 300 km/h. Her er skaleringsfaktoren 8, dvs vokser impact-hastigheden med 20%, så vokser effekten dette har på vingernes overflade med en faktor på $1,2^8 \approx 4$ gange.

Hent følgende artikler herom: [link til 1a\), 1b\) og 1c\)](#)

og anvend disse som grundlag for en teoretisk undersøgelse.

Kombiner dette med praktisk forsøg, du kan tilrettelægge med hjælp fra din fysiklærer – eller hjælp ved et besøg på et af ingeniørstudierne



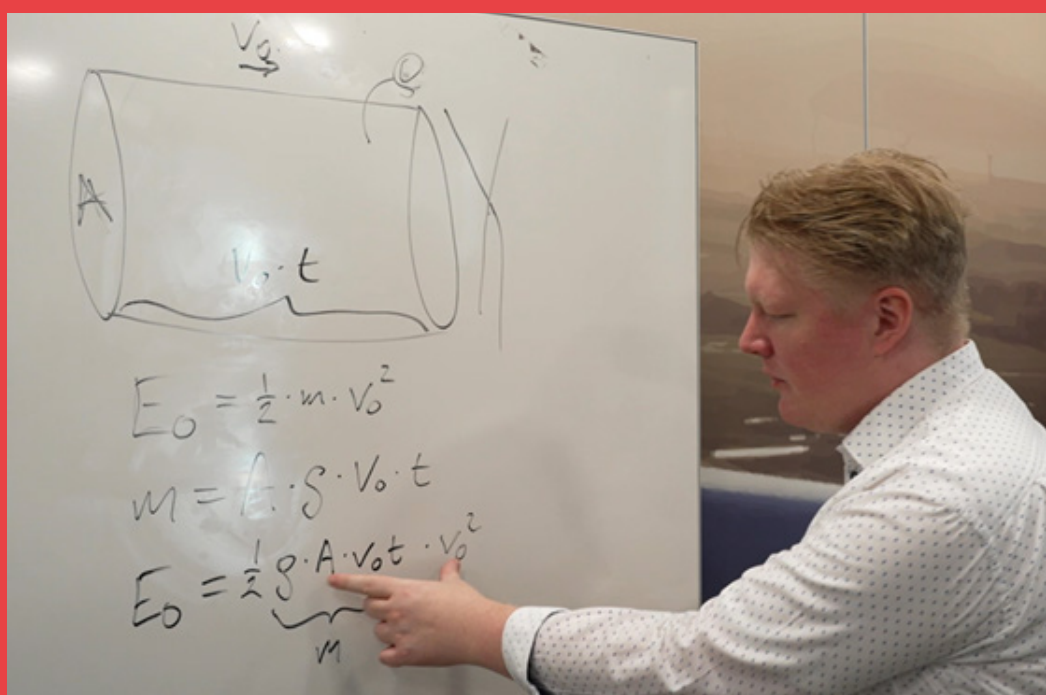
Øvelse 2.5 Vindenergiens afhængighed af hastigheden

Ved besøget i Måde spørger Nicoline endelig Allan om reglen med at fordobling også gælder for energien: Er det sådan, at hvis vindhastigheden fordobles, så bliver energien, der kan høstes 4-doblet. Nej svarer Alla, den bliver faktisk 8-doblet. Ved besøget hos Vestas rejser Casper det samme spørgsmål, og her foretager Tue nogle udregninger der beviser Allans påstand. [Se filmklippet fra 15-22 til 20.12](#), og gengiv bagefter selv Tues udregninger og argument. Og svar endelig på, hvor meget energien i luftmassen stiger med, når vindhastigheden stiger fra 15 m/s til 20 m/s.

Bemærk: Gearing kan også henregnes til skalering. I omsætningen af vindens energi først til den mekaniske energi i møllevingernes omdrejning og videre via elektromagnetisme til elektrisk strøm indgår der en transformation af rotationsbevægelserne vha. *gearing*, som får omdrejningshastigheden inde i generatoren op fra måske 7-8 omdrejninger pr minut til 1500! Dette er omtalt i kapitel 8, afsnit 8.4.

3.

Hvor meget energi kan vi høste – Betz lov uden differentialregning



Svaret på overskriftens spørgsmål er et eksempel på, at man skal passe på med at nøjes med sin intuition og bygge på sin snusfornuft. Man må regne på det, og finder så ud af det overraskende resultat, at vindenergien bliver 8 gange større, når vindens hastighed bliver fordoblet. Dette resultat udleder vi to gange i disse undervisningsmaterialer – i kapitel 5 på den “normale måde” ved hjælp af differentialregning, men i dette kapitel demonstrerer vi, at det kan vises alene ud fra indsigt i 3. gradspolynomiernes grafer.

3. Hvor meget energi kan vi høste – Betz lov uden differentialregning

(Indholdet i kapitel 3 er også indeholdt i kapitel 2 og kapitel 5. Kapitel 2I har imidlertid fokus på analyse af fordelingen af vindhastighederne, og har dermed vægt på sandsynlighedsteori. Kapitel 5 gør kraftigt brug af differentialregning. Hvis man blot ønsker en kort gennemgang af, hvor meget energi, man kan høste ud af en given luftmængde, der bevæger sig med en given hastighed, og gerne vil demonstrere, hvor langt man kan komme med analyse af polynomier, kan man her finde et kort forløb.

Vi foreslår du starter med at se filmens sektion om 'Vindens hastighed og energi, fra 15.23 til 20.13).

Målet med en vindmølle er at høste vindenergi og producere el. Før luften rammer møllevingerne indeholder den en vis mængde bevægelsesenergi. Hvis vi betragter en luftmængde, der vejer m kg og bevæger sig med hastigheden v_0 (målt i meter pr. sekund), så er denne luftmængdes bevægelsesenergi ifølge fysikkens love:

$$E_{\text{før}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$$

Efter luftmængden har passeret møllen har den afgivet en vis mængde energi, så den nu bevæger sig med en lavere hastighed v_2 , og dermed indeholder en bevægelsesenergi på:

$$E_{\text{efter}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2$$

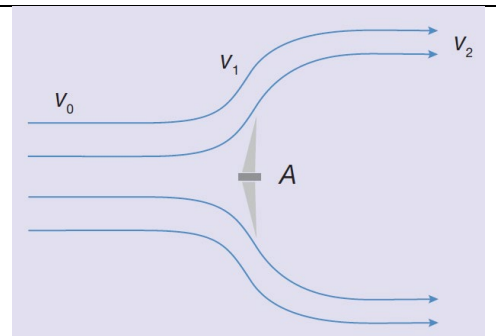
Den energi, møllen har høstet, er derfor:

$$\begin{aligned} E &= E_{\text{før}} - E_{\text{efter}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_0^2 - v_2^2) \end{aligned}$$

Øvelse 3.1

Gennemfør et argument for, at man ikke kan udnytte 100 % af bevægelsesenergien, dvs. omsætte hele $E_{\text{før}}$ til møllevingernes energi.

Hvis den cirkelskive, som bestemmes af møllevingernes omdrejning, var massiv og uigennemtrængelig, ville luftens molekyler i første omgang blive slynget tilbage, som en bold der rammer en mur. De ville ramme andre molekyler, og reaktionen ville forplante sig et stykke foran møllen. Dvs. der ville ske en langsom nedbremsning af luftens hastighed på vej ind mod cirkelskiven. Erfaringerne siger, at dette *modtryk* kan mærkes i en afstand fra møllen på ca. 1 rotordiameter. Er rotordiameteren 10 meter, kan man begynde at mærke modtrykket 10 meter foran møllen. Er diameteren 50 meter kan man mærke modtrykket 50 meter foran. Vi er i fri luft, så luften bliver ikke trykket sammen, som i en cykelpumpe, men begynder at strømme udenom cirkelskiven.



Vindens hastighed ved passage af vindmølle med rotorareal A .

v_0 hhv. v_1 er vindens hastighed før og inde i påvirkningszonen, mens v_2 er vindens hastighed efter passage af vindmøllen.

Rotorarealet er naturligvis gennemtrængeligt, men kun delvis, idet møllevingerne påvirker luftens molekyler med et modtryk, efterhånden som de nærmer sig. I designet af møllerne er man interesseret i en så jævn påvirkning gennem modtrykket som muligt.

Øvelse 3.2

De tidlige serieproducerede vindmøller fra omkring 1980 var mindre, men havde et højere omløbstal, end de moderne, der kan se lidt "dovne" ud. Vi sammenligner nu, hvorledes en ældre og en nyere model påvirker luftens molekyler. Den ældre har en rotordiameter på 10 meter og et omløbstal på 75 omdrejninger i minuttet. Den nyere model har en rotordiameter på 100 meter og foretager 15 omdrejninger pr minut. Vindhastigheden er 12 meter/sekund før vinden rammer ind i påvirkningszonen. Nedbremsningen svarer omtrent til en gennemsnitshastighed på vej ind mod møllen på 10 meter/sekund. (Dette resultat kan vises ved hjælp af integralregning).

a) Hvor lang tid tager det for et luftmolekyle at nå ind til møllen i hver af de to situationer?

b) Hvor mange vinger når et luftmolekyle at blive påvirket af i de to situationer?

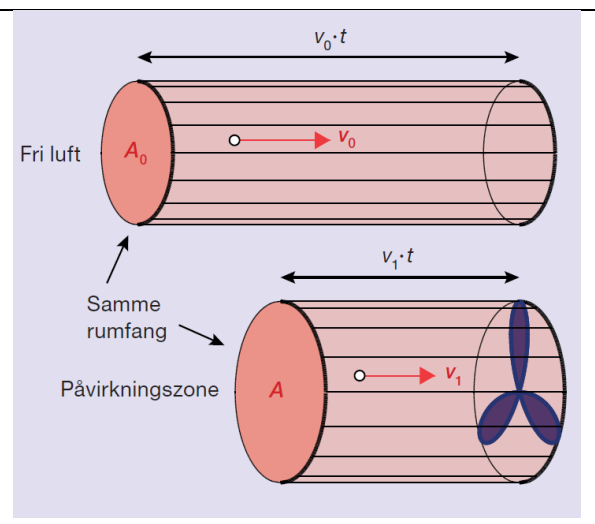
Når luftens partikler påvirkes af flere vinger, betyder det, at påvirkningen er mere jævn over hele rotorarealet.

Vi betragter nu en luftmængde af form som en cylinder med et tværsnitsareal på A og med en hastighed på v . Rumfanget af den luftmængde der passerer i løbet af t sekunder kan udregnes som rumfanget af en cylinder med et tværsnitsareal på A og en højde på $v \cdot t$. Er hastigheden 10 meter/sekund og ser vi på $t = 1$ sekund, s er højden 10 meter.

Rumfanget af luftmængden er derfor lig med

$$V(t) = A \cdot v \cdot t.$$

Dette udtryk fortæller, at A og v er omvendt proportionale.



Vi er i det fri og luften presses ikke sammen. Når hastigheden af luftmængden bliver mindre bliver cylinderbredden A større. Ser vi således på en cylinder af luft, med tværsnitsareal lig med rotorarealet, der nærmer sig møllen, så vil cylinderen brede sig ud og få et større tværsnitsareal efterhånden som luftmængdens hastighed nedbremses. Når luftmængden når ind i møllens plan, så er tværsnitsarealet blevet betydeligt større, som vist på illustrationen. Det betyder, at en stor del af luftmængden slet ikke rammer møllen, det glider ud til siden og forbi møllen. (se illustrationen ovenfor). Det betyder også, at en del af bevægelsesenergien i denne luftmængde ikke kan udnyttes af møllen!

Hvor stor en bevægelsesenergi rummer denne luftmængde? For at udregne det, benytter vi formlen for bevægelsesenergi og skal derfor først udregne massen. Hvis masse-

fylden (densiteten) af luften kaldes for ρ (græske bogstav rho, måles i kg/m^3) er vægten af denne luftmængde derfor:

$$m(t) = \rho \cdot V(t)$$

$$m(t) = \rho \cdot A \cdot v \cdot t$$

Indsæt udtrykket for $V(t)$

Den samlede bevægelsesenergi i en sådan luftmængde med hastighed v er derfor:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \cdot m(t) \cdot v^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v \cdot t \cdot v^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^3 \cdot t \end{aligned}$$

Øvelse 3.3

Udregningen viser, at energien er proportional med vindens hastighed i tredje potens. Giv selv nogle taleksempler, der kan illustrere dette.

Hvis vi nu i denne ligning dividerer t over, får vi energien pr tidsenhed. Dette kaldes også effekt og har enheden watt. Den foreløbige konklusion er derfor, at den samlede effekt af en luftmængde, der bevæger sig med hastigheden v er

$$P = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^3$$

Vi vender nu tilbage til situationen på illustrationen i starten af afsnittet, og ser på en cylinder af luft, med tværsnitsareal lig med rotorarealet, der nærmer sig møllen. Før den kommer ind i påvirkningszonen, har luftmængden hastigheden v_0 og derfor en effekt lig med:

$$P_{\text{luft}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v_0^3$$

Dette må repræsentere en øvre grænse for den effekt, som vindmøllen kan yde.

Øvelse 3.4

Der projekteres i dag havvindmøller med fx rotordiametre på 164 meter.

a) Hvor stor er rotorarealet?

b) Luftens densitet ρ kan ved normal fugtighed og en temperatur på 20° sættes til $1,2 \text{ kg/m}^3$. Hvad er den øvre grænse for effekten af møllen, når vindhastigheden ved møllen er 10 meter / sekund? Samme spørgsmål for 20 meter / sekund.

3.1 Udledning af Betz lov

Vi vil nu beregne, hvor stor en energi, der kan høstes af en vindmølle, og vender tilbage til formlen:

$$E = E_{\text{før}} - E_{\text{efter}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_0^2 - v_2^2)$$

Vi bemærker, at den masse m , vi her betragter, er massen af den luftmængde, der faktisk påvirker møllen, dvs. den luftmængde der glider igennem rotorfladen.

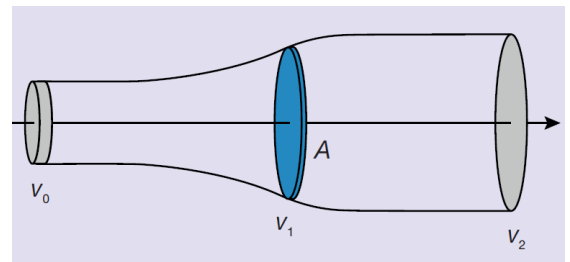
Lad os se på situationen fra møllens side. Inde ved møllen er hastigheden nedbremset til v_1 , så rumfanget $V(t)$ af den luftmængde, der i løbet af t sekunder passerer igennem møllens rotorplan, og som er med til at drive møllevingerne rundt, er:

$$V(t) = A \cdot v_1 \cdot t$$

Massen af denne luftmængde er derfor:

$$m = \rho \cdot A \cdot v_1 \cdot t$$

Ser vi lidt tilbage i tiden, og spørger hvor denne luftmængde kommer fra, så var tværsnitsarealet af luftmængden *mindre* end A , da den havde hastigheden v_0 :



Bag ved møllen er hastigheden yderligere nedbremset til v_2 , så cylinderen er blevet endnu bredere.

Indsætter vi udtrykket for m i ligningen for energien E , der høstes, får vi:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v_1 \cdot t \cdot (v_0^2 - v_2^2)$$

Vi antager nu, at hastigheden v_1 ved møllen er et gennemsnit af hastigheden før og efter. Det er faktisk korrekt og du kan [her](#) ([link til 3-a-hastighed ved møllen](#)) finde en udregning, der viser hvorfor; i kapitel 5 er dette også vist med brug af differentialregning.

$$\text{Dvs.:} \quad v_1 = \frac{1}{2}(v_0 + v_2)$$

Vi indsætter dette og får:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot \frac{1}{2}(v_0 + v_2) \cdot t \cdot (v_0^2 - v_2^2)$$

Hvis vi dividerer t over får vi et udtryk for *effekten*, $P_{\text{mølle}}$ af møllen. Vi er interesseret i at sammenligne denne effekt med den maksimale effekt vi udregnede ovenfor, nemlig

$$P_{\text{luft}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v_0^3$$

I de følgende udregninger skiller vi derfor dette udtryk ud.

Samtidig er vi interesseret i forholdet $\frac{v_2}{v_0}$ mellem hastigheden efter og hastigheden før:

$$P_{\text{mølle}} = E / t = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot \frac{1}{2}(v_0 + v_2) \cdot (v_0^2 - v_2^2) \quad \text{Divider } t \text{ over}$$

$$P_{\text{mølle}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot (v_0^3 + v_2 \cdot v_0^2 - v_2^2 \cdot v_0 - v_2^3)$$

Gange parenteserne ud

$$P_{\text{mølle}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v_0^3 \left(\frac{v_0^3}{v_0^3} + \frac{v_2 \cdot v_0^2}{v_0^3} - \frac{v_2^2 \cdot v_0}{v_0^3} - \frac{v_2^3}{v_0^3} \right)$$

Sæt v_0^3 udenfor parentes

$$P_{\text{mølle}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v_0^3 \left(1 + \frac{v_2}{v_0} - \left(\frac{v_2}{v_0} \right)^2 - \left(\frac{v_2}{v_0} \right)^3 \right)$$

Reducer

Læg nu mærke til, at vi uden for parentesen finder størrelsen $P_{\text{luft}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v_0^3$:

$$P_{\text{mølle}} = \frac{1}{2} \cdot P_{\text{luft}} \cdot \left(1 + \frac{v_2}{v_0} - \left(\frac{v_2}{v_0} \right)^2 - \left(\frac{v_2}{v_0} \right)^3 \right)$$

Vi ser, at parentesen er et tredjegradspolynomium i den variable $x = \frac{v_2}{v_0}$:

$$p(x) = 1 + x - x^2 - x^3$$

Da $v_2 < v_0$ er $x < 1$.

Vi har nu fortaget en matematisk modellering, der har oversat spørgsmålet:

Hvor stor en del af vindens energi kan høstes af en vindmølle?

til det matematiske spørgsmål:

Hvad er maksimum for funktionen p ?

Denne type opgaver kan besvares helt præcist med brug af differentialregning, som vi demonstrerer i kapitel 5. Og det var, hvad Betz gjorde, da han fandt sin lov. Men det er altid en god ide at skabe sig et overblik ved først at tegne grafen og undersøge den.

Tredjegradspolynomiers symmetriegenskaber.

Selv om $p(x)$ i vindmøllesituationen kun er defineret i intervallet $]0;1[$, så kan vi godt tegne grafen for den matematiske funktion i et større interval. Noget sådant kan af og til give os en større indsigt. I dette tilfælde kan det give os en løsning på optimeringsproblemet uden brug af differentialregning, men med anvendelse af vores viden om 3. gradspolynomier.

a) Tegn grafen for $p(x)$ i intervallet $[-2; 2]$.

b) Vis $p(x) = (1+x) \cdot (1-x^2)$

c) Vis at nulpunkterne for $p(x)$ er $x = +1$ og $x = -1$. Tjek det passer med din graf.

d) Argumenter for at grafen holder sig i den positive halvplan i hele 2. kvadrant (**hint: Hvad ville der ske mht nulpunkter, hvis grafen "dykkede" ned under x-aksen til venstre for -1?**). Dvs der er *lokalt minimum* i $(-1, 0)$.

e) Måske har du undersøgt tredjegradspolynomierne i detaljer. I så fald ved du, at graferne altid har et vendepunkt, og at de er symmetrisk om dette. Bestem koordinaterne

til vendepunktet ud fra formlen $\left(\frac{-b}{3a}, p\left(\frac{-b}{3a}\right)\right)$. Du kan [her](#) (link til 3-d vendepunkt for tredje-grads) finde en udledning af disse koordinater, uden brug af differentialregning. Du skal få $\left(\frac{-1}{3}, \frac{10}{27}\right)$.

f) Brug symmetriegenskaben til at argumentere for, at grafen har lokalt *maksimum* for $x = +\frac{1}{3}$. Indsæt og vis, at maksimumsværdien her er $p\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{27}$.

g) Vis, at $x = \frac{1}{3}$ svarer til at $v_2 = \frac{1}{3} \cdot v_0$, og giv en fortolkning af dette resultat

g) Anvende nu:
$$P_{\text{mølle}} = \frac{1}{2} \cdot P_{\text{luft}} \cdot \left(1 + \frac{v_2}{v_0} - \left(\frac{v_2}{v_0}\right)^2 - \left(\frac{v_2}{v_0}\right)^3\right)$$

dvs:
$$P_{\text{mølle}} = \frac{1}{2} \cdot P_{\text{luft}} \cdot p(x)$$

og indsæt heri maksimumsværdien: $p\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{27}$.

Du skal få: $P_{\text{mølle}} = \frac{16}{27} \cdot P_{\text{luft}}$, eller i %: $P_{\text{mølle}} = 59,3\%$ af P_{luft}

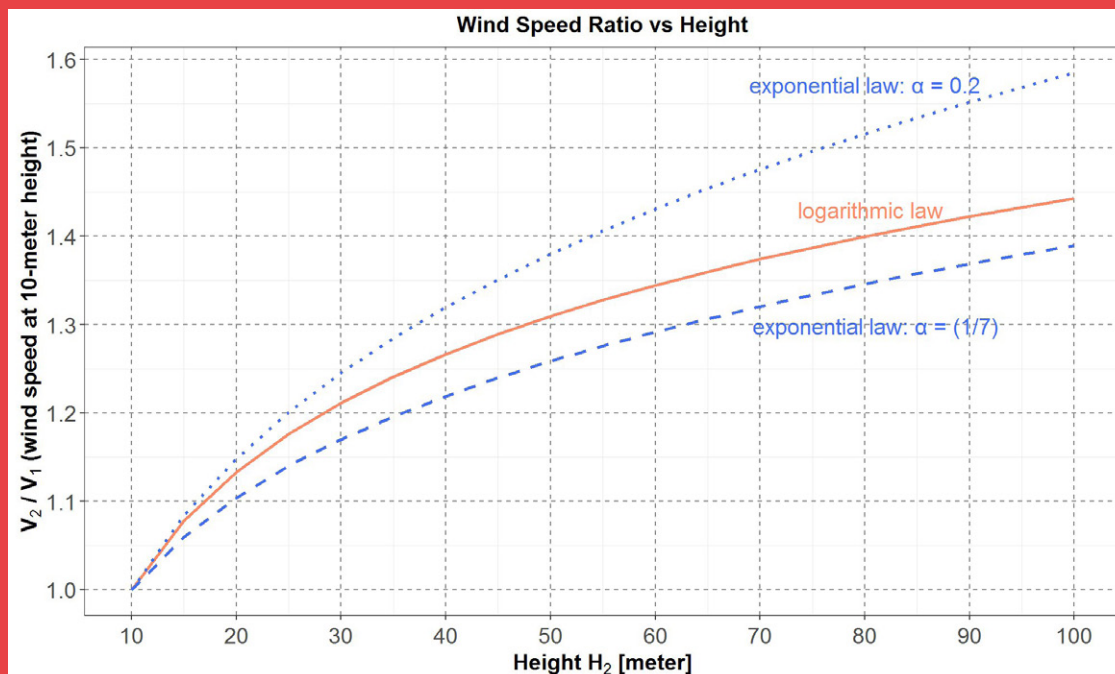
Konklusionen er således: En vindmølle kan maksimalt høste 59,3% af vindens energi, og for at dette skal indtræffe, skal hastigheden efter passagen være en tredjedel af hastigheden før.

Der er naturligvis energitab andre steder i systemet, så man vil altid ligge et stykke lavere.

Gennemgår du kapitel 5 med brug af differentialregning, vil du naturligvis få det samme resultat.

4.

Vindhastighed, højde og ruhed

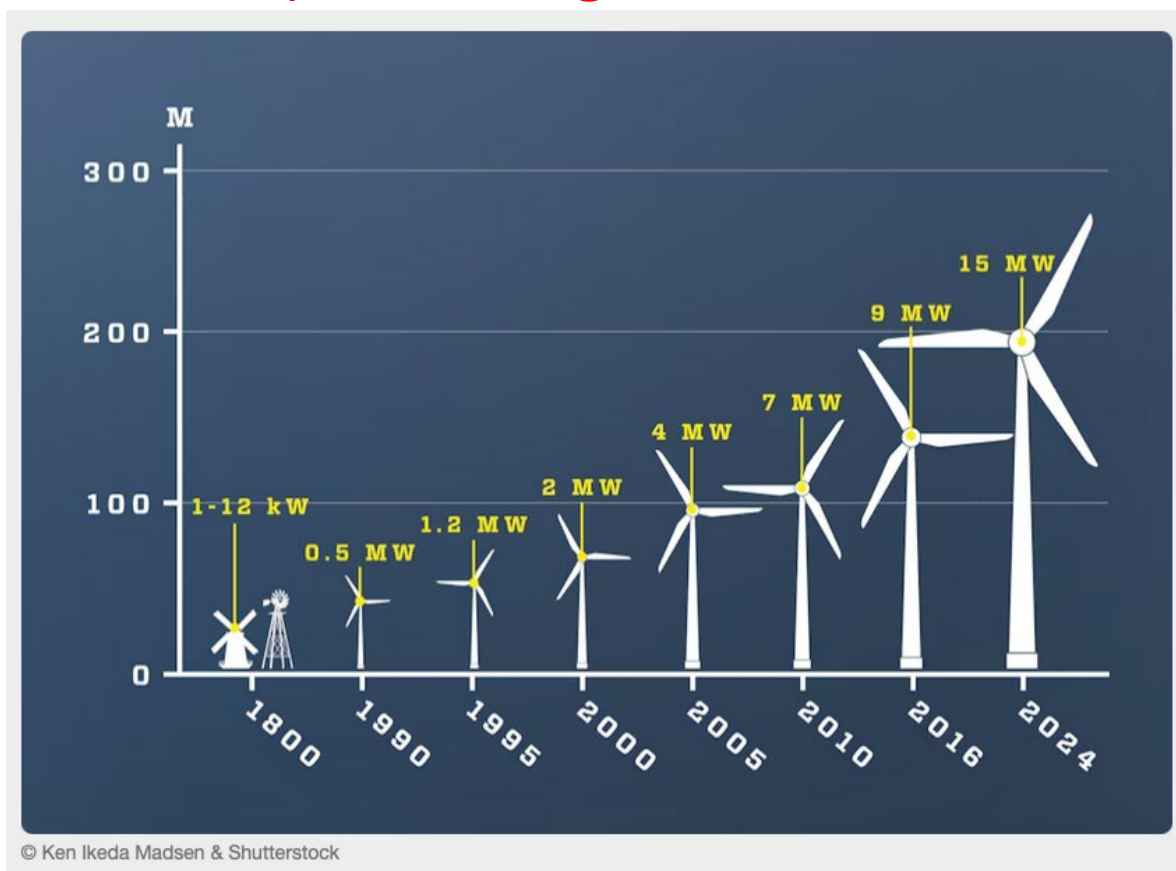


Alle har en erfaring med, at det blæser mere, når man kommer op i højden, om det er i et tårn, eller oppe på en højbro. Vi har også erfaring med, at det blæser kraftigere over vand – og her ligger forklaringen lige for: Der er mindre gnidningsmodstand fra overfladen til at bremse vinden. Det er meget svært at udlede en eksakt formel for, hvordan vindhastigheden afhænger af højden, men det lykkedes for 100 år siden ved en kombination af teori og empiri at nå frem til to versioner af denne lov. Begge versioner, potensloven og den logaritmiske lov er tilnærmelser, og begge anvendes, da den sidste er mest velegnet til små højder og den første til de lidt større højder.

4. Vindhastighed, højde og ruhed

Vindhastigheden er afgørende for, hvor meget effekt en vindmølle kan levere. Effekten er proportional med vindens hastighed i tredje, hvilket betyder, at hvis vi *fordobler* vindhastigheden bliver *effekten* otte gange større! Dette gennemgår Tue Vissing Jensen i filmen, [se filmklippet fra 15-22 til 20.12](#), og det er også bevist i kapitel 3. For at mest mulig energi ud af vindmøllerne bliver de placeret i regioner, hvor det ofte blæser. Her ligger Danmark godt og især områderne langs Vesterhavet er kendt for en noget kraftigere blæst end resten af landet. Udover den geografiske placering har vindmøllernes højde og hvilket terræn, de er placeret i, betydning. Jo højere oppe man er, jo mere blæser det, og jo glattere overfladen er jo mere blæser det. Ved havoverflader eller ørkenner er overfladen meget mere glat end ved skove eller bygninger i byerne.

4.1 Vindmøller, størrelse og effekt



Figuren viser, hvordan vindmøller er blevet både større og har en større effekt. Vestas nye V236-15.0 MW vindmølle har en effekt på 15 MW, mens den typiske mølle i 1990 havde en effekt på 0,5 MW. De nye vindmøller er altså 30 gange så kraftige. Vestas V236 har en diameter i vingspænd på 236 meter og en højde på op til 280 meter.

4.1.1 Model for vindhastighed

Når DMI forudsiger vindhastigheden i vejrudsigterne, er det den gennemsnitlige hastighed i 10 meters højde. Vi vil gerne lave en matematisk model, der kan fortælle hvad hastigheden i en given højde er, ud fra vindhastigheden ved 10 meters højde. Vi arbejder ud fra to observationer:

- Vindhastigheden stiger med højden.
- Vindhastigheden stiger langsommere og langsommere med højden.

Der er en række andre faktorer der påvirker vindhastigheden, og det er et stort område indenfor matematisk meteorologi at opstille sådanne modeller. Du kan her finde standard-referencen indenfor dette felt: [link til 4-a \(Wind Speed Data at Different Heights\)](#), hvor vi bla kan læse, at "The Monin-Obukhov method is the most widely used to depict the wind speed v at height z ":

$$v(z) = \frac{v_f}{K} \left[\ln \frac{z}{z_0} - \xi \left(\frac{z}{L} \right) \right]$$

Denne formel er kun taget med for at vise, at modellering af fænomener i atmosfæren er uhyre kompliceret. Så man har udviklet tilnærmelser til formelen, tilnærmelser der bevarer parameteren z_0 , fordi den indeholder information om den overflade vinden bevæger sig hen over, og kaldes for "ruhedskoefficienten".

Der er to tilnærmelser til formelen for hvordan vindhastigheden afhænger af højden over jordoverfladen. I begge formler angiver v_1 vindhastigheden ved højden h_1 , og v_2 vindhastigheden ved højden h_2 .

- Den logaritmiske lov:
$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\ln(h_2 / z_0)}{\ln(h_1 / z_0)}$$

- Potensloven:
$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^a$$

(bemærk, at potensloven ofte i amerikansk litteratur kaldes for den eksponentielle lov)

Ruhedskoefficienten z_0 indgår eksplicit i den logaritmiske lov, som blandt betyder, at den logaritmiske lov er den mest præcise for den første del af opstigningen til 50-60 meter. z_0 indgår tilsyneladende ikke i potensloven, men den er skjult i eksponenten a .

a kaldes "wind shear coefficient", men man kan også møde betegnelsen *Hellman koefficienten*, opkaldt efter ham der først opstillede modellen (i 1916). a er ikke lig med ruhedskoefficienten z_0 , men

Landscape type	Friction coefficient a
Lakes, ocean and smooth hard ground	0.10
Grasslands (ground level)	0.15
Tall crops, hedges and shrubs	0.20
Heavily forested land	0.25
Small town with some trees and shrubs	0.30
City areas with high rise buildings	0.40

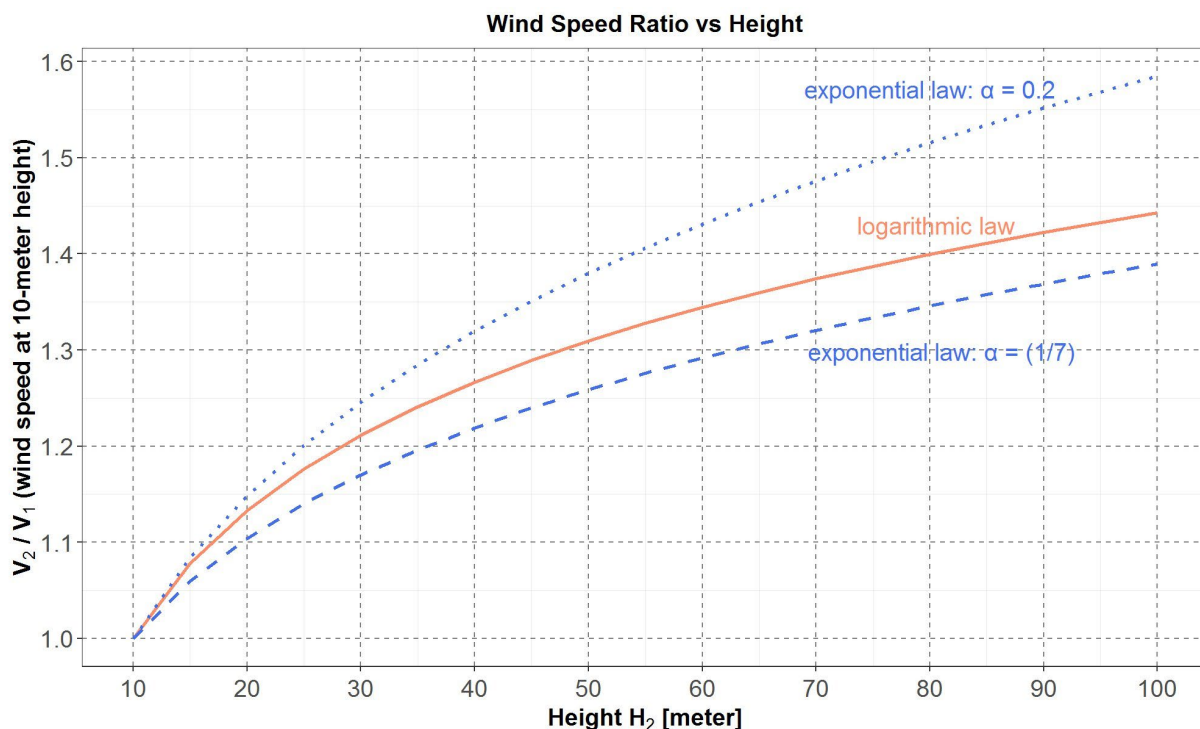
Table 1. Friction coefficient a for a variety of landscapes tabellen er fra artiklen 4-a

er også påvirket af andre faktorer. En tabel med z_0 -værdier kan du se nedenfor.

Den logaritmiske lov er mere kompliceret at anvende, ikke så meget fordi den naturlige logaritme indgår, det betyder mindre med værktøjsprogrammer. Men fordi den "kræver" at man har et godt bud på z_0 . Og det kan godt være en udfordring. Så *potensloven er den mest benyttede*. Det er naturligvis også en udfordring at give et bud på værdien af a , men det viser sig, at $a = \frac{1}{7}$ i de fleste situationer giver resultater, der ligger tæt på de

empiriske tal, man kan måle. De to modeller giver grafiske billeder, der er ret tæt på hinanden, se her:

Sådan forløber grafer for potensfunktioner og for den logaritmiske model.



hentet fra: [4-d Method to Estimate Climate Change Wind Generation](#)

I den logaritmiske model indgår som beskrevet "ruhedskoefficienten" z_0 , hvis størrelse du her kan se en tabel over:

Roughness Class	Description	Roughness length z_0 (m)
0	Water surface	0.0002
1	Open areas dotted with a handful of windbreaks	0.03
2	Farmland dotted with some windbreaks more than 1 km apart	0.1
3	Urban districts and farmland with many windbreaks	0.4
4	Densely populated urban or forest areas	1.6

Table 2. Roughness classes and lengths (Masters, 2004) tabellen er fra artiklen 4-a

Vi vil som omtalt gerne lave en matematisk model, der kan fortælle hvad hastigheden i en given højde er, ud fra vindhastigheden ved 10 meters højde. Og hvorfor 10 meter? Fordi det er den højde DMI har valgt, når de angiver middelvinden.

Vi har altså udgangspunktet $h_1 = 10$ og en vindhastighed i 10 meters højde, vi betegner v_1 . Hvordan skaleres hastigheden op til v_2 , når højden skaleres op til h_2 ?

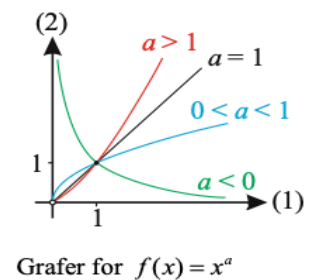
Øvelse 4.1 Potensfunktioner og potensloven for vindhastigheder

I værktøjsskassen har vi mange funktionstyper, men vi vælger at undersøge, om ikke en potensmodel med forskriften $f(x) = b \cdot x^a$ kan anvendes. Dette er inspireret af de grafiske billeder af potensfunktioner som du ser på tegningen.

De to observationer ovenfor opfyldes af potensfunktioner hvor potensen a ligger i intervallet $0 < a < 1$.

Hvis vi skal kunne anvende en potensmodel, så skal de to givne punkter (h_1, v_1) og (h_2, v_2) ligge på grafen. Det betyder, at $f(h_1) = v_1$ og $f(h_2) = v_2$.

Potensfunktion



a) Udnyt dette til at opstille ligningerne:

$$b \cdot h_1^a = v_1$$

$$b \cdot h_2^a = v_2$$

b) Vis ved division af de to udtryk, at:

$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^a, \text{ eller: } v_2 = v_1 \cdot \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^a$$

c) Argumenter for følgende ved at sammenligne udtrykket i b) med formelen for en potensfunktion: $f(x) = b \cdot x^a$:

v_2 er skrevet som en potensfunktion af den variable $x = \frac{h_2}{h_1}$

Øvelse 4.2 Når højbroen over Storebælt lukker

Du kan her finde en youtube-video med meteorologen Tanev, hvor han forklarer, hvordan en vindhastighed i 10 meters højde bliver til meget mere i 65 meters højde, dvs på toppen af højbroen:

[Tanev: Derfor stiger vinden kraftigt, når du kører op på en bro - Google-søgning](#)

Hent her en udskrift af dette indhold: [link til 4-c Tanev- Derfor stiger vinden kraftigt, når du kører op på en bro](#).



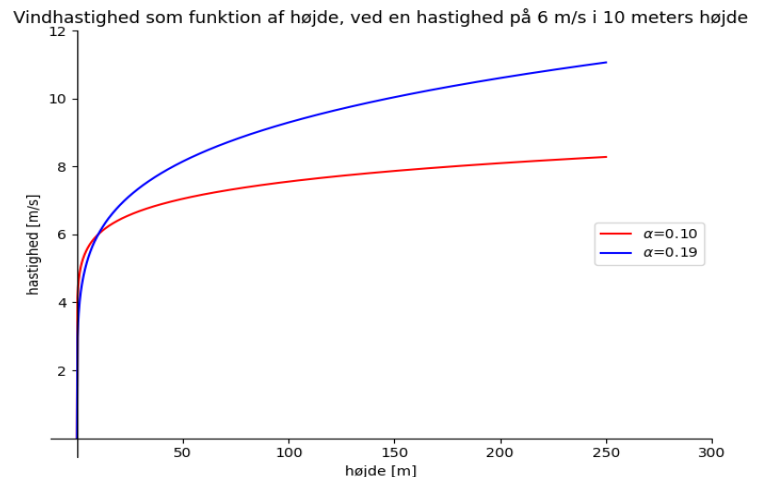
a) Udregn selv, hvad resultatet ville være, hvis Tanev anvendte $a = \frac{1}{7}$.

b) Det gør han åbenbart ikke. Udregn selv, hvilken a -værdi, han anvender.

Øvelse 4.2 Vindhastighed som funktion af højde

Figuren nedenfor viser vindhastigheden som funktion af højden ud fra en hastighed ved 10 meter på $6\frac{m}{s}$ for $a = 0,1$ og $a = 0,19$.

- a) Beskriv hvordan vindhastigheden ændrer sig med højden for de to forskellige værdier af a . Hvilken kurve vokser hurtigst, og hvorfor?
- b) Forklar, hvad det betyder for vindmøllens placering, hvis man ønsker at udnytte vinden bedst muligt.
- c) Brug modellen $v_2 = v_1 \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^a$ til at beregne vindhastigheden i 162 meters højde, hvis $v_1 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ved $h_1 = 10$ meter, for både $a = 0,1$ og $a = 0,19$.
- d) Diskutér, hvordan forskellige terræner (f.eks. hav, mark, skov) påvirker værdien af a og dermed vindhastigheden i højden.



Øvelse 4.3

Det virker måske umiddelbart mærkeligt at a -værdien er højere over skov end over vand. Højere a -værdi betyder jo at funktionen vokser hurtigere.

- a) Prøv selv at give et bud på en løsning på dette "paradoks"!
- b) Lad os vende argumentet om og lade vindhastigheden være $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i 162 meters højde. Vi vil nu finde vindhastighed v_1 og isolerer derfor v_1 i ligningen

$$v_2 = v_1 \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^a \Leftrightarrow v_1 = v_2 \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{-a}$$

Hvis vi indsætter, får vi

$$v_{1,skov} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \left(\frac{162}{10}\right)^{-0.19} = 5,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \text{ mens } v_{1,hav} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \left(\frac{162}{10}\right)^{-0.1} = 7,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Vi kan se at skoven giver læ, så vindhastigheden kun er $5,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i 10 meters højde. Hvis man udregner hastigheden i 1 meters højde, bliver den $3,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, altså en ret let brise i forhold til den kraftige vind i 162 meters højde.

At a -værdien er højere over skov end over vand betyder altså populært sagt, at vindhastigheden er "holdt nede" over skov, og i virkeligheden indeholder meget mere energi, der bare opfanges af træerne – og at den så vokser "eksplosivt, når vinden kommer fri af træerne.

4.1.2 Vindhastighed og effekt

Mens der er en klar effekt af at gøre landvindmøller højere virker det ikke som om havvindmøller har det store udbytte af at komme op i højden. Ved 100 meters højde blæser det 26% end ved ved 10 meter, mens det ved 200 meters højde blæser 35% mere.

Regnskabet bliver lidt bedre hvis vi ser på den effekt vindmøllerne kan levere. Husk at effekten skalerede med vindhastigheden i tredje $P \propto v^3$. Hvis vi derfor regner den relative effekt ud blive den,

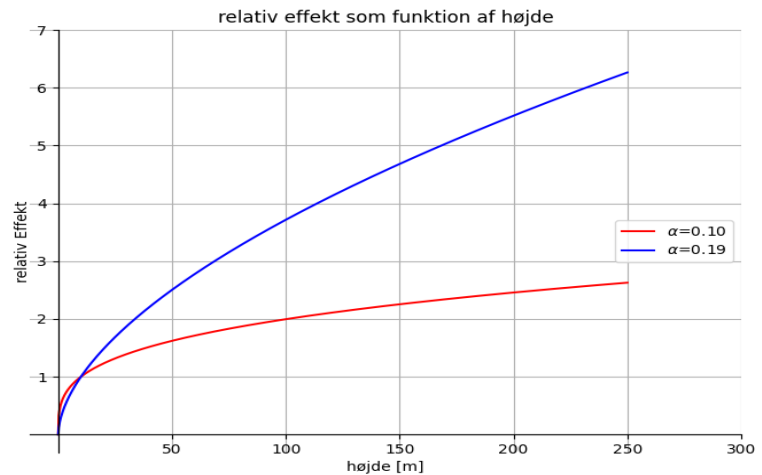
$$\frac{P}{P_0} = \left(\left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{0,1} \right)^3 = \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{0,1 \cdot 3} = \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{0,3}.$$

Øvelse 4.4

- Udregn effektførøgelsen ved 100 meter.
- Udregn effektførøgelsen ved 200 meter.

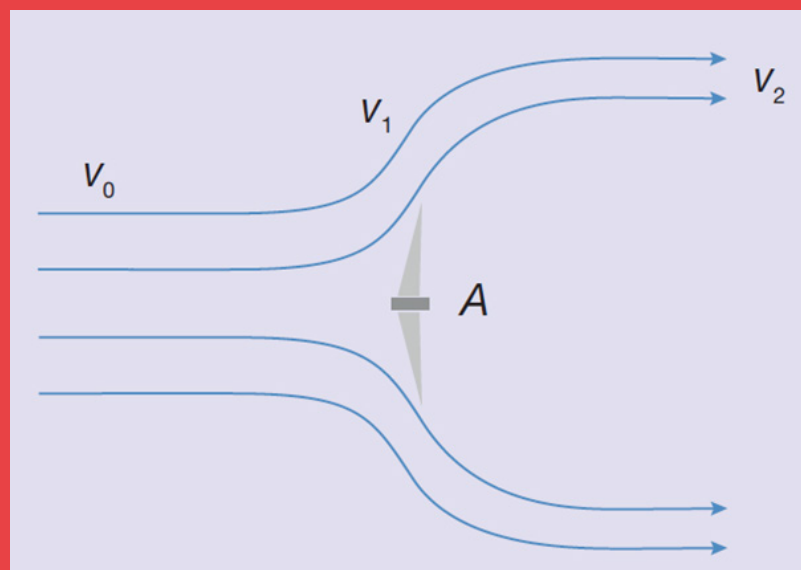
Figuren viser hvordan den relative effekt ændrer sig som funktion af højden.

Højere vindmøller giver en større effekt ved at gøre det muligt med længere vinger, men også ved at vindhastigheden forøges i højden.



5.

Hvor meget energi kan vi høste - Betz lov med brug af differentialregning

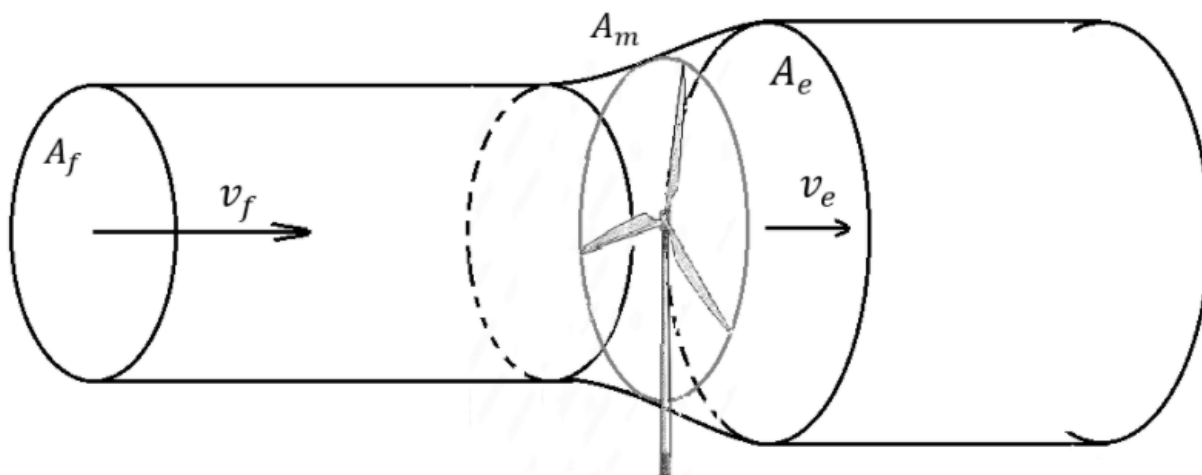


Den tyske fysiker Alfred Betz viste allerede i 1919, at der er en bestemt øvre grænse for, hvor mange procent vindenergi, vi teoretisk kan høste ud af en blæsende luftmængde. Det kan forekomme mærkeligt, men det modsatte ville også være underligt: Kunne vi høste næsten alt, ville der være vindstille bag møllerne – og det ville betyde en ophobning af luft! Så der må rent intuitivt være en grænse. Den grænse kan vi udlede, ligesom Betz gjorde, med brug af differentialregning. Det er et virkelig smukt eksempel på optimering og på anvendelse af differentialregningen.

5. Hvor meget energi kan man høste

Når vinden rammer møllevingerne, omdannes vindens kinetiske energi først til kinetisk energi af vingerne, der så via en generator omdannes til elektrisk energi, der sendes til elnettet. Af al den luft der passerer forbi møllevingerne, er det kun den cylinderformede del af luften der kommer lige mod vingerne, der kan bidrage med overførsel af kinetisk energi fra luft til mølle.

Da luften mister en del af sin kinetiske energi ved sammenstødet med møllevingerne, vil den have en lavere fart – som vi kalder v_e efter mødet med vingerne. Fra Bernoullis lov ved vi, at luften pga. den aftagende fart vil have et stigende tryk og luftcylinderen der rammer møllen vil derfor udvide sig under og efter passagen af vindmøllen – se figuren:



Vi indfører notationen A_f , A_m og A_e for arealet af luftcylinderen der rammer møllen hhv. før, under og efter passagen af rotoren. Hvis vi kalder luftens fart før den rammer møllen for v_f vil den i løbet af et tidsrum Δt bevæge sig længden $l = v_f \cdot \Delta t$ og rumfanget af den indkomne luft i tidsrummet Δt bliver derfor $V_{ind} = v_f \cdot \Delta t \cdot A_f$. For at finde den kinetiske energi af denne luftmængde har vi brug for massen af den indkomne luft i den cylinder, der udvider sig og rammer rotoren. Denne kan beregnes som densiteten af luften ganget med luftens volumen

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot v_f \cdot \Delta t \cdot A_f$$

Øvelse 5.1

- a) Brug formelen for kinetisk energi $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ til at vise, at den kinetiske energi der kommer ind mod rotorarealet i løbet af tiden Δt er givet ved formelen:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \rho \cdot \Delta t \cdot A_f \cdot v_f^3$$

- b) Brug definitionen af effekt: $P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$ til at vise, at effekten af den energi, der passerer møllen i et tværsnitsareal af størrelsen A_m , er: $P = \frac{1}{2} \rho \cdot A_m \cdot v_f^3$ (0)

Vi skal bruge resultatet fra b) senere til at beregne nyttevirkningsgraden for en vindmølle!

5.1 Udledning af Betz lov

Den luftmængde, der bærer vinden, som afleverer energi til møllen, skal jo væk igen, så vi kan aldrig udnytte vindenergien 100%. I det følgende skal du i en række opgaver udlede Betz lov, der beskriver hvor stor en nyttevirkning man højst kan få ud af en vindmølle.

Øvelse 5.2 Massebevarelse

Vi indfører betegnelsen v for luftens fart lige ud for møllen og antager at luftens densitet ρ er konstant både før under og efter passagen af møllen.

- a) Vis, at massen af den luft der strømmer gennem de tre arealer pr. sekund, opfylder ligningen:
- $$m'(t) = \rho A_f v_f = \rho A_m v = \rho A_e v_e \quad (1)$$

Øvelse 5.3 Luftens tab af bevægelsesenergi under passagen

Brug formelen for kinetisk energi til at vise, at den energimængde luften afgiver til møllen pr. sekund dvs. luftens effektoverdragelse P_{luft} til møllen, er givet ved

$$P_{luft} = \frac{1}{2} \rho A_m v (v_f^2 - v_e^2) \quad (2)$$

Udtrykket i (2) kan direkte sammenlignes med det arbejde som udføres på møllen pr. sekund beregnet ved lidt fysik på A-niveau. Selv om du ikke har fysik på A-niveau kan du sagtens arbejde videre med opgaverne efter denne øvelse

Øvelse 5.4 (Fysik A only)

Argumentér for, at vindens udførte arbejde på møllen er det samme som møllens arbejde udført på vinden bare med modsat fortegn (brug Newtons 3. lov)

Argumentér dernæst for hvert trin i følgende udledning:

$$\begin{aligned} P_{mølle} &= F_{vind-på-mølle}^{res} \cdot \Delta x / \Delta t \\ &= -F_{mølle-på-vind}^{res} \cdot \Delta x / \Delta t \\ &= -F_{mølle-på-vind}^{res} \cdot v \\ &= -\frac{dp_{vind}}{dt} \cdot v \\ &= -m'(t)(v_e - v_f) \cdot v \\ &= \rho A_m v (v_f - v_e) \cdot v \\ &= \rho A_m v^2 (v_f - v_e) \end{aligned} \quad (3)$$

Øvelse 5.5

Benyt, at effekten som luften afgiver (2), er lig med effekten som møllen modtager (3), til at vise at der gælder formelen

$$v \cdot (v_f - v_e) = \frac{v_f^2 - v_e^2}{2}$$

Udnyt dette til at vise, at farten v ved selve møllen, er gennemsnitsfarten af vindhastighederne før og efter møllen:

$$v = \frac{v_f + v_e}{2} \quad (4)$$

Øvelse 5.6

Udnyt resultatet (4) til at vise, at effekten der suges ud af vinden (2) er

$$P_{luft} = \frac{1}{4} \rho A_m (v_f^3 + v_e v_f^2 - v_e^2 v_f - v_e^3) \quad (5)$$

Sæt v_f^3 udenfor parentesen i (5) og indfør variabelen $x = \frac{v_e}{v_f}$ der udtrykker forholdet mellem vindhastighederne før og efter passage af møllen. Du skal få følgende

$$\begin{aligned} P_{luft} &= \frac{1}{4} \rho A_m (v_f^3 + v_e v_f^2 - v_e^2 v_f - v_e^3) \\ &= \frac{1}{4} \rho A_m v_f^3 \left(\frac{v_f^3}{v_f^3} + \frac{v_e v_f^2}{v_f^3} - \frac{v_e^2 v_f}{v_f^3} - \frac{v_e^3}{v_f^3} \right) \\ &= \frac{1}{4} \rho A_m v_f^3 \left(1 + \frac{v_e}{v_f} - \frac{v_e^2}{v_f^2} - \frac{v_e^3}{v_f^3} \right) \\ &= \frac{1}{4} \rho A_m v_f^3 \left(1 + \frac{v_e}{v_f} - \left(\frac{v_e}{v_f} \right)^2 - \left(\frac{v_e}{v_f} \right)^3 \right) \\ &= \frac{1}{4} \rho A_m v_f^3 (1 + x - x^2 - x^3) \end{aligned} \quad (6)$$

Ligning (6) viser, at effekten suget ud af luftens vindenergi er en funktion af forholdet x samt, at denne effekt er proportional med vindhastigheden før møllen i 3. potens.

Møllens nyttevirkningen $\eta = \frac{\Delta E_{nytte}}{\Delta E_{tilført}}$ er forholdet mellem hvor meget energi der tilføres møllen og hvor meget energi, møllen rent faktisk kan suge ud af luften.

Øvelse 5.7

a) Brug definitionen af effekt $P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$ til at vise, at der generelt gælder

$$\eta = \frac{P_{nytte}}{P_{tilført}}$$

b) Brug (0) fra øvelse 5.1 til at vise, at nyttevirkningen for en vindmølle er givet ved Betz' lov:

$$\eta = \eta(x) = \frac{1}{2} (1 + x - x^2 - x^3), \quad (7)$$

hvor $x = \frac{v_e}{v_f}$ er forholdet mellem vindhastighederne før og efter passage af møllen.

Med formelen (7) er vi nu pludselig kommet i en ganske velkendt situation: Vi har en funktion $\eta(x)$ som vi ønsker at finde maksimum for, så det er ren grafundersøgelse:

Øvelse 5.8

- a) Hvilken type funktion er $\eta(x)$?
- b) Tegn grafen for funktionen $\eta(x)$ og beregn dens rødder.
- c) Hvilken af rødderne giver ikke fysisk mening i virkeligheden. Og hvorfor giver den anden ikke mening? (vink: Tænk over forholdet $x = \frac{V_e}{V_f}$).
- d) Hvad er det højeste dette forhold kan være i praksis? Hvor stor er udnyttelsen af vindenergien i denne situation? Passer det med grafen for nyttevirkningen?
- e) Hvad svarer $x = 0$ til? Hvorfor kan det ikke lade sig gøre i praksis?

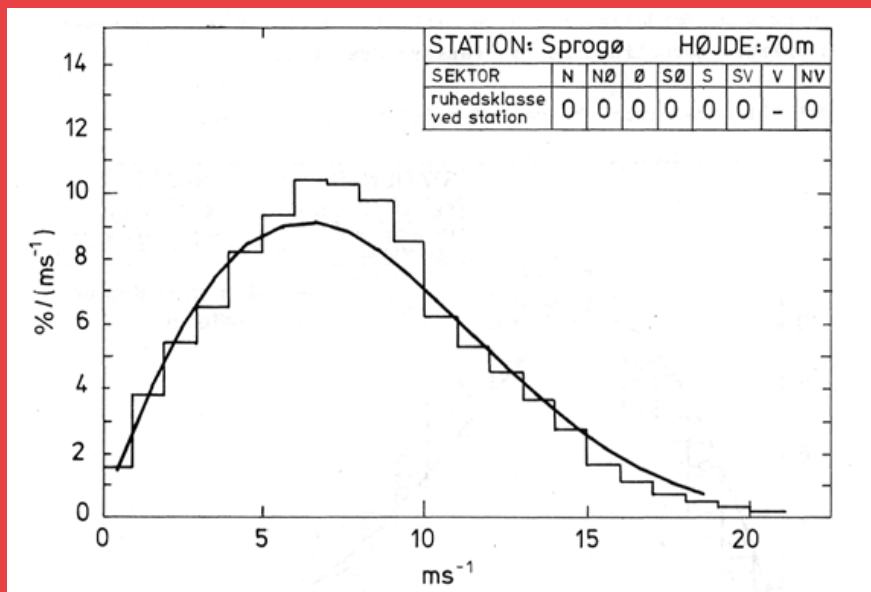
Øvelse 5.9

Lav en monotoniundersøgelse for funktionen $\eta(x)$ og vis, at

- a) maksimumstedet er $x_0 = \frac{1}{3}$
- b) maksimumsværdien for nyttevirkningen er $\eta(x_0) = \frac{16}{27} = 59,26\%$

6.

Hvorfor blæser det – hvor blæser det?

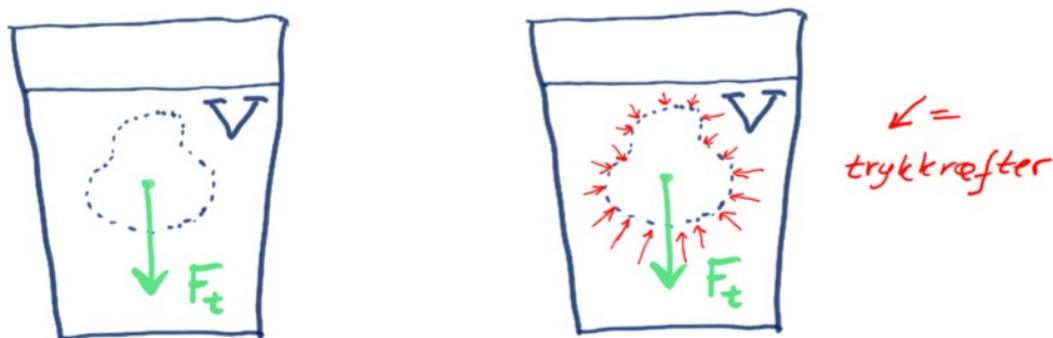


Mon ikke de fleste har en fornemmelse af, hvorfor det blæser – og blæser meget i Danmark og meget mindre i store fastlandsområder som Sibirien eller de store ørkener. Eller man har lært om det i naturgeografi. Men dynamikken i de store globale vejrssystemer er meget kompliceret – det vil vi give et indblik i, men hovedvægten i kapitlet ligger på spørgsmålet: Er der en bestemt fordeling af vindhastighederne? Selvfølgelig forskellig fra sted til sted, men beskrevet med samme statistiske metoder? Det er indlysende at de, som udnytter vinden, er interesseret i den slags spørgsmål, når de fx skal planlægge og lave prognoser. Svaret er – ja, det er der. Vi lærer i dette kapitel om en ny statistisk fordeling, Weibullfordelingen, der kommer i spil her.

6. Hvorfor blæser det – hvor blæser det

6.1 Opdrift og hvorfor varm luft stiger til vejrs

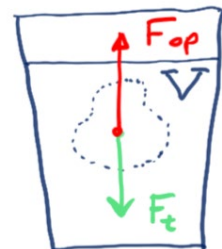
I alle væsker og gasser virker der opdriftskræfter på alt hvad der befinder sig i væsken (gassen). Opdriftskraften er modsat rettet tyngdekraften, og man kan indse hvordan den kan beregnes ved at lave et lille tankeeksperiment. Vi ser på et glas med vand, og zoomer ind på et bestemt lille område V af vandet der kan have en hvilken som helst form:



Voluminet V er fyldt med væsken, så der er en samlet tyngdekraft F_t på voluminet med størrelsen: $F_t = m_V \cdot g$

-hvor m_V er massen af vandet i område V og g er tyngdeaccelerationen. Selvom vandet i V er påvirket af tyngdekraften, falder det jo ikke ned i bunden af glasset men holder sig "flydende".

Men så må der jo være nogle andre kræfter der holder det oppe! De kræfter der holder boblen oppe, er trykkræfter fra det vand der er udenom – de er på figuren vist som små røde pile. Tilsammen udgør disse røde trykkræfter en kraft vi kalder opdriftskraften F_{op} på området. Og da vores tænkte vandboble holder sig svævende må der gælde, at størrelsen af opdriften på boblen er præcis lig med tyngdekraften på boblen. Dvs $F_{op} = m_V \cdot g$



Hvis vi kender væskens densitet $\rho_{\text{væske}}$ kan vi beregne opdriften på rumfanget V ved

$$F_{op} = \rho_{\text{væske}} \cdot V \cdot g$$

Da trykkræfterne (de røde pile) er ligeglade med hvad det er de trykker på, vil vi få nøjagtig den samme opdriftskraft, hvis vi udskifter vores tænkte rumfang med en ting (ikke vand), der har nøjagtig samme form. Vi har dermed formlen for opdriftskraften på en ting der befinder sig i væsken:

$$F_{op} = \rho_{\text{væske}} \cdot V_{\text{ting}} \cdot g$$

-hvor V_{ting} er rumfanget af den del af tingen der er helt nedsænket i væsken. Læg godt mærke til, at $\rho_{\text{væske}}$ er densiteten af den væske eller gas der er **udenfor** det område eller den ting vi vil beregne opdriften på!

6.1.1 Hvorfor stiger varm luft op?

Det er en erfaringssag, at luft udvider sig når det bliver varmt. Vi kigger nu på et område V af luften der bliver varmere:



I figuren til venstre er temperaturen udenfor området V den samme som temperaturen inde i V . Opdriften på V er derfor lig med tyngdekraften på V fordi densiteten af gassen inde i området er den samme som densiteten udenfor:

$$F_{op} = \rho \cdot V \cdot g$$

$$F_t = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g$$

Hvis luften i V varmes op, udvider den sig til et rumfang, vi kan kalde $V_{\text{større}}$. Men ifølge opdriftsformlen bliver opdriften så større end tyngdekraften, der stadig er den samme (området indeholder jo stadig samme antal luftmolekyler, der stadig vejer det samme). Den samlede kraft på hele området er derfor opadrettet og har størrelsen

$$F_{\text{samlet}} = \rho \cdot (V_{\text{større}} - V) \cdot g$$

og luftboblen stiger derfor opad. Vi har altså etableret, at varm luft stiger til vejrs.

Øvelse 6.1

Densiteten for atmosfærisk luft er ca. $1,2 \text{ kg/m}^3$. En bestemt person har rumfanget $V = 0,080 \text{ m}^3$.

- Beregn opdriften på personen fra luften og beregn tyngdekraften på personen.
- Personen stiller sig på en badevægt og aflæser vægten til $78,5 \text{ kg}$, men da personen er påvirket af opdriften fra luften burde vægten jo egentlig vise mere. Hvor stor en fejl er der på vægtens visning i denne situation?

Øvelse 6.2

En fyldt mælkekarton har rumfang $1,1 \text{ Liter}$. Mælk og karton vejer tilsammen 1030 g . Mælkekartonen placeres nu på bunden af en sø, så den er helt neddykket.

- Beregn tyngdekraften på den fyldte mælkekarton.
- Beregn opdriften på den fyldte mælkekarton – sæt vands densitet til $1,000 \text{ kg/Liter}$.
- Nu slippes mælkekartonen.
- Vil mælkekartonen svæve op og flyde ved overfladen eller vil den blive stående på bunden?

Øvelse 6.3

Idealgasligningen $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$ beskriver med god tilnærmelse luftens tilstand i vores atmosfære. I ligningen er P trykket i Pascal, V er rumfanget i m^3 , n er antal mol af gassens molekyler, R er gaskonstanten og T er gassens absolutte temperatur målt i Kelvin.

- Brug idealgasligningen til at forklare hvorfor luft ved et bestemt tryk udvider sig, når det varmes op
- Tør atmosfærisk luft har ca. molarmassen 29 g/mol . Opstil en formel for densiteten af tør atmosfærisk luft ved konstant tryk
- Vis, at densiteten er en aftagende funktion af den absolutte temperatur T

Øvelse 6.4

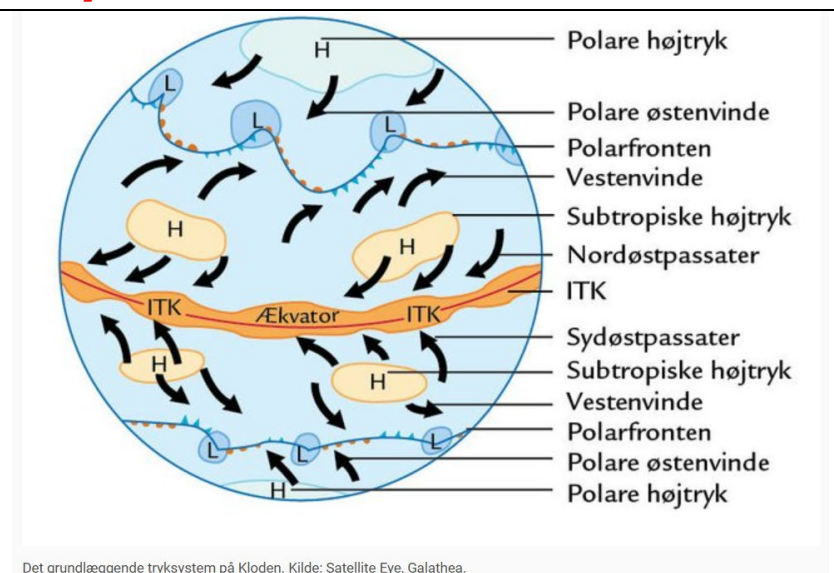
En varmluftsballon virker ved, at man varmer luften i en stor ballon op med en gasbrænder, gennem et hul i bunden af ballonen. Inde i ballonen stiger luftens temperatur, og da ballonen er åben i bunden, er trykket konstant. Densiteten af luften i ballonen falder derfor og dermed også den samlede masse af ballon + luft + nyttelast. Opdriften derimod er konstant! Så derfor vil ballonen lette når den er blevet lettere end den luft den fortrænger

- Find realistiske data for rumfang af en varmluftsballon og temperatur inde i ballonen under flyvning.
- Beregn ud fra de fundne data ca. hvor tung en nyttelast en varmluftsballon kan medbringe

6.2 Det primære vindsystem

Jordens vindsystem får sin energi fra to kilder: Solen og Jordens rotation.

Vind går fra højt tryk mod lavt tryk - ligesom luften der fiser ud af en ballon: der er højt tryk inde i ballonen og lavere tryk udenfor, så trykforskellen driver luften (en vind) ud af ballonen.



6.2.1 Ved ækvator

Ved ækvator er intensiteten af solindstrålingen det højst mulige på jorden. Både jorden og luften opvarmes derfor kraftigt i et bælte tæt ved ækvator og den opvarmede luft stiger til vejrs som vi så i afsnittet ovenover. Samtidig vil trykket i den nedre del af atmosfæren ved ækvator blive lavere pga. varmeudvidelsen. Dette bælte omkring

ækvator (se figuren) kaldes *den intertropiske konvergenszone*, forkortet ITK-zone eller Kalmebæltet (Calm) da det i gennemsnit er et roligt område vindmæssigt:

Den opstigende luft, stopper i en vis højde – den kan trods alt ikke fortætte ud i rummet -ved tropopausen. Her spredes luften mod nord og syd og vil skabe en gradvis ophobning af luft (der var jo luft i forvejen). Omkring 30° nordlig bredde (og tilsvarende sydlig bredde) vil ophobningen være størst. En del af luften synker ned og danner et højtryks-område der kaldes det subtropiske højtryksbælte (se figuren herover).

6.2.2 Hadley- og Ferrellcellerne

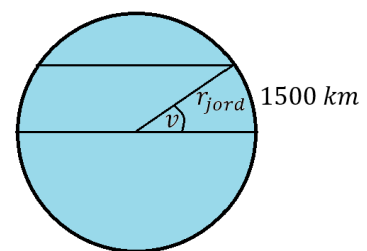
Når luften møder jordoverfladen, søger den væk fra det høje tryk – vind blæser jo fra højt tryk mod lavere tryk. Vindene vil dels være tilbage mod ækvator i passatvindsbæltet og dels mod nord i vestenvindsbæltet, og tilsvarende på den sydlige halvkugle. Cirkulationen mellem ækvator og 30° bredde kaldes Hadleycellen, mens cirkulationen mellem 30° og 60° bredde kaldes Ferrell-cellen

6.2.3 Coriolisafbøjning

På grund af Jordens rotation bevæger luften sig dog ikke direkte mod polområderne, men bøjer af. Luft der er på vej direkte mod nord, kommer jo fra ækvator hvor jordens omdrejningshastighed er ca. 1668 km/t i retning mod øst. Og hvis den ikke bliver bremset af andet, vil den stadig have denne hastighed i retning mod øst når den er kommet f.eks. 1500 km mod nord. Men 1500 km mod nord er jordens omdrejningshastighed mod øst kun ca. 1622 km/t. Så for dem der bor her, vil luften der kommer fra ækvator have en fart på ca. $1668 - 1622 = 46$ km/t i retning mod øst!

Øvelse 6.4

- a) Brug jordens radius $r_{jord} = 6371$ km til at regne efter, at jordens omdrejningsfart ved ækvator er 1668 km/t
- b) Forklar, at vinklen v mellem ækvator og en radius op til 1500 km nord for ækvator kan beregnes ved at løse ligningen: $\frac{1500}{2\pi r_{jord}} = \frac{v}{360}$



- c) Beregn vinklen v og bestem radius i omdrejningscirklen 1500 km nord for ækvator
- d) Beregn jordens omdrejningsfart 1500 km nord for ækvator.
- e) Generaliser din beregning til en formel for jordens omdrejningsfart $v(x)$ som funktion af afstanden x til ækvator.
- f) Tjek at din formel er korrekt ved at indsætte $\frac{1}{4}$ af jordens omkreds i formlen. Hvad bør resultatet være?

På tilsvarende måde kan man argumentere for, at luft der er på vej sydpå på den nordlige halvkugle vil afbøjes mod vest. Så på den nordlige halvkugle er reglen: luft der er på vej i nord- eller sydgående retning vil afbøjes mod højre.

Øvelse 6.5

Hvad vil reglen for vindafbøjning være på den sydlige halvkugle?

Fænomenet kaldes "Corioliskraften" og det er altså jordens rotation der driver denne afbøjning (eller dette hastighedsskift) af vindene.

6.2.4 Polarområderne

I polområderne er den vedvarende afkøling af luften årsag til, at luftens densitet stiger og luften "falder derfor ned". Dette genererer et kuldehøjtryk. Den kolde luft strømmer væk fra højtrykket, og omkring 60° bredde mødes den med den varmere luft fra vestenvindbæltet. Ved dette møde stiger den varmere luft til vejrs og danner et bredt skybælte.

I området med denne opstigning falder trykket, og der er derfor generelt lavt tryk omkring 60° nordlig (og sydlig) bredde. Skillefladen mellem den varme og den kolde luft kaldes polarfronten.

Øvelse 6.6

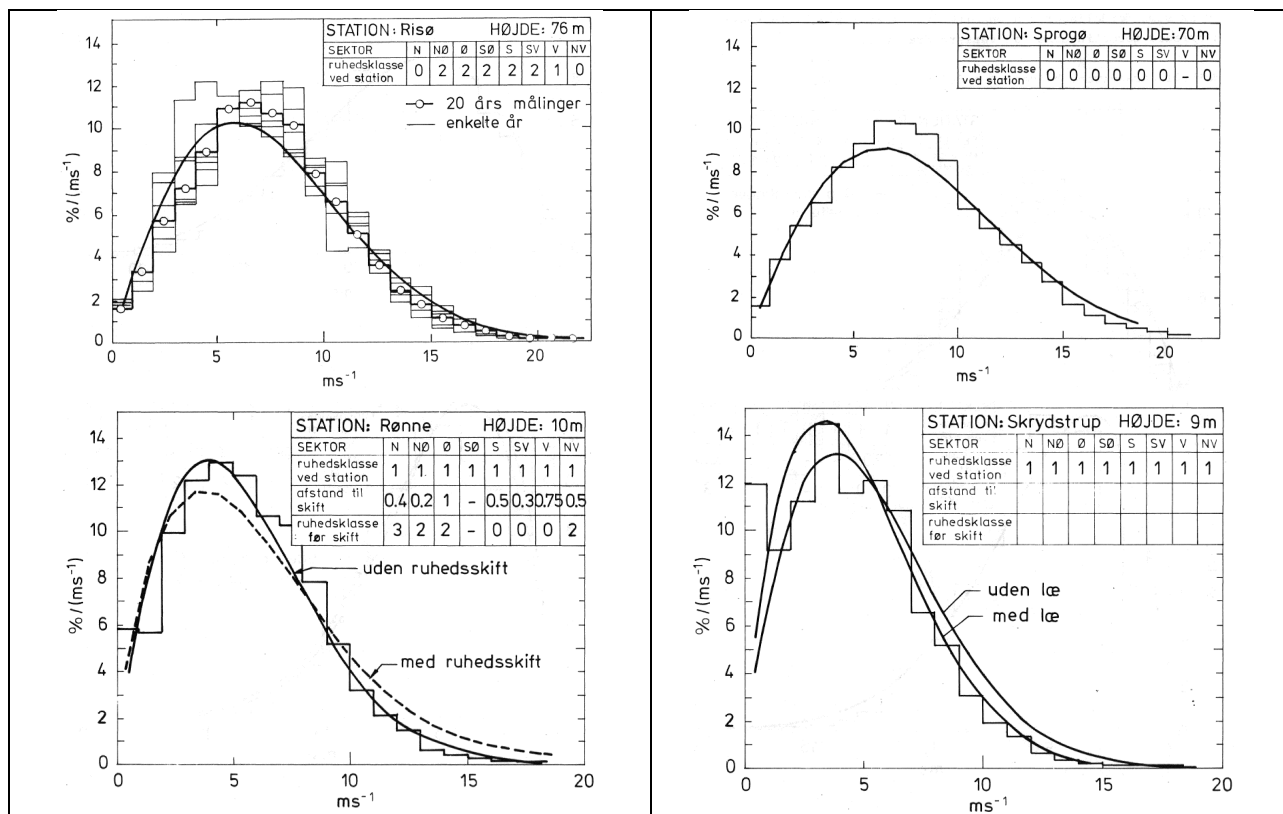
Overvej, hvor på jorden det vil være en god idé at placere store vindmølleparker.

Hvorfor er det ikke en god idé at satse på vindenergi i området omkring ækvator.



6.3 Hyppigheden af de forskellige vindhastigheder

Betragt nøje disse grafer. De viser den statistiske fordeling af de forskellige observerede vindhastigheder et bestemt geografisk sted. Døgnet inddeles i 10-minutters intervaller, og i hvert interval udregnes den gennemsnitlige vindhastighed. Det gøres hvert døgn over flere år, og den store datamængde præsenteres så endelig i et histogram



kilde: Vindatlas for Danmark DTU 1980

Det viser sig, at fordelingen af vindhastigheder har fælles træk, uanset hvor på kloden man er. Her er vist data fra fire målestationer i Danmark, data der er samlet i forskellige højder og over adskillige år: Sprogø kun 2 år, Rønne 12 år, Skrydstrup 8 år (kilde: Vindatlas for Danmark DTU 1980)

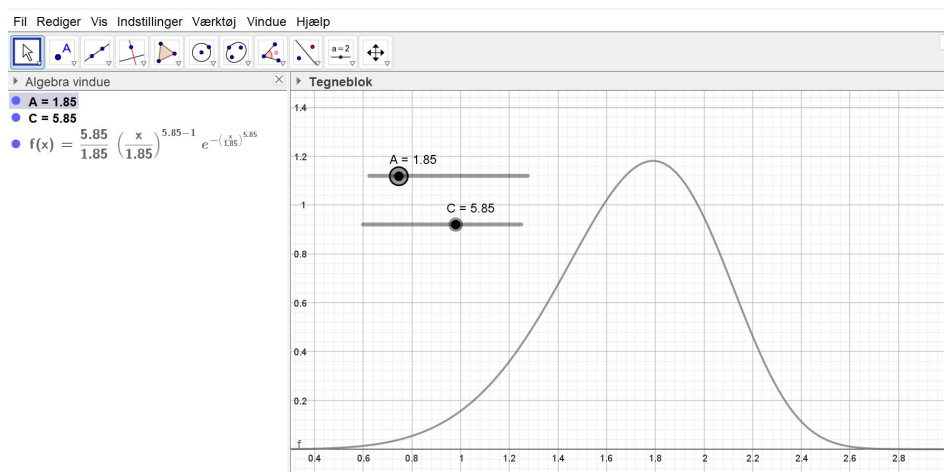
Man ser, at trods forskelle i højder har alle histogrammerne en del fælles træk og beskrives fornuftigt af de Fuldt optrukne kurver. Fordelingen af vindhastighederne er ikke symmetrisk, som vi kender det fra normalfordelingen. Modellerne, der er tegnet ind, er *frekvensfunktioner* for den såkaldte Weibull-fordeling. Det er funktioner med forskrifter:

$$f_{A,C}(x) = \frac{C}{A} \cdot \left(\frac{x}{A}\right)^{C-1} e^{-(x/A)^C}$$

Her er $x \geq 0$ vindhastigheden målt i m/s, $A > 0$ er en *skaleringsparameter* og $C > 0$ kaldes *formfaktoren*. Vi starter med at undersøge, hvordan graferne for disse frekvensfunktioner afhænger af parametrene A og C

Øvelse 6.7

Opret funktionen med skydere for parametrene A og C i et værktøjsprogram som f.eks. Geogebra som vist her:



- Undersøg, hvilken betydning skaleringsparameteren A har for grafens udseende.
- Undersøg, hvilken betydning formfaktoren C har for grafens udseende – hvorfor kaldes C for formfaktoren?
- For en bestemt værdi c_0 af formfaktoren skifter funktionen fra at have et globalt maksimums punkt til at være en monotont aftagende funktion. Bestem tallet c_0 .

Tabellen herunder viser de parametre, der er brugt for de forskellige målestationer:

Flyvestation	A (m/s)	C	Højde (m)
Ålborg	6,2	1,79	10
Karup	5,86	1,69	10
Skrydstrup	6,07	1,78	9
Skrydstrup (med lækorrektion)	5,4	1,71	9
Tirstrup	5,2	1,8	10
Avnø	6,6	1,83	10

Værløse (vest sektor)	7,1	1,91	10
Værløse (alle sektorer, ruhed 2)	5,9	1,8	10
Værløse (alle sektorer, ruhed 3)	5,6	1,78	10
Rønne (uden ruhedsskift)	6,7	1,68	10
Rønne (med ruhedsskift)	6,2	1,79	10
Beldringe (uden ruhedsskift)	5,9	1,77	8
Beldringe (med ruhedsskift)	5,6	1,73	8
Sprogø	9,2	1,92	70
Risø	8,3	1,96	76

Øvelse 6.8

Tegn frekvensfunktioner for Weibull-fordelingerne for Risø og Sprogø ved hjælp af parametrene fra tabellen. Passer det med graferne fra figuren ovenfor?

Projektoplæg del 1 om vind og Weibull-fordelingen:

Ret affinitet i akserne og skaleringsfaktorens betydning

Forestil dig, at du har grafen for en funktion f og et positivt tal k . Ved en *ret affinitet i y-aksen* af grafen for f forstår vi grafen for funktionen:

$$h_k(x) = f\left(\frac{x}{k}\right)$$

Tallet k kaldes forvandlingstallet for affiniteten.

- a) Vis, at hvis $(x, f(x))$ er et punkt på grafen for f , så vil punktet $(k \cdot x, f(x))$ være et punkt på grafen for h_k .

Bemærk, at den nye graf for h_k har de samme funktionsværdier som den gamle, de fremkommer bare først ved x -værdien $k \cdot x$ i stedet for ved x . Man kan sige, at grafen bliver "ganget vandret væk" fra y -aksen med forvandlingstallet k .

- b) Prøv at forudsige hvordan grafen for $\sin\left(\frac{x}{5}\right)$ vil se ud i forhold til grafen for $\sin(x)$.

Plot graferne for begge funktioner i samme koordinatsystem og tjek din forudsigelse

- c) Prøv at lave samme sammenligning for funktionen $\sin(3x)$.

Tilsvarende defineres en *ret affinitet i x-aksen med forvandlingstal k* ved funktionen:

$$g_k(x) = k \cdot f(x)$$

- d) Argumentér for, at hvis $(x, f(x))$ er et punkt på grafen for f , så vil punktet

$$(x, k \cdot f(x)) \text{ være et punkt på grafen for } g_k$$

- e) Gør rede for, at frekvensfunktionerne for Weibull-fordelinger er en ret affinitet i både x - og y -aksen med forvandlingstallet (skaleringsfaktoren) A af funktionen

$$f(x) = C \cdot x^{C-1} e^{-(x)^C}$$

Når formfaktoren C er større end 1 vil frekvensfunktionerne for Weibull-fordelingerne altid have et maksimumspunkt. Førstekординaten til dette punkt er den mest sandsynlige vindhastighed ifølge Weibull-fordelingerne.

Øvelse 6.9 Den mest sandsynlige hastighed

Vis, at den mest sandsynlige hastighed v_{mod} (hastigheden ved maksimumspunktet) generelt er givet ved formlen:

$$v_{\text{mod}} = A \left(\frac{C-1}{C} \right)^{1/C}$$

Beregn ved hjælp af tabellen over Weibull-parametre (Tabel 1) den mest sandsynlige vindhastighed på Avnø i 10 meters højde

På Storebæltsbroen kommer man op i en højde på ca. 70 m.

Brug Weibull-parametrene for Sprogø (se tabellen i øvelse 2.7) til at bestemme den mest sandsynlige vindhastighed på Storebæltsbroen (højbroen).

Den mest sandsynlige vindhastighed kaldes også *modalhastigheden*. Modalhastigheden er ikke nødvendigvis den gennemsnitlige vindhastighed eller medianen af vindhastighederne for den sags skyld, men den ligger ofte tæt på.

Medianen for vindhastighederne kan beregnes ved hjælp af *fordelingsfunktionen*:

$$F_{A,C}(x) = \int_0^x f_{A,C}(t) dt.$$

Fordelingsfunktionen for Weibull-fordelingen viser, hvor mange procent af de målte vindhastigheder, der er x eller derunder. Fordelingsfunktionen er arealfunktion for $f_{A,C}(x)$ med udgangspunkt i 0 og dermed stamfunktion til denne.

Øvelse 6.10 Fordelingsfunktionen for Weibull-fordelingen givet ved en formel

Vis, at fordelingsfunktionen $F_{A,C}(x)$ for Weibull-fordelingen er givet ved:

$$F_{A,C}(x) = 1 - e^{-(x/A)^C}$$

(Vink: Differentier og se efter)

Øvelse 6.11. Medianen og den mest sandsynlige vindhastighed

Tegn grafen for fordelingsfunktionerne $F_{A,C}(x)$ for både Sprogø og Avnø i samme koordinatsystem og forklar ud fra graferne, hvordan man kan se, at det blæser mere og kraftigere over Storebælt i 70 m højde end over Avnø i 10 m højde.

Medianen er som bekendt den x -værdi, der adskiller de 50% laveste vindhastigheder fra de 50% største.

Vis, at medianen for Weibull-fordelingen generelt er givet ved

$$m = A(\ln(2))^{1/C}$$

Beregn medianen for vindhastighederne på Avnø og Storebæltsbroen og sammenlign med de mest sandsynlige hastigheder.

Øvelse 6.12 Sandsynligheden for at en vindmølle standses pga kraftig blæst

Vindmøller standses som regel når vindhastighederne er 20-25 m/s

- a) Hvor mange procent af tiden vil en vindmølle i Storebælt med en navhøjde på 70 m stå stille pga. for kraftig vind på over 20m/s? Og hvor mange procent hvis grænsen er 25m/s?

Som i hypotesetest kan vi med fordelingsfunktionen finde den vindhastighed $v_{\min}$ der adskiller de 2,5% laveste vindhastigheder fra resten. Og på samme måde kan vi finde den vindhastighed $v_{\max}$ der adskiller de 2,5% højeste vindhastigheder fra resten.

- b) Bestem $v_{\min}$ og $v_{\max}$, og fortolk intervallet $[v_{\min}; v_{\max}]$

6.3.1 Vindhastighed og energi – gennemsnitlig effekt

Middelhastigheden

Vi husker, at middelværdien for en diskret stokastisk variabel X er defineret ud fra sandsynlighederne:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i)$$

På samme måde kan middelværdien for en kontinuert positiv stokastisk variabel X generelt defineres ud fra sin frekvensfunktion:

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

Selvom vi godt kan finde en stamfunktion til frekvensfunktionen, viser det sig ofte at være væsentligt mere besværligt at bestemme middelværdien. Ikke desto mindre kan den bestemmes med *numeriske integration* i dit værktøjsprogram.

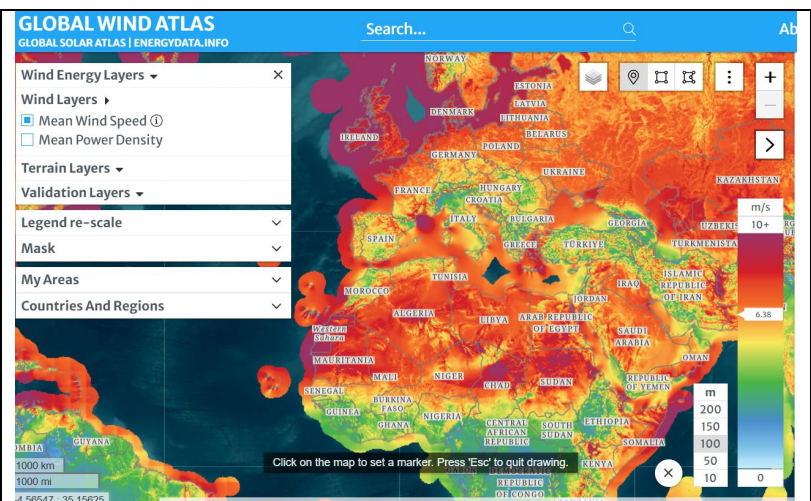
Øvelse 6.13 Beregning af vindhastighedernes middelværdi

Beregn middelværdien af vindhastighederne på Storebæltsbroen og på Avnø, ved brug af de tilhørende Weibull frekvensfunktioner $f_{A,C}(x)$.

På siden:

<https://globalwindatlas.info/en/>

kan man selv interaktivt finde gennemsnits vindhastigheder overalt på kloden:



Undersøg, om de beregnede middelhastigheder passer nogenlunde med vindatlasset.

Middelværdier for funktioner af den stokastiske variabel

Ofte vil vi arbejde med en funktion af hastigheden, som når vi f.eks. skal beregne den kinetiske energi $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$. Hvis vi skal bestemme middelværdien $E(g(X))$ af en

funktion $g(X)$ af vores stokastiske stokastisk variabel X , sker det på samme måde, som da vi ovenfor beregnede middelværdien af X :

$$E(g(X)) = \int_0^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx$$

Dette kan f.eks. udnyttes til at beregne varians og spredning for vindhastighederne.

Varians og spredning

Variansen for en diskret stokastisk variabel X er defineret som *middelværdien af kvadratet på afvigelserne af X fra middelværdien $E(X)$* . $E(X)$ betegnes også μ :

$$\text{Var}(X) = E((X - \mu)^2) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i)$$

Dette kan også generaliseres til kontinuerte fordelinger som vores Weibull-fordeling:

$$\text{Var}(X) = E((X - \mu)^2) = \int_0^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad (1)$$

Øvelse 6.14

Vis, ved at følge nedenstående trin, at der også for kontinuerte stokastiske variable gælder formelen: $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$

- Start med definitions-ligningen (1) ovenfor og gang parentesen ud
- Gang frekvensfunktionen ind i parentesen og opdel integralet i tre separate integraler
- Sæt alle konstanter udenfor integrationstegnet – husk middelværdien μ er også en konstant
- Udnyt, at $\mu = \int_0^{\infty} x \cdot f(x) dx$ til at reducere leddet med negativt fortegn
- Argumentér for, at $\int_0^{\infty} f(x) dx = 1$ og udnyt dette til at reducere det sidste led
- Reducér nu det samlede udtryk og formelen er udledt

Øvelse 6.15

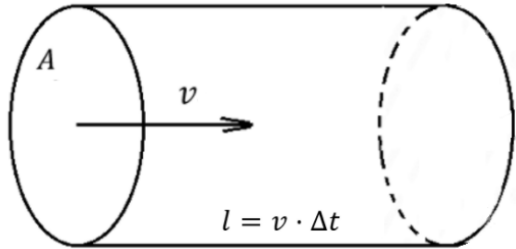
Brug formlerne: $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$ og $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$ til at løse følgende:

- Bestem middelværdi og spredning af vindhastighederne for de to lokationer Avnø og Storebæltsbroen (Sprogø)
- Hvad er sandsynligheden for at vinden blæser med en hastighed i intervallet $[E(X) - \sigma; E(X) + \sigma]$ ved de to lokationer
- Hvad er sandsynligheden for at vinden blæser med en hastighed i intervallet $[E(X) - 2\sigma; E(X) + 2\sigma]$ ved de to lokationer

Sammenlign b) og c) med, hvad der gælder for en normalfordelt stokastisk variabel.

6.3.2 Luftens energi- og effektstrøm

Vi undersøger nu, hvor meget bevægelsesenergi der passerer gennem et tværsnitsareal A , som bæres af den vind, der passerer vinkelret gennem arealet med farten v :

Hvis vi kalder luftens fart for v vil den i løbet af et tidsrum Δt bevæge sig længden $l = v \cdot \Delta t$ så luften danner altså ideelt set en cylinder med længden l som vist på figuren og rumfanget af den indkomne luft i tidsrummet Δt bliver derfor $V_{ind} = v \cdot \Delta t \cdot A$.	 The diagram shows a cylinder of air. The left circular face has an area labeled 'A'. An arrow labeled 'v' points to the right, indicating the direction of flow. The length of the cylinder is labeled 'l = v · Δt'. The right circular face is shown as a dashed ellipse to indicate it is at the end of the cylinder.
---	---

For at finde den kinetiske energi af denne luftmængde har vi brug for massen af den indkomne luft i den cylinder, der udvider sig og rammer rotoren. Denne kan beregnes som densiteten af luften ganget med luftens volumen

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot v \cdot \Delta t \cdot A$$

Øvelse 6.16 Kinetisk energi og effekt

- a) Brug formelen for kinetisk energi $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ til at vise, at den kinetiske energi der kommer ind i cylinderen i løbet af tiden Δt er givet ved formelen:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \rho \cdot \Delta t \cdot A \cdot v^3$$

- b) Brug definitionen af effekt: $P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$ til at vise, at effekten P_A af den energi der passerer tværsnitsarealet A er:

$$P_A = \frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot v^3$$

Effekten pr kvadratmeter af en vindhastighed på v , dvs den bevægelsesenergi, der passerer gennem 1 kvadratmeter pr. sekund som følge af vind med hastigheden v er altså givet ved:

$$P_{m^2} = \frac{1}{2} \rho \cdot v^3$$

hvor ρ er luftens densitet.

Man kan nu beregne *middelværdien af den samlede energiflux pr. sekund pr kvadratmeter* ved at integrere:

$$E(P_{m^2}) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \rho \cdot x^3 \cdot f_{A,C}(x) dx,$$

hvor vi nu igen har indført variablen x for vindhastigheden.

Ganger vi dette tal op med, hvor mange sekunder der går på et år, kan vi beregne den samlede energiflux pr. kvadratmeter pr. år – altså hvor meget energi der egentlig passerer hver kvadratmeter om året!

Øvelse 6.17 Middelværdien af vindens effekt

- c) Beregn middelværdien af effekten pr. kvadratmeter ved Storebæltsbroen og på Avnø.
d) Prøv at tjekke med vindatlasset om det passer nogenlunde.

- e) Hvor meget energi passerer der pr. kvadratmeter pr. år ved de to lokationer?
- f) Hvor meget vindenergi passerer der pr. år ved en stor havvindmølle ved Storebælt med en rotordiameter på 200 m?

Svaret på c) og d) lyder måske voldsomt, men til sammenligning producerer et gennemsnitligt atomkraftværk ca. 1 GW altså 1×10^9 J pr. sekund.

Hvor mange sekunder skal et atomkraftværk køre for at afgive samme energimængde som en stor havvindmølle ved Storebælt leverer på et helt år?

Projektoplæg om vind og Weibull-fordelingen

Integrer med projektoplæg del 1 og udvælg yderligere et antal af de teoretiske øvelser 2.9-2.16.

Gennemfør et praktisk eksperiment med måling af vindhastigheder et bestemt sted og over en vis tidsperiode

Opstil histogram og bestem Weibull-parametrene i den fordeling, der tilnærmer histogrammet bedst.

Regn på luftens energi og effektstrøm det sted, hvor du har foretaget målingerne

7.

Hvorfor drejer vingerne rundt – aerodynamik og vingedesign



Svaret på overskriftens spørgsmål forekommer måske indlysende: Luftens molekyler rammer de skråstillede vinger og presser dem rundt. Men da det er samme dynamik i luftens strømning, som gør at fly kan flyve, kan man nok se, at svaret må være lidt mere kompliceret at nå frem til. Vi undersøger i kapitlet specielt møllevingernes dynamik og bevæger os her ind på den klassiske mekanik med analyse af inertimomenter og trykgradienter og meget mere, hvor man vil have god gavn af et samarbejde med fysik.

7. Hvorfor drejer vingerne rundt – aerodynamik og vingedesign

A-niveau og indeholder meget fysik

I dette afsnit undersøger vi de vindkræfter, der virker på rotoren og som får den til at dreje rundt. For at give en grundig beskrivelse af dette, er vi nødt til både at indføre begreberne kraftmoment – det fysiske begreb for vrid - og impulsmoment – det fysiske begreb for rotationsmængde samt at udlede den fundamentale sammenhæng der er mellem det samlede kraftmoment på et roterende system og dets tilvækst i impulsmoment. Den store forskel i forhold til den fysik vi normalt bruger i gymnasiet er, at når vi har at gøre med et udstrakt objekt der roterer, kan vi ikke længere beskrive legemet som et punkt. Vi starter derfor med at indføre

Definition: Massemidtpunktet for et system af partikler

Massemidtpunktet $\mathbf{r}_M$ for et system af partikler med den samlede masse M er defineret ved formlen:

$$\mathbf{r}_M = \frac{\sum_{\text{partikler}} m_j \cdot \mathbf{r}_j}{M} \quad (1)$$

dvs. som det masse-vægtede gennemsnit af partiklernes positioner. Hvis systemet ikke består af enkelte partikler, men er et massivt objekt kan man ofte udskifte summeringen med en integration.

Årsagen til, at massemidtpunktet er defineret på netop denne måde, ligger i *massemidt-punktsætningen*. Det viser sig nemlig, at uanset hvad der sker med objektet, så vil massemidtpunktet bevæge sig som om al massen M er placeret i dette og at denne masse i netop dette punkt er påvirket af samtlige ydre kræfter der virker på hele systemet. Denne sætning viser vi i følgende øvelse:

Øvelse 7.1

Argumentér for (ved at differentiere (1) to gange mht. tiden), at massemidtpunktets acceleration er

$$\mathbf{a}_M = \frac{\sum_{\text{partikler}} m_j \cdot \mathbf{a}_j}{M}$$

Argumentér, ved brug af Newtons 2. lov, for at der gælder

$$\mathbf{a}_M = \frac{\sum_{\text{partikler}} \mathbf{F}_{\text{res},j}}{M}$$

hvor $\mathbf{F}_{\text{res},j}$ er den resulterende kraft på partikel nr. j . $\mathbf{F}_{\text{res},j}$ kan nu opdeles i indre og ydre kraftpåvirkninger: $\mathbf{F}_{\text{res},j} = \mathbf{F}_{\text{indre},j} + \mathbf{F}_{\text{ydre},j}$

Udled nu, at

$$M \cdot \mathbf{a}_M = \sum_{\text{partikler}} \mathbf{F}_{\text{indre},j} + \sum_{\text{partikler}} \mathbf{F}_{\text{ydre},j}$$

Argumentér via Newtons 3. lov for (loven om aktion og reaktion), at der endelig gælder

$$M \cdot \mathbf{a}_M = \sum_{\text{partikler}} \mathbf{F}_{\text{ydre},j} = \mathbf{F}_{\text{res}}$$

hvor $\mathbf{F}_{\text{res}}$ er den samlede ydre kraftpåvirkning på systemet.

Massemidtpunktet kaldes også nogle gange for balancepunktet, og før vi går videre er det måske en god idé lige at få lidt intuition for begrebet med et par øvelser. I alle de følgende øvelser med massemidtpunkt må du selv starte med at indlægge et passende koordinatsystem i forhold til objektet som du skal finde massemidtpunktet for.

Øvelse 7.2

En 2,0 meter lang stang (der kan betragtes som masseløs) har en kugle i den ene ende der vejer 3 kg og i den anden ende en kugle med massen 1 kg.

Hvor langt ligger massemidtpunktet fra den tunge kugle?

Vi tilføjer nu en ekstra kugle der kan glide frit frem og tilbage på stangen. Den nye kugle vejer også 3 kg.

Hvor skal den nye kugle placeres for at massemidtpunktet kommer til at ligge 1 meter fra kuglen med masse 1 kg?

Øvelse 7.3

Et partikelsystem består af partiklerne $m_1 = 3 \text{ kg}$ i $P_1(3, -5)$, $m_2 = 20 \text{ kg}$ i $P_2(-6, 2)$ og $m_3 = 5 \text{ kg}$ i $P_3(9, -2)$. Alle koordinater har enheden meter. Beregn massemidtpunktets beliggenhed.

En genvej man hyppigt kan bruge i beregning af et større systems massemidtpunkt er følgende:

Øvelse 7.4

Argumentér for, at man ved beregning af et systems massemidtpunkt har lov til at samle de enkelte dellegemers masse i deres respektive massemidtpunkter, før man beregner det samlede systems massemidtpunkt ud fra dellegemernes massemidtpunkter og masser.

Øvelse 7.5

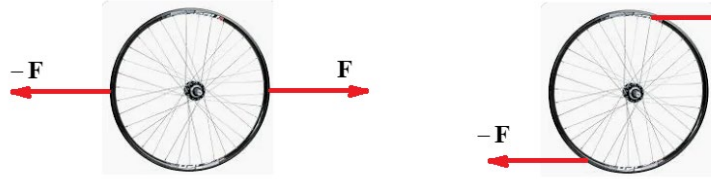
Overvej hvordan man eksperimentelt kan finde massemidtpunktet for en plade af et homogent materiale ved på skift at hænge den op i to forskellige punkter og hver gang lader den "dingle" til den falder til ro (vink: når pladen hænger stille vil massemidtpunktet befinde sig et sted lodret under ophængningspunktet – hvorfor?)

7.1 Kraftmoment og impulsmoment

Her vil det være en stor fordel hvis du allerede kender til krydsproduktet af vektorer i 3 dimensioner!

Det viser sig, at for at beskrive et legemes bevægelsestilstand er det ikke nok bare at kende massemidtpunktets bevægelse. På figuren her ses et cykelhjul, der på to forskellige måder er udsat for den samme resulterende kraft på 0 N:

I begge situationer er den samlede kraft 0 N så massemidtpunktet (centrum af hjulet) vil ikke accelereres. Men erfaringen siger os, at hjulet til højre vil begynde at rotere i urets retning selvom massemidtpunktet forbliver i hvile.



Bevægelsestilstanden udvikler

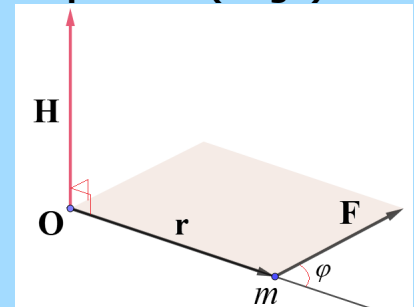
sig altså meget forskelligt selvom begge hjul påvirkes af nøjagtig de samme kræfter. Vi fornemmer jo nok at hjulet til højre bliver "vredet" eller "drejet" rundt og at dette ikke er tilfældet med hjulet til venstre. For at beskrive dette fysisk indfører vi nu

Definition: Kraftmomentet på en partikel i forhold til et punkt O (origo)

Lad os sige, at vi har en partikel med massen m placeret i positionen $\mathbf{r}$ i forhold til punktet $\mathbf{O}$ og at partiklen er påvirket af kraften $\mathbf{F}$:

Vi definerer da kraftmomentet $\mathbf{H}$ som vektoren

$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$



Bemærkning: Læg godt mærke til, at i definitionen står stedvektoren til venstre for kraftvektoren. Hvis man får byttet rundt på de to vektorer, skifter krydsproduktet fortegn. Det er en følge af kendte regneregler for krydsproduktet som vi lige repeterer her:

Faktaboks om kraftmomenter

- 1) Kraftmomentet står vinkelret på både $\mathbf{r}$ og $\mathbf{F}$
- 2) Kraftmomentets størrelse er lig med arealet udspændt af $\mathbf{r}$ og $\mathbf{F}$ og kan beregnes som $|\mathbf{H}| = r \cdot F \cdot \sin(\varphi)$ altså fra størrelsen af de to vektorer samt vinklen mellem dem – se figuren.
- 3) Hvis flere kræfter virker på partiklen, kan vi lægge kraftmomenterne sammen og finde $\mathbf{H}_{\text{res}} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$
- 4) Hvis kraften og stedvektoren er parallelle, er kraftmomentet fra kraften $\mathbf{0}$

Bemærkning: De 4 punkter kan udledes ud fra kendskab til krydsproduktets egenskaber.

Øvelse 7.6

Find størrelsen af det samlede kraftmoment om cykelakslen på cykelhjulet til venstre ovenfor. Kræfter som de viste vil ikke sætte hjulet i rotation.

Find retningen af det samlede kraftmoment om cykelakslen på cykelhjulet til højre ovenfor. Peger kraftmomentet ind eller ud af papiret? Vil disse kræfter sætte hjulet i rotation?

Vi har straks en klar fornemmelse af, at det resulterende kraftmoment skal være forskelligt fra $\mathbf{0}$ for at vi kan sætte noget i roterende bevægelse, men vi skal lige definere hvad rotationsmængde er. Dette gør vi helt i analogi med en partikels bevægelsesmængde:

Definition: Impulsmomentet

Givet en partikel med massen m placeret i positionen $\mathbf{r}$ i forhold til punktet $\mathbf{O}$ og at partiklen har impulsen (bevægelsesmængden) $\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$. Vi definerer da impulsmomentet $\mathbf{L}$ som vektoren:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

Øvelse 7.7

Formulér en **faktaboks** for impulsmomentet $\mathbf{L}$ som dén ovenfor for kraftmoment.

Det viser sig nu - som vores intuition også fornemmer - at der skal et kraftmoment til at øge impulsmomentet i en roterende bevægelse. Dette udtrykkes i følgende meget vigtige sætning:

Impulsmomentsætningen

Det resulterende ydre kraftmoment $\mathbf{H}_{\text{ydre}}$ omkring et punkt er lig med ændringen pr. tidsenhed i systemets impulsmoment $\mathbf{L}$:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{H}_{\text{ydre}}$$

Øvelse 7.8 Bevis Impulsmomentsætningen

- 1) Differentier impulsmomentet for et system af partikler $\mathbf{L} = \sum_{\text{partikler}} \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j$ idet du udnytter, at et krydsprodukt differentieres efter produktreglen:

$$\frac{d(\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t))}{dt} = \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \times \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \times \frac{d\mathbf{b}(t)}{dt}$$

- 2) Udnyt 4) i faktaboksen ovenfor idet positionen differentieret giver hastigheden $\mathbf{v}$ der er parallel med impulsen $\mathbf{p}$
- 3) Udnyt Newtons 3. lov (om aktion og reaktion) til at argumentere for, at de indre kraftmomenter går ud parvis.
- 4) Konkludér, at: $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{\text{partikler}} \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{\text{ydre},j} = \mathbf{H}_{\text{ydre}}$

Sætningen giver straks anledning til følgende vigtige *bevarelsessætning*:

Bevarelsessætning om Impulsmomentet

I et system hvor det ydre kraftmoment mht. et bestemt punkt er nul, er impulsmomentet bevaret, dvs.

$$\mathbf{L} = \text{konstant}$$

Øvelse 7.9

Vi ser på en vindmølle, der kører med konstant antal omgange pr. minut. Vi ser på selve de tre vinger som vores fysiske system, så både nacellen og vinden er ydre påvirkninger. Vindhastigheden og dermed vindens kraftmoment på vingerne er også konstant.

- a) Hvad kan du sige om vingernes impulsmoment om rotationsaksen?

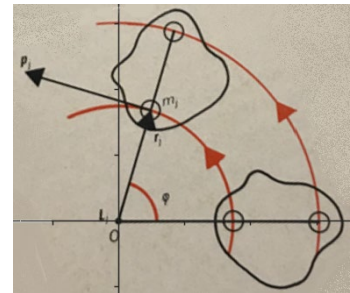
- b) Hvorfor kommer det ydre kraftmoment, der modvirker vindens kraftmoment så $\mathbf{H}_{\text{ydre}} = \mathbf{0}$?

Antag, at vindens kraftmoment på vingerne har størrelsen $H_{\text{vind}} = 1000 \text{ Nm}$ og akslens radius er 10cm

- c) Hvad er størrelsen af kraften F_{aksel} fra vingerne på akslen?

7.2 Rotation om en fast akse - Inertimoment

Vi betragter nu et stift legeme, der roterer om en fast akse, som f.eks. en mølleakse. Da legemet er stift, bevæger de enkelte massedele – f.eks. i møllevingerne – sig i koncentriske cirkler og de har alle *samme* vinkelhastighed ω . Vi indlægger som regel et koordinatsystem der har rotationsaksen som centrum – se figuren her



Øvelse 7.10

- a) Argumenter for, at positionen af en massedel, der til at begynde med ligger i punktet $(r, 0)$, kan beskrives ved en tidsafhængig vektor:

$$\mathbf{r}(t) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix},$$

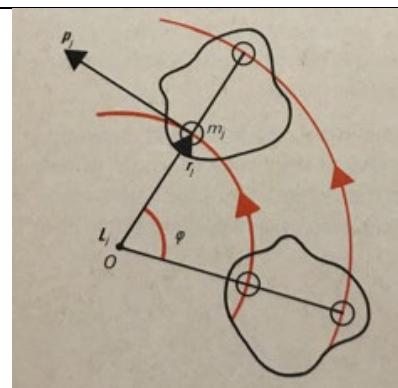
hvor vinkelfunktionen $\theta(t)$ er den vinkel, som vektoren $\mathbf{r}(t)$ danner med x-aksen til tiden t .

Hastigheden af massedelen $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ findes ved at differentiere vektoren $\mathbf{r}(t)$ koordinatvis.

- b) Bestem $\mathbf{v}(t)$ og vis, at den har samme retning som tværvektoren $\hat{\mathbf{r}}$
- c) Vis, at farten v af massedelen (dvs. længden af hastighedsvektoren $\mathbf{v}(t)$) er givet ved $v = \omega \cdot r$, hvor vinkelhastigheden $\omega = \theta'(t)$ er den afledte af vinkelfunktionen

Vi ser nu på en flad skives rotation om den faste akse L , der går gennem punktet O – se figuren herunder.

Den enkelte massedel m_j i skiven har en hastighed, der kan skrives $\mathbf{v}_j = \omega \hat{\mathbf{r}}_j$, hvor $\mathbf{r}_j$ er vektoren fra punktet O ud til den j 'te massedel og $\hat{\mathbf{r}}_j$ er tværvektoren til vektor $\mathbf{r}_j$.



Vi vil nu beregne det samlede impulsmoment for skivens rotation omkring O og se hvad impulsmomentsætningen kan fortælle om skivens bevægelse.

Den j 'te massedels bidrag til impulsmomentet omkring O er

$$\mathbf{L}_j(O) = \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j = \mathbf{r}_j \times (m_j \omega \hat{\mathbf{r}}_j) = m_j \omega r_j^2 \mathbf{e}, \quad (*)$$

idet $\mathbf{r}_j \times \hat{\mathbf{r}}_j = r_j^2 \mathbf{e}$, hvor $\mathbf{e}$ er en enhedsvektor parallel med omdrejningsaksen.

Øvelse 7.11

Hvilken retning har vektoren $\mathbf{e}$ i forhold til figuren ovenfor: ind eller ud af papiret?

Prikker vi med $\mathbf{e}$ på begge sider i (*) finder vi, at impulsmomentet af den j 'te massedel omkring aksens I er

$$L_{jI} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{L}_j(O) = m_j \omega r_j^2$$

Øvelse 7.12

Hvorfor "forsvinder" vektoren $\mathbf{e}$, når vi prikker med den på højre side i (*)?

Nu summerer vi over alle legemets enkelte massedele og får det samlede impulsmoment til

$$L_I = \sum m_j \omega r_j^2 = \omega \sum m_j r_j^2$$

Øvelse 7.13

Hvorfor kan vi sætte vinkelhastigheden ω udenfor summationstegnet?

Læg mærke til, at når vi har udført summationen, er størrelsen $\sum m_j r_j^2$ bare en konstant. Vi kalder denne konstant for legemets **Inertimoment mht. omdrejningsaksen** og noterer det med et stort I :

$$I = \sum m_j r_j^2$$

Og med denne notation får vi impulsmomentet skrevet meget elegant op:

$$L_I = \omega I$$

Nu bruger vi impulsmomentsætningen og finder

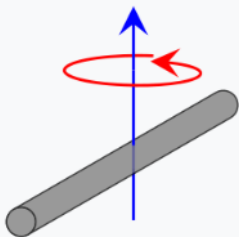
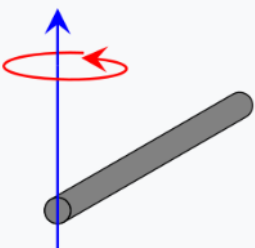
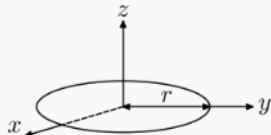
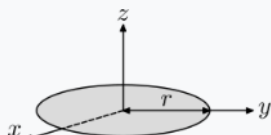
$$H_I = I \frac{d\omega}{dt} = I \omega'(t), \quad (**)$$

hvor H_I er det samlede ydre kraftmoment på legemet mht. aksens I .

Øvelse 7.14

Hvad er enheden for inertimoment?

Vi lægger mærke til, at inertimomentet $I = \sum m_j r_j^2$ udelukkende afhænger af legemets form, massefordeling og placering i forhold til omdrejningsaksen. Det betyder, at én og samme genstand kan have mange forskellige inertimomenter, alt efter hvordan den er placeret i forhold til omdrejningsaksen. Se f.eks. følgende udsnit fra en tabel over inertimomenter (lånt fra Wikipedia)

Thin rod of length L and mass m , perpendicular to the axis of rotation, rotating about its center.		$I_{\text{center}} = \frac{1}{12}mL^2 \quad [1]$
Thin rod of length L and mass m , perpendicular to the axis of rotation, rotating about one end.		$I_{\text{end}} = \frac{1}{3}mL^2 \quad [1]$
Thin circular loop of radius r and mass m .		$I_z = mr^2$ $I_x = I_y = \frac{1}{2}mr^2$
Thin, solid disk of radius r and mass m .		$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2$

Øvelse 7.15 Møllevingernes inertimoment 1

- Antag, at møllevingerne er stive stænger som i tabellen ovenfor. Realistiske tal for en stor vinges længde er $l = 60\text{ m}$ og massen er $m = 13\text{ ton}$
- Beregn det samlede inertimoment for rotoren (antag at vingerne er en homogen stang)
- Antag, at det samlede kraftmoment på vingerne er $H_{\text{vind}} = 100.000\text{ Nm}$
- Benyt (*) til at bestemme $\omega'(t)$
- Find $\omega(t)$ idet du antager $\omega(0) = 0$
- Beregn $\omega(60\text{ sek.})$ og bestem farten af vingespidserne efter 60 sekunder. Lyder det realistisk?

Øvelse 7.16 Møllevingernes inertimoment 2

Hvis vingen skales op eller ned med en forstørrelsesfaktor k ændres længden selvfølgelig til $l' = k \cdot l$, men rumfanget og dermed massen af den massive vinge vil ændre sig til $m' = k^3 \cdot m$, da dens rumfang jo ganges op med k i alle 3 retninger

- Hvad bliver inertimomentet af en enkelt vinge, hvis den har samme form, men kun har længden $l = 30\text{ m}$
- Udled en formel for inertimomentet for en rotor der er skaleret med en faktor k

Øvelse 7.17

Undersøg hvad et cykelhjul vejer og find dets radius. Vurdér ved en overslagsberegning inertimomentet for et cykelhjul

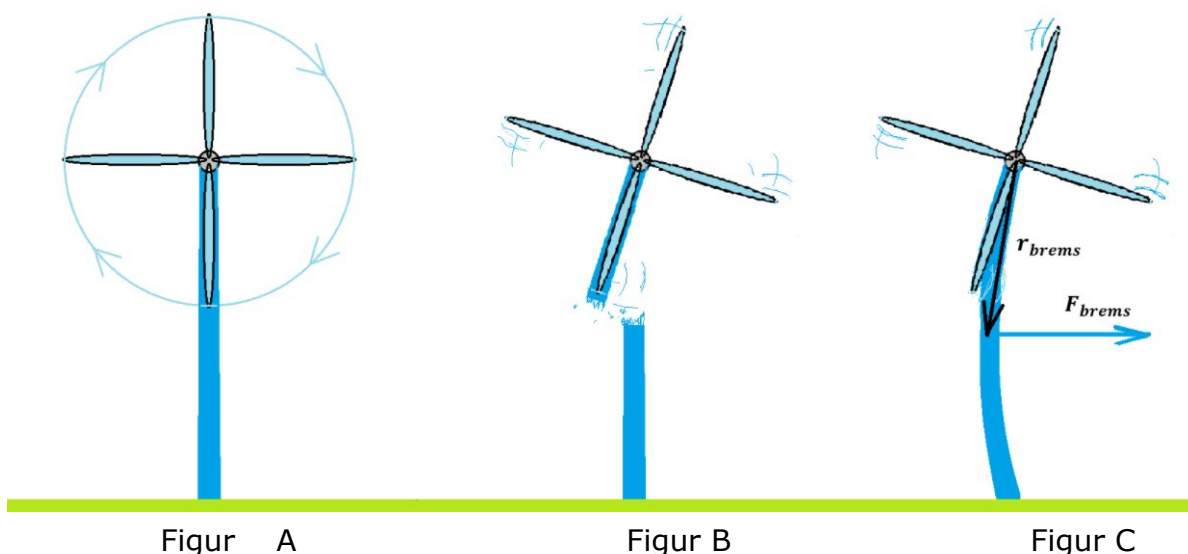
Øvelse 7.18

Hvordan kan en hoppende mountainbikerytter styre om forhjulet eller baghjulet skal lande først?



7.3 Kræfter på mølletårnet ved nedbremsning af rotoren

På figur A herunder ses en mølle der er ved at løbe løbsk. På figur B ser vi en kraftig opbremsning af møllen der sker så hurtigt, at mølletårnet knækker midt over! Hvis mølletårnet ikke er konstrueret solidt nok, kan dette faktisk ske: Hvis møllen pludselig blokeres, vil den stadig have samme impulsmoment som før blokeringen, og hvis vingerne ikke kan dreje rundt, må tårnet dreje med rundt i stedet for, men det kan det jo ikke, da det er støbt fast i jorden. Så der er kun to muligheder: enten knækker tårnet, eller også vil det bue svagt ud (som vist meget overdrevet på den sidste figur) og derved levere de kræfter, der skal til for at bremse møllen op:



Øvelse 7.19 Kræfter under opbremsning af møllen

- Hvilken retning har impulsmomentet L for møllen på figur A?
- Når møllen skal bremses op, hvilken retning har så $\frac{dL}{dt}$?
- Hvilken retning har det ydre kraftmoment på rotoren $H_{yde} = r_{brems} \times F_{brems}$?
- Forklar, hvorfor mølletårnet buer mod venstre, når møllen bremses op. Kraften F_{brems} fra møllen på rotoren peger jo mod højre?

Øvelse 7.20 Størrelsesorden af kræfter på mølletårnet under opbremsning

Vi antager (se tabellen nedenfor med typiske værdier for en stor landvindmølle), at møllens vinger har længde $l = 65\text{ m}$ og massen er $m = 13\text{ ton}$ pr. vinge.

Type	Husstandsmølle	Stor landvindmølle	Havvindmølle (Vestas)
Effekt (MW)	0,006-0,025	4,3	15
Rotordiameter (m)	Op til 16 m	130	236
Tårnhøjde (m)	Op til 25 m	85	Ca. 130
Optimal omdr./min	60–100	Ca. 10–15	Ca. 5–7
Maks. omdr./min	120	Ca. 20	Ca. 10
estimeret vingevegt (tons)	0,050–0,150	12–15	Ca. 55

- Beregn møllevingernes hastighed ved vingspidsen ved (høj) optimal drift.
- Beregn møllevingernes vinkelhastighed ω ved maksimal antal omdrejninger pr. min.
- Beregn rotorens samlede inertimoment – husk der er tre vinger.
- Beregn møllens samlede impulsmoment $L_{\max}$ om rotorakslen ved maksimal antal omdrejninger pr. min.

Antag, at møllen bremses ned fra maksimal antal omdrejninger pr. min. til stilstand på 2,0 sekunder, og at impulsmomentet $L(t)$ under opbremsning falder lineært.

- Beregn det ydre kraftmoment $H_{\text{ydre}} = \frac{dL}{dt}$, der skal til for at sikre opbremsningen.

Vi antager nu, at tårnet er 85 m højt, men at bremsekraften fra tårnet på rotoren kommer fra en afstand på 43 meter under navet.

- Beregn den kraft tårnet påvirkes af (som følge af opbremsningen) i afstanden 43 meter under navet

Vi husker, at 10 N (9,82N) svarer til at man løfter en masse på 1 kg.

- Beregn hvor mange tons vægt kraftpåvirkningen på midten af tårnet svarer til.

Øvelse 7.21

Prøv at lave samme beregninger som i opgaven ovenover for husstandsmøllen og for Vestas store havvindmølle. Lav gerne beregningerne i et regneark så du let kan kopiere beregninger fra den ene type til den anden

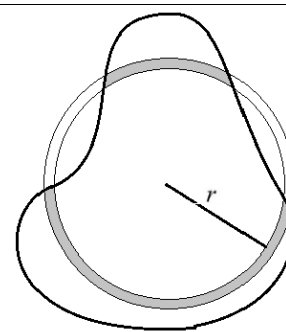
7.3.1 Rotationsenergi – hvordan overføres vindens energi til rotationsenergi af vingerne?

Når vi skal bestemme den samlede rotationsenergi af en roterende plade, kan vi bruge integralregning.

Hvis vi deler pladen op i smalle cirkelstriber med centrum i det punkt der roteres om – se figuren – kan vi skrive den samlede rotationsenergi som

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \int_0^{r_{max}} \rho(r) \cdot v(r)^2 dr \quad (1)$$

hvor $\rho(r)$ er hvor meget masse der er pr. mm tykkelse af cirkelskiven. Det ser lidt voldsomt ud, men i den næste opgave skal vi udlede et simpelt udtryk for rotationsenergien.



Øvelse 7.22

- Argumentér for formlen (1)
- Opskriv integralet (1) og substituer $v(r) = \omega \cdot r$
- Benyt, at vinkelhastigheden er konstant og sæt den udenfor integralet.
- Argumenter for, at integralet nu bare er inertimomentet af pladen og konkluder, at

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I_{plade} \cdot \omega^2$$

- Sammenlign med formlen for kinetisk energi: hvad svarer henholdsvis I_{plade} og ω til i den almindelige formel for kinetisk energi?

Øvelse 7.23

En havvindmølle har en omdrejningsfrekvens på 15 omdrejninger pr. minut. Inertimomentet af hele rotoren sættes til $24 \times 10^6 \text{ kgm}^2$

- Beregn rotorens vinkel hastighed
- Beregn rotorens rotationsenergi.
- Lyder resultatet rimeligt når det er en MW mølle?

Øvelse 7.24 Udledning af vingernes energi- og effektoverførsel til rotorakslen

Vinden påvirker vingen i hele dens længde. Og hver lille overfladedel af vingen der ligger i afstanden r_i fra akslen påvirkes med en kraft F_i , som vi kan antage er vinkelret på radius. Betragt vi vingen i et meget kort tidsrum Δt , vil vindens samlede arbejde ΔA på vingen være

$$\Delta A = \sum_{\text{vingen}} \Delta s_i \cdot F_i = \sum_{\text{vingen}} r_i \cdot \Delta \theta_i \cdot F_i \quad (2)$$

Her er Δs_i er det lille stykke, vingen flytter sig i afstanden r_i fra centrum i tidsrummet Δt , og $\Delta \theta_i$ er den vinkel vingen drejer i samme tidsrum.

- Argumenter for, at alle $\Delta \theta_i$ er ens uanset afstanden til akslen.
- Find et udtryk for effekten P_{vinge} overført af vinden til vingerne ved at dividere ligningen (2) med Δt .
- Udnyt, at $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ og sæt ω udenfor summationstegnet.
- Konkluder, at $P_{vinge} = \omega \cdot H_{yde}$, hvor H_{yde} er det samlede kraftmoment fra vinden på vingen.

- e) Argumenter for, at når rotoren kører med konstant omdrejningstid, så vil P_{vinge} være lig med P_{aksel} , hvor P_{aksel} er den effekt akslen modtager fra vingen
- f) Overvej, hvordan resultatet i d) og e) ændres, hvis der er flere end én vinge på møllen – det er der jo som regel.
- Kig på formel (2) igen. Hvorfor kan vi antage, at kraften $\mathbf{F}_i$ er vinkelret på radius? (Vink: opdel kraften i en komponent der er vinkelret på radius og en der er parallel med radius. Hvad reducerer skalarproduktet $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i$ til?)

7.4 Tryk og trykgradientkræfter – hvorfor drejer vingerne rundt?

Vi skal nu se på hvordan vindens bevægelsesenergi egentlig overføres til møllevingerne. Det er ikke så simpelt som det lyder (og det bliver ofte debatteret) for der er to vidt forskellige mekanismer på spil *angrebsvinklen* og *Bernoullis lov*. Vi begynder med

7.4.1 Angrebsvinklen

Lad os starte med en tænkt situation hvor vi holder et bræt (en vinge) stille i forhold til en jævn vind der kommer fra venstre. På figuren her ses vingen direkte fra siden og vinden rammer vingen fra venstre:

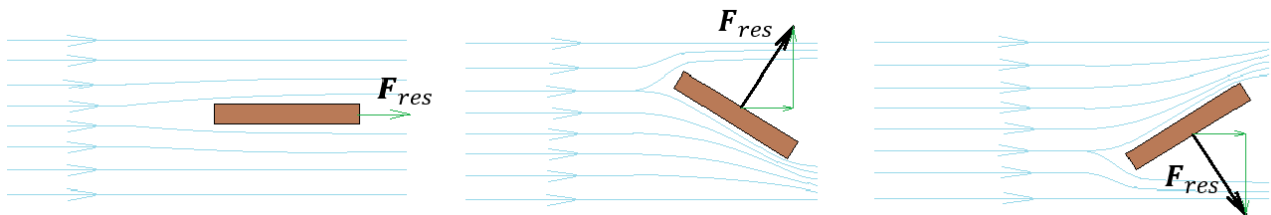


fig. 1

fig. 2

fig.3

Af symmetri Grunde vil vinden i første situation hverken presse brættet opad eller nedad, men den vil forsøge at presse brættet lidt bagud pga. luftmodstanden. Den resulterende kraft $\mathbf{F}_{res}$ er således rettet lidt mod højre. Vi forestiller os nu at vi holder brættet fast i vandret retning så det kun kan bevæge sig op og ned. På fig. 1 vil det så slet ikke bevæge sig. På fig. 2 kan vi se, at vinden afbøjes nedad. Dette skyldes, at vinden ikke kan gå gennem brættet og derfor enten skal afbøjes nedad eller opad, og for den største del af luften afbøjes den ned langs brættets side. Nu siger Newtons 2. lov, at når "noget" ændrer hastighed så skyldes det, at det er påvirket af en kraft. Her ændres hastigheden af den luft der afbøjes nedad og størstedelen af luften er derfor påvirket af en nedadgående kraft fra brættet. Newtons 3. lov siger, at hvis "noget" påvirkes af en kraft fra "noget andet" så vil "det andet" selv blive påvirket af en lige så stor og modsat rettet kraft. På fig. 2 påvirkes luften af en skråt nedadgående kraft fra brættet og luften vil derfor påvirke brættet med en skråt opadgående kraft. Den resulterende kraft på brættet bliver derfor rettet skråt op mod højre. På fig. 2 er $\mathbf{F}_{res}$ opdelt i to komponenter: én mod højre der svarer til den luftmodstand der også var på billede 1, men nu også en kraft der er rettet direkte opad. Brættet, der stadig er låst fast i vandret retning, vil derfor bevæge sig opad på fig. 2. På fig. 3 er situationen den samme bare omvendt: vinden afbøjes opad og påvirker derfor brættet med en kraft skråt nedad, der får brættet til at bevæge sig nedad.

Øvelse 7.25

Overvej, at man også kan indse, at der må være denne "skubben luften væk effekt" ved at tænke over hvordan en stueventilator virker, eller hvordan vi kan vifte luften ind i gløderne når vi skal starte et bål.

Overfører vi disse overvejelser til vindmøller ser vi, at uanset hvilken form en møllevinge har, så vil der gælde, at hvis vingen skubber/afbøjer den indkomne vind mod højre, så vil den selv blive skubbet mod venstre. Eller hvis den afbøjer vinden op, så vil den selv blive presset ned og omvendt. Lad os kalde den kraftkomponent som får vingen til at dreje for F_{rotor} .

Øvelse 7.26

(især for elever med fysik A)

En jævn vind med farten 10 m/s rammer et bræt med en angrebsvinkel på 10 grader. Herved ændres vindens retning til at blive parallel med brættet og under sammenstødet med brættet sænkes vindens fart til 9 m/s. Antag, at luftens densitet er $\rho_{luft} = 1,2 \text{ kg/m}^3$.

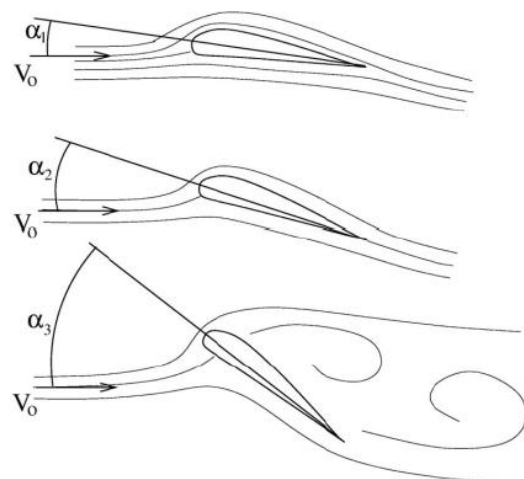
- Tegn en skitse af situationen og indlæg et koordinatsystem hvor x-aksen er ensrettet med vindens retning.
- Beregn rumfanget af den luft der rammer 1 kvadratmeter af vingen på 1 sekund.
(Vink: på din skitse kan du se, at 1 kvadratmeter af brættet kun har et tværsnitsareal på $\sin(10^\circ)$ set for vinden der rammer brættet).
- Beregn bevægelsesmængden af den luft der rammer 1 kvadratmeter af vingen på 1 sekund.
- Beregn bevægelsesmængden af den samme luft efter sammenstødet med brættet.
- Find luftens ændring i bevægelsesmængde $\Delta \mathbf{p}$ ved sammenstødet. Husk det er en vektor, så du skal beregne koordinaterne $\Delta \mathbf{p} = \begin{pmatrix} \Delta p_x \\ \Delta p_y \end{pmatrix}$.
- Beregn den resulterende kraft på luften ved brug af formlen: $\mathbf{F}_{res} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$.
- Bestem ud fra resultatet i e) kraftkomponenten F_{rotor} .

Den angrebsvinkel, vingeprofilet danner med vinden, har altså stor betydning for F_{rotor} . Ved små vinkler vokser F_{rotor} nærmest proportionalt med vinklen,

Men ved en angrebsvinkel på 12-17 grader falder F_{rotor} drastisk til nærmest 0:

Dette skyldes, at strømningslinjerne ikke længere forløber "pænt" bag vingen, men hvirvler rundt og skaber turbulens. Du kan selv arbejde med dette i **Projekt om datasættet fra vindtunellen**. Strømningslinjer er kurver, der i ethvert punkt har vindens hastighedsvektor som tangent. De viser altså i ethvert punkt, hvilken retning vinden har netop her.

Vi kigger nu på strømningslinjernes betydning for F_{rotor}



Flow omkring en vingeprofil, (Mikkelsen 2023)

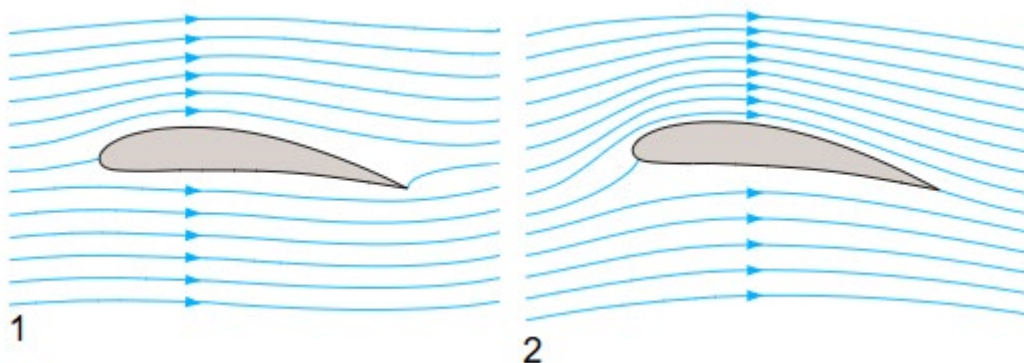
7.4.2 Bernoullis lov

Den anden mekanisme der er i spil for at få vingerne til at dreje rundt, er Bernoullis lov. Bernoullis lov er en ligning der udtrykker sammenhængen mellem hastighed, tryk og potentiel energi for vinden langs en strømningslinje. Loven er opkaldt efter den schweiziske matematiker Daniel Bernoulli, som formulerede den i det 18. århundrede.

Bernoullis ligning

Bernoullis ligning kan skrives således: $p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h = \text{konstant}$.

Her er p trykket i en bestemt position på strømningslinjen, ρ er luftens densitet, v og h er hhv. vindens hastighed og højde over jorden det pågældende sted og endelig er $g = 9,82 \text{ m/s}^2$ tyngdeaccelerationen. Bernoullis lov virker på en vinge som følger:



kilde Danmarks nationaleleksikon

Vingeprofilen er ikke symmetrisk som vores bræt. Når vinden møder vingen med en angrebsvinkel tæt på 0 grader (figur 1), vil strømningslinjerne blive presset lidt sammen ovenover vingen i forhold til under. At strømningslinjerne ligger tættere betyder, at den samme mængde luft skal passere igennem et mindre areal på samme tid og luften er derfor nødt til at bevæge sig hurtigere i områder hvor strømningslinjerne ligger tættere. Det er den samme effekt som i et vandrør (med strømmende vand) der har en indsnævring: lige i indsnævringen er vandet nødt til at bevæge sig hurtigere, da det ellers ville hobes op før indsnævringen – og det sker ikke!

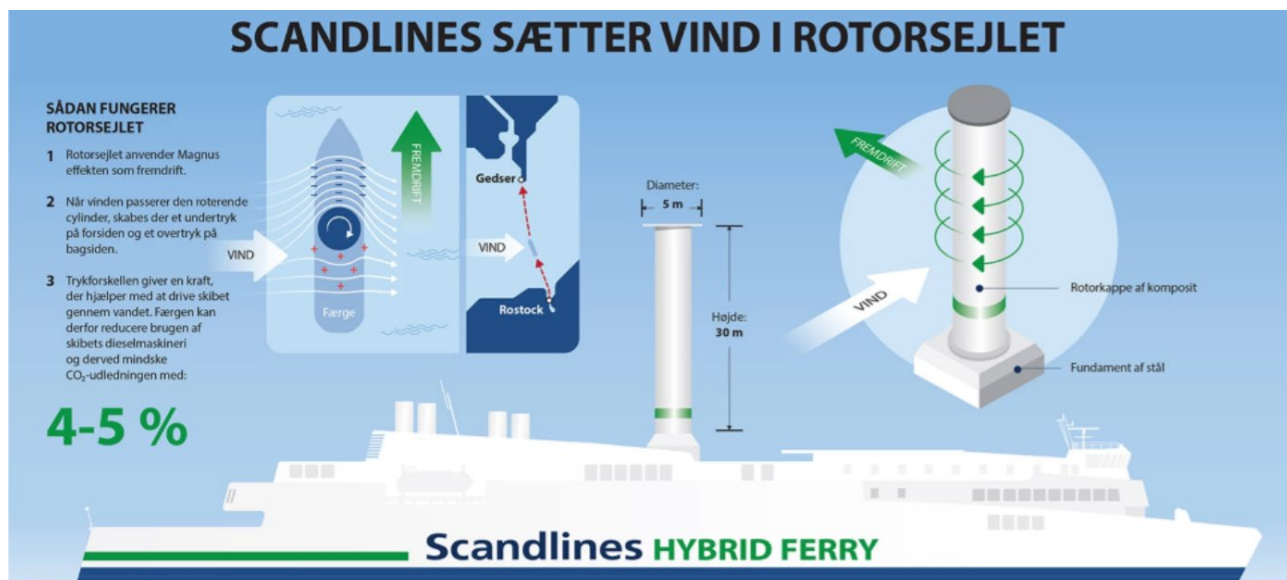
Øvelse 7.27

- Argumentér for, at langs en strømlinje der løber lige over vingen, vil hastigheden være lidt højere i en position lige over vingen end i positioner lige før og lige efter vingen.
- Kig på tegningens figur 1: hvad kan du sige om strømlinjens højde h lige over vingen i forhold til lige før og lige efter?
- Hvis udtrykket $p + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h$ fra Bernoullis lov skal være konstant langs en strømlinje, hvad kan du så sige om trykket på strømningslinjen når den er lige over vingen i forhold til lige før og lige efter vingen?
- Omvendt med luften, der passerer under vingen: her presses luften ikke sammen, så hvad kan du sige om hastigheden af luften, der passerer under vingen?
- Luften, der passerer under vingen, tvinges dog en anelse nedad. Hvad kan vi så sige om den potentielle energi $\rho \cdot g \cdot h$ for luften der passerer under vingen?
- Hvad kan du nu sige om trykket lige under vingen i forhold til lige før og lige efter?

Tilsammen giver undertrykket over vingen og overtrykket under vingen en resulterende opdriftskraft F_{op} *alene pga. vingens form!* Hvis man tilføjer en lille smule angrebsvinkel som vist på tegningens figur 2 øges effekten markant: Både sammenpresning over vingen og ligefrem udspreddning af strømningslinjerne under vingen, forstærker både overtryks- og undertrykseffekterne.

Øvelse 7.28 Færger med rotorsejl.

På nogle færger installerer man et såkaldt rotorsejl, der udnytter Bernoullis lov:



<https://www.scandlines.dk/om-os/vores-gronne-agenda/vind-i-rotorsejlet/>

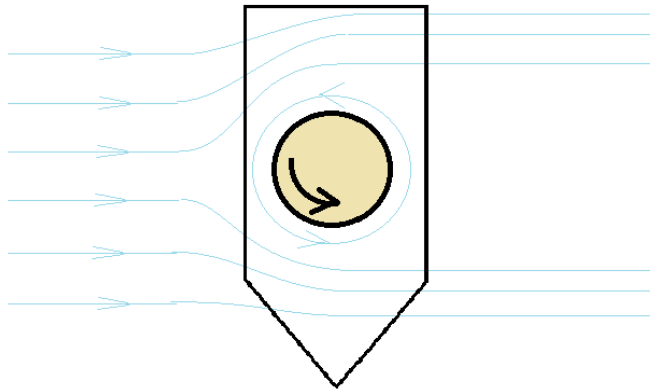
Argumentér for, at hvis luften i de inderste lag omkring rotorsejlet roterer *med* rotoren rundt, så vil der være en strømningslinje, hvor hastigheden ét sted er 0, når vinden kommer ind fra siden.

Brug Bernoullis lov til at argumentere for, at det giver et overtryk på bagsiden af

rotorsejlet mod et normalt tryk på forsiden.

Hvad resulterer denne trykforskel i?

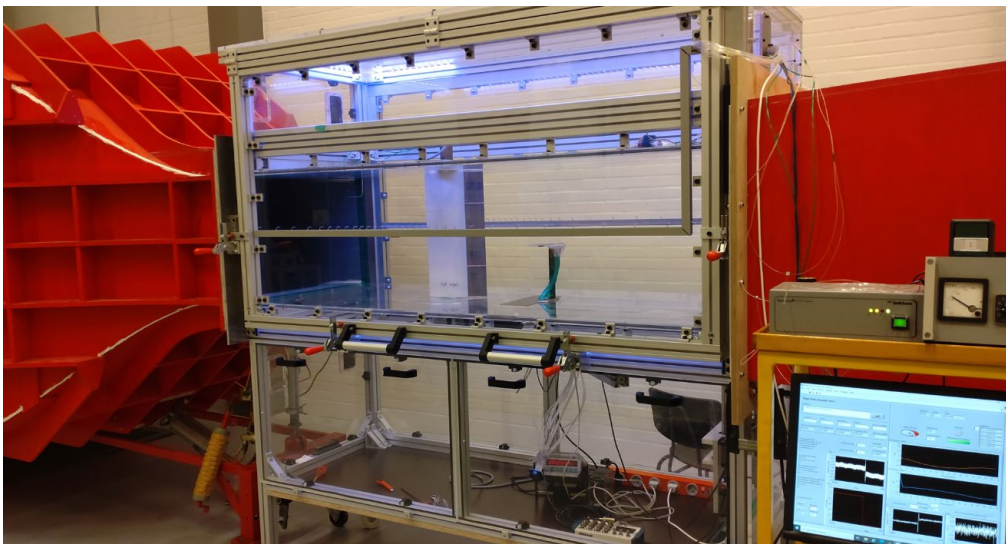
I forhold til møllevinger er det sådan set underordnet hvilken af de to effekter der har størst betydning, det primære er, at vingen uanset årsagen påvirkes af en større kraft pr. areal på den ene side af vingen end på den anden. For at finde den resulterende kraft på vingen må man derfor summere kræfterne op hele vejen rundt om vingen. Dette kan man arbejde med i følgende projekt.



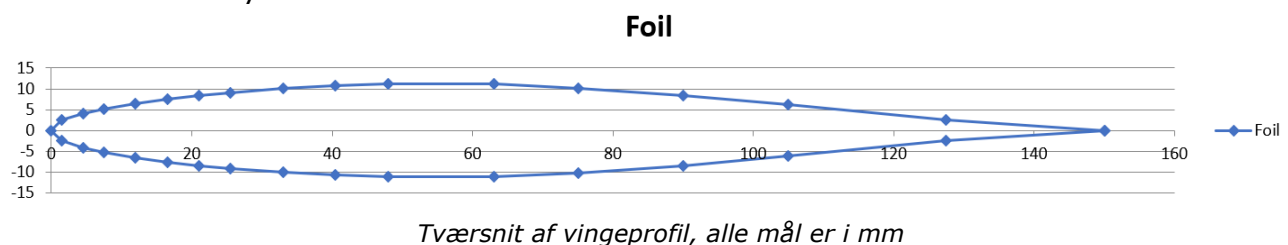
Projekt Autentiske data fra vinge i vindtunnel med forskellige angrebsvinkler

Set up:

DTU's vindtunnel ser således ud:



I midten af glasburet placeres en vingeprofil (foil) der er 15 cm fra forkant til bagkant. Vi kender ikke dybden:

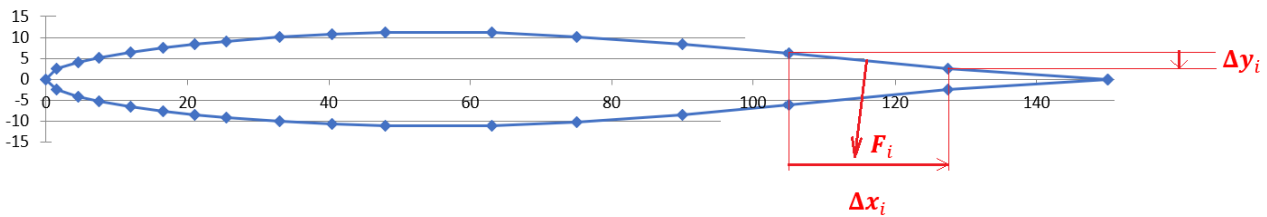


I de viste 32 punkter på vingeprofilet sidder tryksensorer, der måler trykket flere tusind gange i løbet af forsøget og software beregner derefter gennemsnittet af alle disse tryk. Kræfterne, der virker på vingen, får man nu fra trykket, der er defineret som

$$p = \frac{F}{A},$$

hvor F er kraften fra luften vinkelret på overfladen og A er arealet af overfladen. Vi bruger altså trykket, da det er dét, der kan måles og kraften vinkelret på et lille overfladeelement er så:

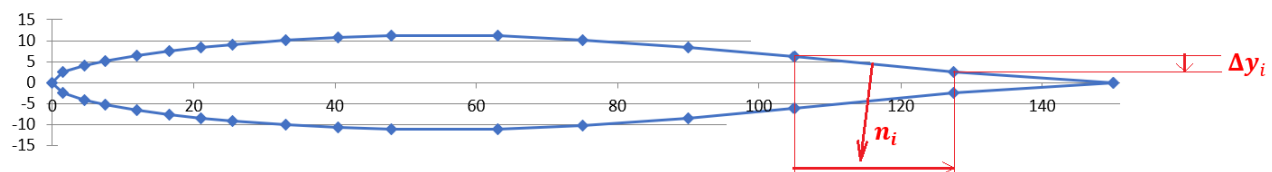
$$dF = p \cdot dA \text{ - eller lidt grovere } \Delta F = p \cdot \Delta A$$



Den resulterende kraft finder vi så ved at integrere over hele overfladen:

$$\mathbf{F}_{res} = \oint_A p \cdot \mathbf{n} \cdot dA,$$

hvor $\mathbf{n}$ er en enhedsvektor der peger vinkelret på overfladen og ind i vingeprofilen:



Da vi ikke kender den præcise trykfunktion, vil vi tilnærme integralet $\mathbf{F}_{res} = \oint_A p \cdot \mathbf{n} \cdot dA$

med en diskret sum: $\mathbf{F}_{res} = \sum_A p \cdot \mathbf{n} \cdot \Delta A$. I opstillingen kender vi heller ikke længden af

vingen – altså hvor langt vingen går ind i papiret – så vi antager bare, at dybden er 1 m og kan altså kun beregne kraften pr. meter vinge for hvert ΔA segment.

Vis, at $\Delta A = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \cdot 1 \text{ meter} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$

Øvelse 7.29

a) Argumentér for, at den i'te enhedsvektor er givet ved $\mathbf{n}_i = -\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta y_i}\right) / \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$, hvor

”hatten” som sædvanligt repræsenterer tværvektoren.

b) Argumentér for, at kraften på det i'te segment (pr. meter) må være

$$\mathbf{F}_i = p_i \cdot \Delta A_i \cdot \mathbf{n}_i,$$

hvor p_i er gennemsnitstrykket midt på det i'te segment

c) Vis, at dette udtryk kan reduceres til $\mathbf{F}_i = p_i \cdot \begin{pmatrix} \Delta y_i \\ -\Delta x_i \end{pmatrix}$ altså, at ΔA 'erne går ud!

Da vi ikke har selve trykfunktionen, er vi nødt til først at kigge på, hvordan man kan *integrere funktioner numerisk*: (hvis du ikke kender til dette i forvejen kan du springe frem til afsnittet **”Trapezintegration”** før du går videre)

Numerisk integration af kræfterne på vingen

Vi er nu klar til at integrere trykkrafterne op hele vejen rundt om vingen. Da det egentlig er et *cirkulationsintegral af en vektorfunktion*, bliver integralet i første omgang en lille smule mere besværligt:

Øvelse 7.30

Overvej, at

$$\mathbf{F}_{res} = \oint_A \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} \cdot dA = \begin{pmatrix} \oint \mathbf{p} \cdot n_x \cdot dA \\ \oint \mathbf{p} \cdot n_y \cdot dA \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \sum \mathbf{p} \cdot n_x \\ \sum \mathbf{p} \cdot n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{res,x} \\ F_{res,y} \end{pmatrix}$$

altså at vi er nødt til at integrere koordinatvis og tilnærme integralerne med trapezintegration.

Til gengæld sker der også en lille forsimpning, da første og sidste integrationspunkt i trapezsummerne er det samme:

Øvelse 7.31

a) Gør rede for, at trapezsummerne (se afsnittet "Trapezintegration" herunder) for

begge koordinater er: $T = \frac{h}{2} \cdot f(a) + h \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{h}{2} \cdot f(b)$

Vis, at dette forsimples til

$$T = h \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

Øvelse 7.32

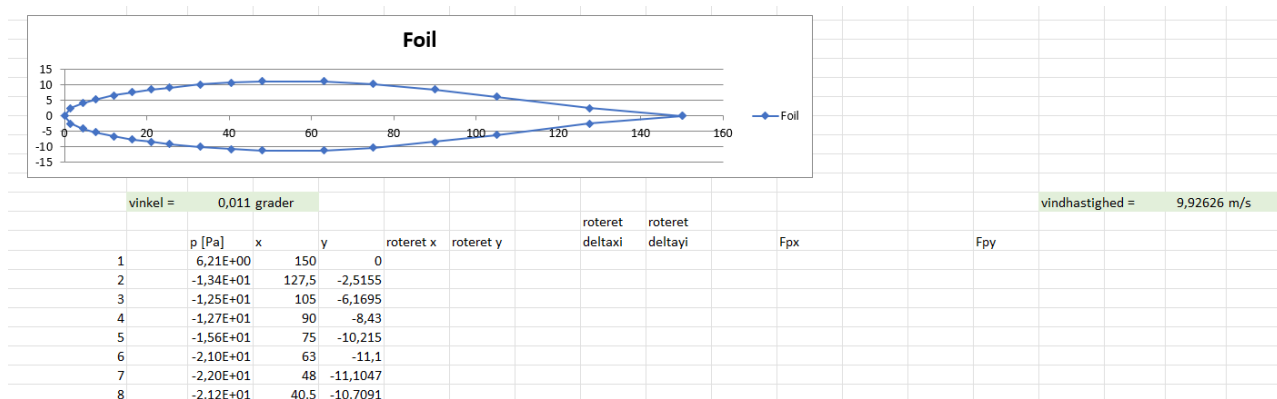
Gør endelig rede for, at $\mathbf{F}_{res} \approx \begin{pmatrix} \sum \mathbf{p} \cdot n_x \\ \sum \mathbf{p} \cdot n_y \end{pmatrix} = \mathbf{p} \cdot \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} \Delta y_i \\ -\Delta x_i \end{pmatrix}$

Vink, kombiner de to forrige opgaver med den tidligere opgave hvor vi så, at normalvektoren kan skrives: $\mathbf{n}_i = -\frac{\begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{pmatrix}}{\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}}$ og husk, at $\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$ gik ud af beregningen når vi gangede ΔA på trykket.

Datasættene

I filen "Vindtunnelforsøg data til projektopgave 2" ligger data for trykmålinger langs vingeprofilet i 2 forskellige serier: Ark V10A00 til ark V10A12 indeholder data med en vindhastighed på ca. 10 m/s og efter et skilleark (Ark1) indeholder resten af arkene data for vindhastighed 25 m/s.

Et udsnit af Ark V10A00 er vist her:



Figuren "Foil" viser vingeprofilet med tryksensorernes placering markeret. Alle mål er i millimeter, men man kan sagtens lave øvelserne og få interessante resultater uden at tænke så meget over enhederne.

I kolonnen til venstre er de 32 sensorer nummereret og næste søjle viser gennemsnitstrykkets afvigelse fra normaltrykket over et par tusind tryksamplinger ved den pågældende sensor. Et positivt tryk betyder altså at trykket er over 1 atmosfære og negativt tryk viser bare et undertryk i forhold til 1 atmosfæres tryk. Trykket er målt i Pascal (Pa), der er Newton pr. kvadratmeter, men igen er enhederne ikke så afgørende. Derefter følger to kolonner med sensorernes placering når vingeplanet er roteret præcis 0 grader.

For hvert ark kan man nu beregne:

- Koordinaterne for sensorerne når vingen er roteret
- Søjlerne med Δx_i og Δy_i for den roterede vinge
- Kræfterne $F_{x-res,i}$ og $F_{y-res,i}$ på de enkelte vingesegmenter

For hver kraftkolonne kan man

- summere kræfterne op (ikke standard SI enheder) så man kan finde den resulterende kraft i x- og y-retning
- Lave et plot over hvordan kræfterne er fordelt henover vingen både i x- og y-retning.

Dette kan bruges til at undersøge hvilken effekt, der er vigtigst for en given vinkel: Bernoullis lov eller angrebsvinklen.

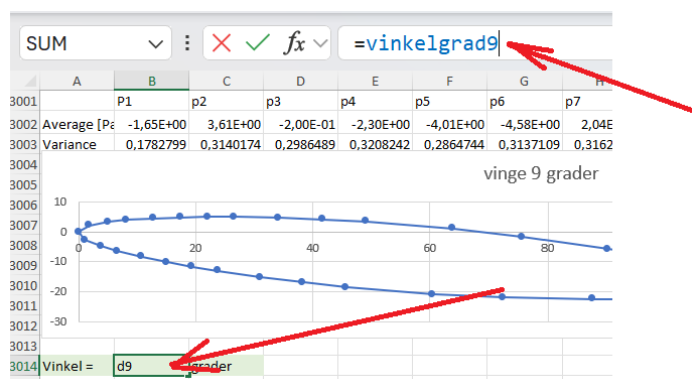
Når man har fundet F_{y-res} for alle vinkler, kan man endelig lave et plot af dette versus indfaldsvinklen, så man kan finde den optimale vinkel

Vi gennemgår her i et par opgaver hvordan disse punkter kan udføres. Den utålmodige kan springe frem til ark V10A09, hvor det hele er gennemregnet og copy-paste metoderne derfra.

Øvelse 7.33 Rotation af koordinaterne

Man kan vise, at hvis et punkt (x_1, y_1) roteres vinklen φ i positiv omløbsretning vil dets koordinater blive ændret til $\tilde{x}_1 = x_1 \cos(\varphi) - y_1 \sin(\varphi)$ og $\tilde{y}_1 = x_1 \sin(\varphi) + y_1 \cos(\varphi)$.

I datasættene er rotationsvinklerne navngivet og navnet kan findes ved at klikke på det grønne felt med rotationsvinklen (nederste røde pil) og se hvad navnet er oppe i Excels navnefelt (øverste røde pil):



Beregn søjlerne med koordinater for de roterede vingeprofilpunkter ved at lave en enkelt beregning og "træk ned og kopier".

Vink: beregningen for rotation af x-koordinaten i Ark V10A09 er vist her:

=D3017*COS(vinkelgrad9/180*PI())-E3017*SIN(vinkelgrad9/180*PI())

Du kan med fordel rotere punkterne i alle de andre ark i samme omgang

Øvelse 7.34

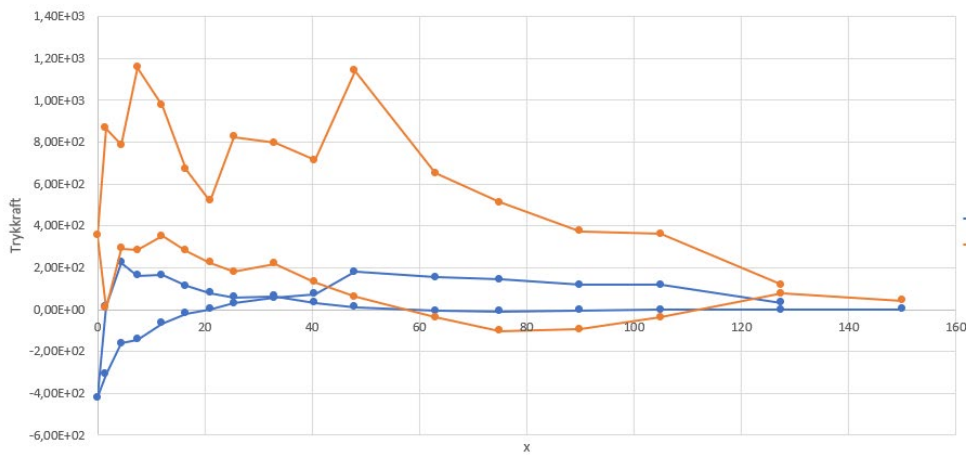
Beregn søjlerne med Δx_i og Δy_i for den roterede vinge, igen ved at lave en enkelt beregning og "træk ned og kopier" og igen kan det med fordel gøres på de andre ark samtidig. Vink: delta-xi er beregnet ved en passende differens således:

	roteret x	roteret y	roteret deltaxi	roteret deltayi
0	148,14464	-23,519469	=F3018-F3017	
55	125,52852	-22,475934	-22,79463	-0,0808831

Øvelse 7.35

I en tidligere opgave viste vi, at $\mathbf{F}_{res} \approx \left(\frac{\sum p \cdot n_x}{\sum p \cdot n_y} \right) = p \cdot \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} \Delta y_i \\ -\Delta x_i \end{pmatrix}$

- Brug dette til at beregne søjler for trykket på de enkelte segmenter i både x- og y-retning. Vink: se ark V10A09 for inspiration
- Beregn $\mathbf{F}_{res,x}$ og $\mathbf{F}_{res,y}$ ved at summere de 2 søjler hver for sig over de 32 målepunkter
- Lav et plot over, hvordan kræfterne er fordelt henover vingen både i x- og y-retning. Dette kan bruges til at undersøge, hvilken effekt der er vigtigst for en given vinkel: Bernoullis lov eller angrebsvinklen. Vink: For en vinkel på ca. 9 grader ser det således ud:

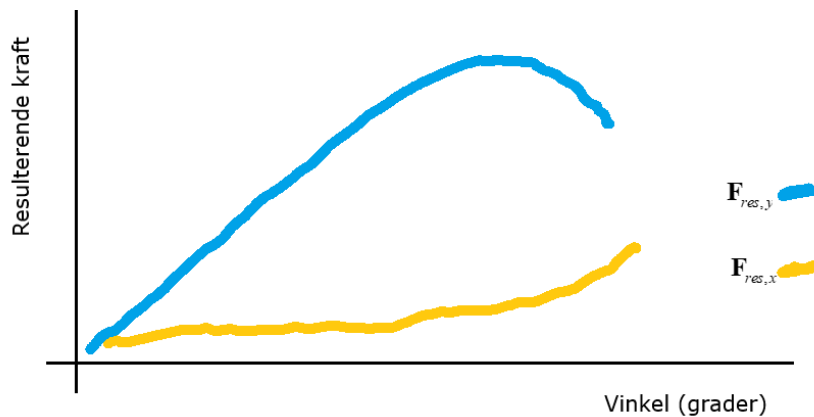


- d) Overvej fra grafen her, hvilke punkter der svarer til undersiden af vingen og hvilke punkter der svarer til oversiden
- e) Hvordan kan punkterne på oversiden af vingen bidrage med en større kraft end punkterne på undersiden, når luften trods alt trykker nedad på vingen? **Vink: det målte tryk er i forhold til 1 atmosfæres tryk – kig på data i tryk-kolonnen.**

Øvelse 7.36

- a) Udfør alle ovenstående punkter på alle ark med vindhastighed 10 m/s
- b) Lav derefter et plot – en profilkarakteristik – med hhv. $F_{res,y}$ og $F_{res,x}$ som funktion af indfaldsvinklen.
- c) Lav tilsvarende øvelse for vindhastighed 25 m/s

Vink: Lift- og dragkoefficienter er ikke helt det samme som de resulterende kræfter, men det skal se nogenlunde således ud:



Øvelse 7.37

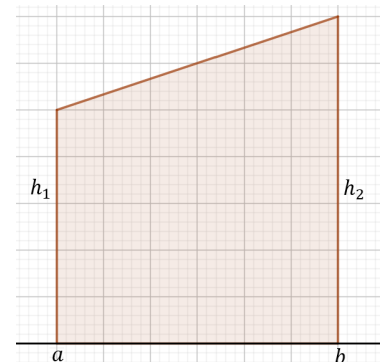
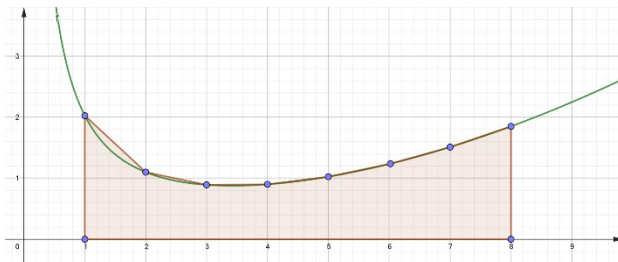
- a) Hvilken angrebsvinkel er den optimale ved hhv. 10 m/s og 25 m/s?
- b) Hvorfor kan dette resultat ikke direkte overføres til vindmøllevinger.
(**Vink: Vingens symmetri i forsøgsopstillingen**)

Trapezintegration

Numerisk integration er en metode til at beregne værdien af et bestemt integral, når det ikke er analytisk muligt at finde en stamfunktion. Dette kan være nyttigt, når vi som her, kun kender funktionsværdierne i en række punkter men slet ikke har adgang til

funktionsforskriften! Vi vil her gennemgå en af de simpleste metoder til at bestemme integraler ved numerisk integration: trapezmetoden.

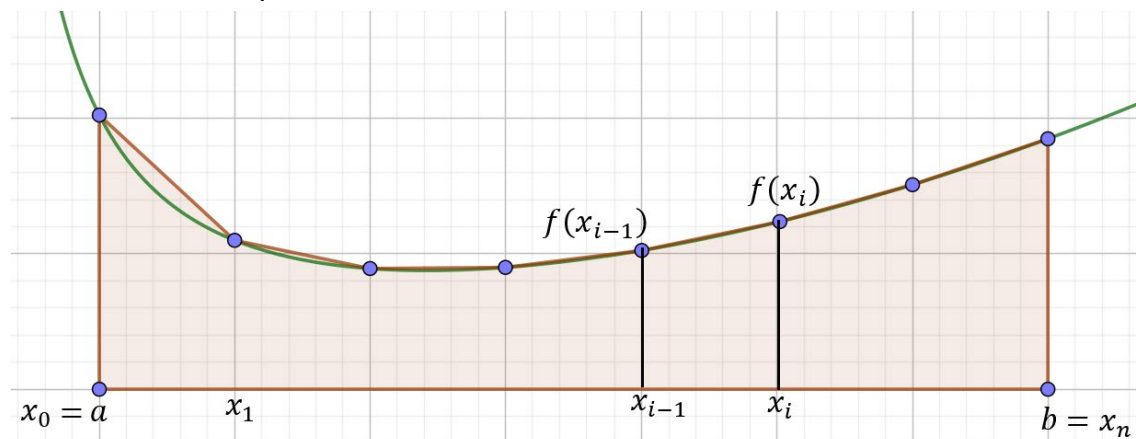
Trapezmetoden er en simpel og intuitiv metode til numerisk integration. Ideen er at opdele området under grafen i trapezer og derefter summere arealerne af disse:



Øvelse 7.38

Vis, at arealet A af et trapez med to sider parallelle med y-aksen, én side på x-aksen og med sidehøjder h_1 og h_2 er givet ved $A = (b - a) \frac{h_1 + h_2}{2}$ - se figuren herover.

Arealet er altså som gennemsnitshøjden af de to sider ganget med bredden. Vi udleder nu trapezformlen



Øvelse 7.39

Vi opdeler intervallet der skal integreres over, i n lige store delintervaller af længden

$$h = \frac{b - a}{n}$$

Argumentér for, at arealet af trapezet ved det i 'te interval er (se figuren ovenfor):

$$h \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

Argumentér for, at den samlede trapezsum er:

$$T = \sum_{i=1}^n h \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

Hvilke funktionsværdier optræder kun én gang i trapez-summen T ?

Forklar omskrivningen af trapezsummen T til det endelige resultat:

$$T = \frac{h}{2} \cdot f(a) + h \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{h}{2} \cdot f(b)$$

Formulér med ord, hvad man skal gøre med funktionsværdierne for at beregne en tilnærmet værdi for $\int_a^b f(x) dx$

Øvelse 7.40

Kig på figuren der blev brugt til udledning af trapezformlen

I hvilket interval er trapeztilnærmelsen dårligst?

Kan du finde på en regel der involverer $f''(x)$ som kan afgøre (kvalitativt) hvornår trapezsummen er en god tilnærmelse. **Vink: hvad er den anden afledte af en lineær funktion?**

Øvelse 7.41

- a) Bestem en tilnærmet værdi for integralet $\int_0^4 x^2 dx$ ved "håndregning" af trapezsummen når du inddeler integrationsintervallet i 4 lige store intervaller.
- b) Sammenlign med den eksakte værdi.

Øvelse 7.42 Trapezintegration regneark

Regneark som f.eks. Excel er perfekte til hurtig numerisk integration med trapezmetoden

Herunder er vist hvordan man kan beregne en tilnærmet værdi for integralet $\int_0^5 x^3 dx$ ved at "trække funktionsværdier ganget med intervalbredden ned". Man skal lige huske, at først og sidste funktionsværdi skal divideres med 2:

Intervalbredde				
h=1	f(x)=x^3			
x_i	f(x_i)*h			
0	0	her er divideret med 2 bagefter		
1	1			
2	8			
3	27			
4	64			
5	62,5	her er divideret med 2 bagefter		
Trapezsum	162,5			
Eksakt værdi	156,25			

som det ses, giver en grov intervalinddeling ikke et særlig pålideligt resultat, men i regnearket er det jo let at inddele finere:

R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Intervalbredde					Intervalbredde	Trapezsum	Eksakt værdi	
h=0,5	f(x)=x^3				h=0,1	156,3125	156,25	
x_i	f(x_i)*h				x_i	f(x_i)*h		
0	0 her er divideret med 2				0	0 her er divideret med 2		
0,5	0,0625				0,1	0,0001		
1	0,5				0,2	0,0008		
1,5	1,6875				0,3	0,0027		
2	4				0,4	0,0064		
2,5	7,8125				0,5	0,0125		
3	13,5				0,6	0,0216		
3,5	21,4375				0,7	0,0343		
4	32				0,8	0,0512		
4,5	45,5625				0,9	0,0729		
5	31,25 her er divideret med 2				1	0,1		
Trapezsum	157,8125				1,1	0,1331		
Eksakt værdi	156,25				1,2	0,1728		

Som man ser, bliver det i dette tilfælde ganske tæt på den korrekte værdi, når vi anvender intervalbredder på 0,1

Lav selv et regneark og eksperimenter med intervalbredden indtil du får trapezsummen til at svare til det rigtige resultat med 2 cifre efter kommaet

For mange funktioner er det slet ikke muligt at opskrive stamfunktionen, selvom den findes! Det gælder f.eks. for tæthedsfunktionen for normalfordelingen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Hvis man f.eks. skal bestemme $P(2 \leq X \leq 4)$ for en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi $\mu = 1,43$ og spredning $\sigma = 1,87$ skal man beregne integralet:

$$P(2 \leq X \leq 4) = \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Og det gør vi som regel med CAS, men dit CAS værktøj bruger også numerisk integration her!

Her er sandsynligheden f.eks. bestemt med Ti-Nspire

`normCdf(2,4,1.43,1.87)` ▶ 0.295585

Øvelse 7.43

Prøv at beregne sandsynligheden $P(2 \leq X \leq 4)$ med trapezmetoden og en intervalbredde på $h = 0,1$.

Vink: i Excel kan du bruge kommandoerne "kvrod()" til kvadratrod, "pi()" til tallet pi og "eksp()" for den naturlige eksponentialfunktion. Husk at skrive "-1*(" inde i eksponentialfunktionen altså f.eks. som her: `=1/KVROD(2*PI()*1,87^2)*EKSP(-1*(AC13-1,43)^2/(2*1,87^2))*0,1`

Du bør få: $P(2 \leq X \leq 4) = 0,295562$

Undersøg hvad intervalbredden skal være for at trapezintegrationen passer med 6 cifre efter kommaet.

7.5 Aerodynamik og vingedesign

I dette afsnit kigger vi lidt på hvordan vingerne er udformet. Specielt vil vi prøve at forstå hvorfor vingen er "snoet" som det ses på figuren her:



<https://pxhere.com/da/photo/1281339>

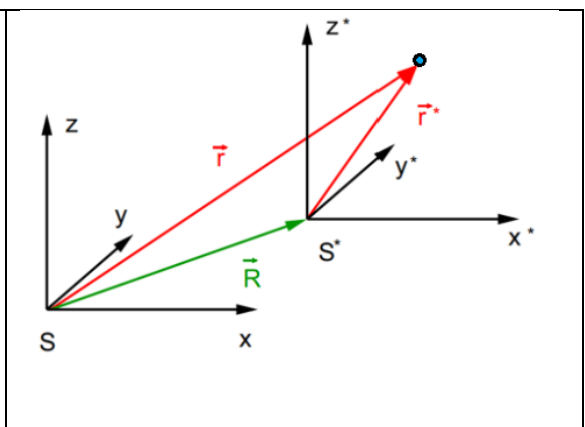
Vi starter med at se på hvad vindens hastighed er set fra vindmøllen

7.5.1 Vindhastigheder set fra forskellige koordinatsystemer – Galileitransformationen

Lad os se på, hvordan vi beskriver positionen af et lille luftmolekyle (blå cirkel på figuren herunder) i to forskellige koordinatsystemer. Vi kalder det "faste system" for S mens systemet S^* bevæger sig med hastigheden $\mathbf{v}_{S^*}(t)$ i forhold til S :

Vi kan f.eks. tænke på, at koordinatsystemet S er vores almindelige faste jord og systemet S^* er et koordinatsystem, der følger med møllevingen rundt. Set fra S er molekylets position givet ved vektoren $\mathbf{r}(t)$ mens startpunktet for S^* er givet ved vektoren $\mathbf{R}(t)$.

Set fra S^* er molekylets position derimod $\mathbf{r}^*(t)$ og sammenhængen mellem de tre tidsafhængige vektorer er givet ved vektoraddition:



$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}^*(t)$$

Vi kan nu bestemme hastigheden af molekylet ved differentiation:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}^*}{dt} \Leftrightarrow \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_{S^*}(t) + \mathbf{v}^*(t)$$

Dvs. vindens hastighed $\mathbf{v}(t)$ set fra jorden er hastigheden af koordinatsystemet S^* plus vindens hastighed $\mathbf{v}^*(t)$ set fra S^* .

Vi kan isolere den sidste og finder:

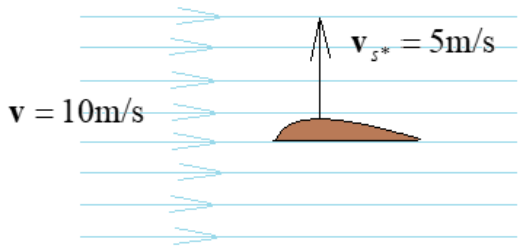
$$\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_{S^*}(t) = \mathbf{v}^*(t)$$

Dvs. hastigheden af luftmolekylet $\mathbf{v}^*$ - altså vindhastigheden set fra S^* - fås ved, at trække hastigheden $\mathbf{v}_{S^*}$ af koordinatsystemet S^* , fra vindens hastighed set fra S .

Denne måde omregne positioner og hastigheder fra et koordinatsystem til et andet kaldes *Galileitransformationen*.

Øvelse 7.44

Antag at det blæser fra vest mod øst med en vindhastighed på $\mathbf{v} = 12\text{m/s}$ og at en møllevinge bevæger sig lodret opad vinkelret på vindens retning med en fart på $\mathbf{v}_{S^*} = 5\text{m/s}$:

a) Opskriv de to hastigheder som vektorer med to koordinater b) Beregn hastigheden af vinden $\mathbf{v}^*$ set fra vingens koordinatsystem S^* c) Beregn vindens fart v^* - dvs. længden af hastighedsvektoren $\mathbf{v}^*$ - set fra S^* og sammenlign med vindens fart set fra S	
--	--

Nu kigger vi på en enkelt vinge der roterer på en vindmølle i drift:

Øvelse 7.45

- Overvej hvor vingen bevæger sig hurtigst: tæt ved navet eller ved vingespidsen.
- Hvis vingens længde er R og omløbstiden er T , hvad er så farten af vingespidsen?
Vingens fart bliver altså større og større jo længere vi kommer væk fra navet.
- Vis, at vingens fart er proportional med afstanden til navet med proportionalitetskonstant $\omega = \frac{2\pi}{T}$
- Argumentér for, at vindens retning set fra vingen skifter jo længere vi kommer ud ad vingen.

Øvelse 7.46

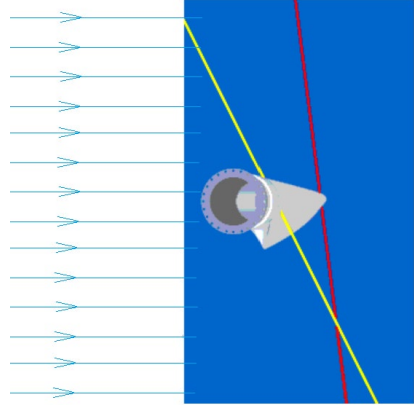
Antag, at vinden blæser med en konstant fart fra venstre mod højre $\mathbf{v}_{luft} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (paralelt med x-aksen). Vi betragter nu et punkt på en møllevinge lige i det øjeblik vingen er vandret og på vej op med hastigheden

$$\mathbf{v}_{vinge}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \cdot r \end{pmatrix},$$

hvor ω er vinkelhastigheden og r er afstanden fra punktet på vingen ind til navet.

- a) Bestem vindens hastighedsvektor set fra et punkt på vingen der har afstand r fra navet.
- b) Vis, at vindens hastighed set fra vingen danner en vinkel $\theta(r)$ med x-aksen givet ved

$$\theta(r) = \arctan\left(\frac{\omega r}{v_0}\right)$$

Hvis man ønsker, at vingens profil overalt på vingen skal have en bestemt angrebsvinkel i forhold til vinden, er man altså nødt til at dreje vingens profil alt efter afstanden r til navet: På figuren ser vi inde fra navet og ud mod vingespidsen. Vinden kommer fra venstre og vingen bevæger sig opad. Det ser ud som om vinden har ret stor angrebsvinkel, men husk at vi skal trække vingens opadrettede hastighed fra for at få vindretningen set fra vingen.	
--	--

Vindens hastighed set fra vingen danner altså en vinkel θ med x-aksen, men der er jo flere variable i spil i udtrykket fra opgaven ovenover, så vi har reelt:

$$\theta = \theta(r, v_0, \omega) = \arctan\left(\frac{\omega r}{v_0}\right)$$

Opgave 7.47

Overvej hvilke af de tre variable i $\theta(r, v_0, \omega)$ vi har mulighed for at styre.

Ved hjælp af gearing kan man give møllen større eller mindre belastning (og dermed trække mere eller mindre energi ud af luften) alt efter hvor meget det blæser. Man kan på denne måde nogenlunde styre vinkelhastigheden ω

- a) Overvej hvilken fordel der er ved at lade vinkelhastigheden ω være proportional med vindens fart v . Vink: hvor mange variable er der så reelt i funktionen

$$\theta(r, v_0, \omega) = \arctan\left(\frac{\omega r}{v_0}\right)$$

- b) Overvej hvad der sker hvis vinkelhastigheden ω ikke er proportional med vindens fart. Vink: overvej hvor mange variable der nu er i funktionen $\theta(r, v_0, \omega) = \arctan\left(\frac{\omega r}{v_0}\right)$

8.

Elektromagnetisme, jævnstrøm, vekselstrøm, og højspænding



Hvordan kan det fænomen, at møllevinger drejer rundt, føre til, at der kommer strøm ud af en vindmølle. Det er næsten magi, for hvad har mekaniske bevægelser som møllevingers omdrejninger med elektrisk strøm at gøre. De er tæt forbundne! Det opdagede Ørsted omkring 1820, og det er det fænomen nede ved elementarpartiklerne og de fundamentale naturkræfter, der nærmest er en gave til os, og som er grundlaget for, at el er kommet til at spille en så stor rolle i de moderne samfund. Vi går dybere ind i fænomenet og i omsætningen mellem jævnstrøm og vekselstrøm, transformeringen til højspænding og meget mere.

8. Elektromagnetisme, jævnstrøm, vekselstrøm, og højspænding

8.1 Elektromagnetisme

Elektromagnetisme er en af de vigtigste opdagelser inden for fysik og teknologi. Den beskriver, hvordan elektricitet og magnetisme hænger sammen. En central del af elektromagnetismen er **induktion**, hvor en ændring i et magnetfelt kan skabe en elektrisk strøm i en ledning.

H.C. Ørsteds opdagelse af elektromagnetisme

Den danske fysiker Hans Christian Ørsted opdagede elektromagnetismen i 1820. I et berømt eksperiment placerede han en ledning med elektrisk strøm tæt på en kompasnål og opdagede, at nålen bevægede sig.

Det betød, at strømmen i ledningen skabte et magnetfelt, som påvirkede kompasset. Denne opdagelse viste for første gang, at elektricitet og magnetisme var forbundne fænomener!



foto: Erik Vestergaard

Vi skal i det følgende arbejde med en række simulationer, der viser princippet i nogle af de teknologier, vi bruger i dag, i forbindelse med udnyttelse af vindenergi genereret af vindmøller. Fokus vil være på generatorer og transformation.

Simulation af Induktion

Gå ind på siden:

https://phet.colorado.edu/sims/html/faradays-electromagnetic-lab/latest/faradays-electromagnetic-lab_all.html

hvor du ser det øverste lille billede:

Faraday's Electromagnetic Lab

Bar Magnet

Pickup Coil

Electromagnet

Transformer

Generator

Vælg Pickup Coil og du får følgende set up:

Bar Magnet

Strength: 75%

0%

50%

100%

☒ Magnetic Field (B)

Pickup Coil

Indicator

Loops: 2

Loop Area: 50%

20%

100%

☒ Electrons

☐ Compass

☐ Field Meter

☐ Lock to Axis

S

N

+

I denne simulation kan vi eksperimentere med *elektromagnetisk induktion*. Når en *stangmagnet* bevæges i nærheden af en *spole*, ændres magnetfeltet omkring spolen. Ifølge *Faradays Induktionslov* vil denne ændring i magnetfeltet skabe en elektrisk strøm i spolen. Simulationen viser, hvordan elektronerne bevæger sig i spolen, og vi kan aflæse strømmen enten med en *pære* eller et *voltmeter*.

I simulationen kan vi ændre forskellige parametre:

- **Antallet af vindinger i spolen:** fra en til fire.
- **Hastigheden af magneten:** Styrer du selv alt efter hvor hurtigt du trækker magneten med musen.
- **Styrken af magneten:** Styres med den øverste skyder.

Forslag til eksperimenter

Øvelse 8.1 Hvordan påvirker magnetens hastighed den inducerede spænding?

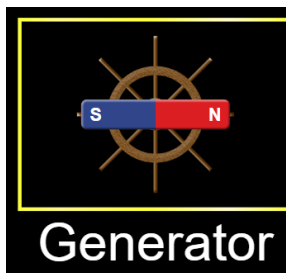
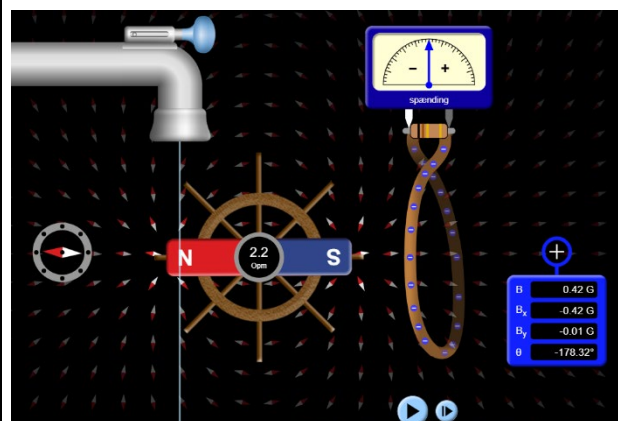
- Vælg voltmeteret i stedet for pæren som Indicator.
- Bevæg magneten langsomt ind og ud af spolen og observer, hvad der sker med pæren eller voltmeteret.
- Prøv derefter at bevæge magneten hurtigere - Hvilken forskel ser du?

Øvelse 8.2 Sammenhæng mellem antal vindinger og spænding

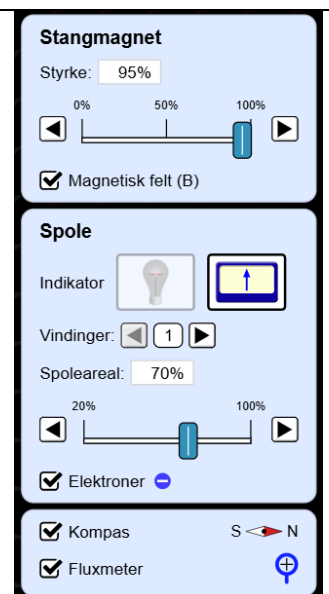
- Start med én vinding og observer spændingen (på voltmeter) når du trækker magneten gennem spolen (vindingen)
- Øg antallet af vindinger og se, hvordan spændingen ændrer sig når du trækker magneten igennem med samme fart som før
- Skift voltmeteret ud med pæren og gentag eksperimentet. Hvordan lyser pæren i de to situationer?

Generator

I praksis står man ikke og trækker en magnet ud og ind af en spole, når der skal laves strøm. Start simulationen forfra, men vælg nu ikonet generator. På billedet ser vi en simulation, hvor en vandstrøm får en magnet til at rotere.



Det kunne i princippet lige så godt være en vindmølle



Når magneten drejer rundt, ændrer dens magnetfelt sig i forhold til en spole (den brune ledning med blå prikker, som viser elektronerne). Ændringen i magnetfeltet skaber en

elektrisk strøm i spolen, hvilket kan aflæses på voltmeteret. I simulationen kan vi ændre på flere parametre:

- **Antallet af vindinger i spolen:** Jo flere vindinger, desto stærkere bliver den inducerede spænding.
- **Hastigheden af den roterende magnet:** Jo hurtigere rotation, desto kraftigere ændring i magnetfeltet og dermed større spænding.
- **Belastningen på kredsløbet:** Vi kan skifte voltmeteret ud med en pære og se, om den lyser.

Forslag til eksperimenter

Øvelse 8.3 Sammenhæng mellem magnetens hastighed og spændingen

- Start med en langsom rotation af magneten og aflæs spændingen på voltmeteret.
- Skru op for vandstrømmen, så magneten roterer hurtigere.
- Hvad sker der med spændingen?

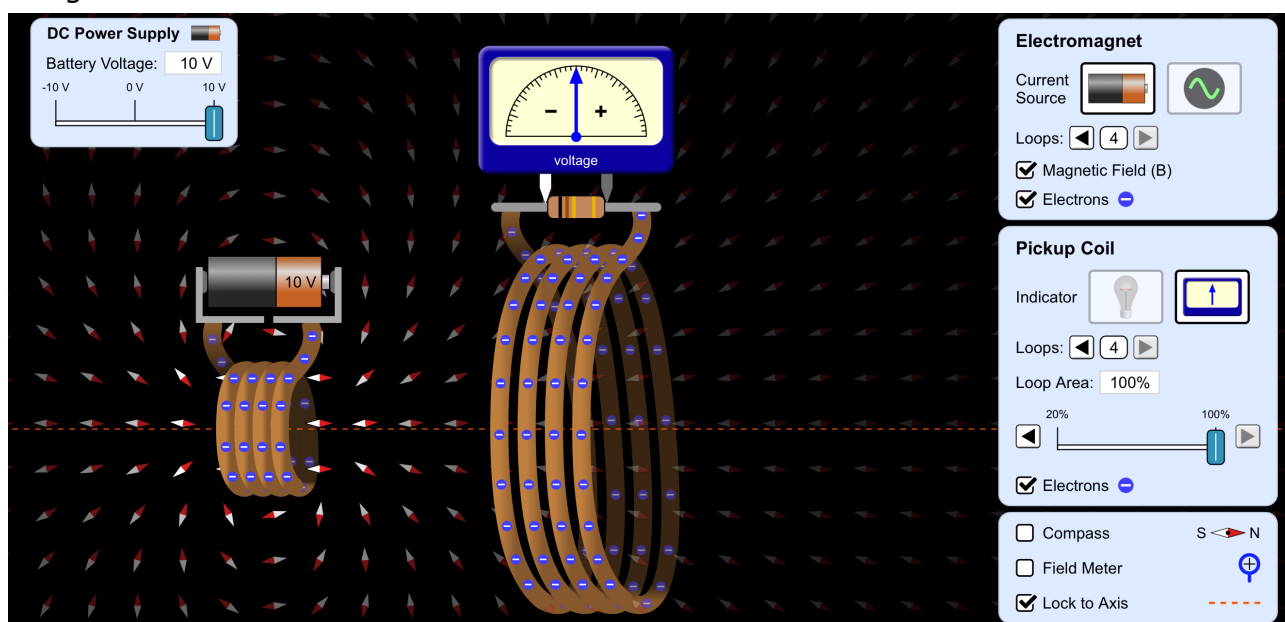
Øvelse 8.4 Sammenhæng mellem antal vindinger og induceret spænding

- Sæt vandstrømmen til maksimal vandstrøm.
- Brug én vinding i spolen og aflæs spændingen.
- Forøg antallet af vindinger og se, hvordan spændingen ændrer sig.

Transformation kvalitativt

Man kan ændre på spændingen ved at transformere strømmen. Det sker flere steder i vores elnet, hvor vi udnytter, at det giver mindst tab at transportere strøm med høj spænding på op mod 1.000.000V, mens vores husholdningsapparater kun bruger 220V. Vi vil bruge simuleringen til at få en kvalitativ forståelse af, hvordan en transformator virker. Ideen i en transformator er, at der løber strøm i en spole, den venstre på figuren, som så skaber en strøm i en anden spole, den højre på figuren nedenfor.

Vælg Transformator



I simuleringen kan du ændre på

- Om der leveres jævnstrøm, batteriet, eller vekselstrøm.
- Hvor mange vindinger der er på den ene spole.
- Hvor mange vindinger der er på den anden spole.

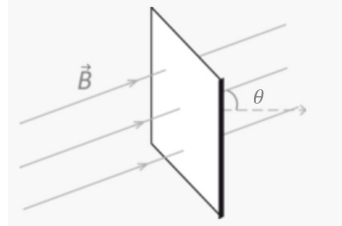
Øvelse 8.5 Forslag til eksperimenter

- Undersøg om man kan transformere jævnstrøm.
Tænk tilbage på jeres induktions-eksperiment, hvorfor sker der ikke noget ved jævnstrøm?
- Undersøg om man kan transformere vekselstrøm.

8.2 Magnetisk Flux og Faradays Induktionslov

I dette afsnit kigger vi på begrebet **magnetisk flux** og **Faradays induktionslov** der populært sagt er en matematisk beskrivelse af hvordan den inducerede spændingsforskel afhænger af, hvordan magnetfeltet ændres i forhold til spolen.

8.2.1 Magnetisk Flux (Φ_B)

Magnetisk flux beskriver, hvor meget af et magnetfelt, der passerer gennem en given flade. Vi kan sammenligne det med, hvor mange vandstråler der går igennem en ring, hvis vi holder den under en vandhane:	 https://enverdenaffysika.systime.dk/?id=170#c1126
---	--

Matematisk defineres den magnetiske flux Φ_B som:

$$\Phi_B = B \cdot A \cdot \cos(\theta),$$

hvor:

- B er **magnetfeltets styrke** målt i enheden Tesla, **T**
- A er **arealet** af fladen, som magnetfeltet går igennem målt i kvadratmeter, **m²**.
- θ er vinklen mellem magnetfeltets retning og normalvektoren til fladen (måles i grader eller radianer) se figuren ovenfor.

Øvelse 8.6

Enheden for magnetisk flux er Wb = Weber. Udtryk denne enhed ved hjælp af enhederne Tesla (T) og meter (m)

Øvelse 8.7

En spole har et areal på 0,02 m² og ligger vinkelret på et magnetfelt med en styrke på 0,5 T

- Beregn den magnetiske flux igennem spolen.
- Nu drejes spolen 60 grader i forhold til spolen
- Beregn den magnetiske flux i denne situation.

- d) For hvilke vinkler er fluxen 0?
- e) Den magnetiske flux kan godt blive negativ.
- f) For hvilke vinkler er fluxen negativ?

8.2.2 Faradays Induktionslov

Efter introduktionen til magnetisk flux kan vi nu se på **Faradays induktionslov**, som beskriver, hvordan en ændring i fluxen skaber en elektrisk spænding U i en enkelt vinding:

$$U = -\frac{d\Phi_b}{dt}$$

Hvis vi anvender loven på en spole med N vindinger vil det samlede spændingsfald blive

$$U = -N \cdot \frac{d\Phi_b}{dt}$$

Den afledte $\frac{d\Phi_b}{dt}$ angiver *ændringen i magnetisk flux pr. tidsenhed*. Minustegnet viser

Lenz' lov, der siger, at den inducerede strøm vil forsøge at *modvirke ændringen i flux*.

Øvelse 8.8 Forståelse af formelen

Argumenter for, at de observationer, vi lavede i forbindelse med simuleringen ovenfor, passer. Dvs. argumentér for, at

- a) Hvis magneten *bevæges hurtigt ind i eller ud af spolen*, ændres fluxen hurtigt, og spændingen bliver større.
- b) Hvis der er *flere vindinger*, vil spændingen også blive større, fordi hver vinding oplever en induceret spænding.
- c) Hvis magnetfeltet bliver *stærkere*, vil spolen forsøge at lave en strøm, der skaber et felt i den modsatte retning.

Øvelse 8.9

For spole med 10 vindinger ændres den magnetisk flux fra 0,05Wb til 0,02Wb på 0,1 sekunder.

Beregn den inducerede spænding?

Hvad ville den inducerede spænding være hvis antallet af vindinger i spolen var 35.

Øvelse 8.10

I definitionen af magnetisk flux $\Phi_B = B \cdot A \cdot \cos(\theta)$ har vi 3 variable på højre siden, som i princippet alle kan være funktioner af tiden t .

$$\Phi_B(t) = B(t) \cdot A(t) \cdot \cos(\theta(t))$$

- a) Vis, at den inducerede spændingsforskel over en enkelt vinding bliver

$$U = -\frac{d\Phi_b}{dt} = B'(t) \cdot A(t) \cdot \cos(\theta(t)) + B(t) \cdot A'(t) \cdot \cos(\theta(t)) - \theta'(t) B(t) \cdot A(t) \cdot \sin(\theta(t))$$

- b) Hvad bliver den inducerede spænding, hvis både arealet af spolen samt magnetfeltet er konstant?

I praksis opnås situationen i b) tilnærmelsesvist hvis enten spolen roterer rundt om en stationær magnet eller magneten roterer rundt foran en stationær spole. Vi antager nu, at rotationen sker med konstant vinkelhastighed ω dvs. $\theta(t) = \omega \cdot t$

Vis, at under samme betingelser som i opgave b) bliver den inducerede spænding så

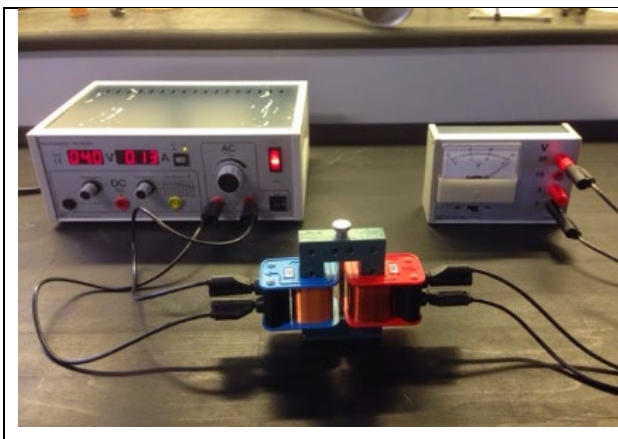
$$U = \omega \cdot B \cdot A \cdot \sin(\theta(t))$$

8.3 Transformatorer og transformation

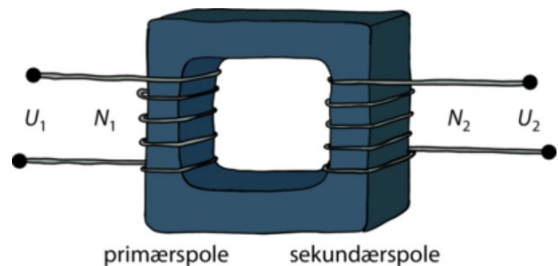
Faradays induktionslov kan bruges til at forstå, hvordan en transformator virker, og hvordan vi med sådan en kan transformere en vekselspænding op eller ned ved hjælp af elektromagnetisk induktion.

En transformator består af:

- **En primærspole** med N_1 vindinger, hvor vi tilslutter en vekselspænding U_1
- **En jernkerne**, der fungerer som leder for det magnetiske felt og sørger for, at fluxen bliver så ensartet som muligt.
- **En sekundærspole** med N_2 vindinger, hvor vi får den nye spænding U_2 over spolens endepunkter- se figuren her:



8.2



Kilde tv. <https://enverdenaffysikkemi.blogspot.com/2014/11/transformer-forsg.html>

Kilde th. <https://orbitastx.systime.dk/?id=797#c9182>

Da vi bruger **vekselstrøm (AC)**, vil magnetfeltet i jernkernen ændre sig hele tiden. Jernkernen leder det skiftende magnetfelt over i sekundærspolen og ifølge **Faradays induktionslov** vil dette føre til en induceret spænding i sekundærspolen.

8.3.1 Hvordan bestemmer vi spændingerne?

Vi antager, at fluxen er den samme i hele jernkernen og så gælder Faradays induktionslov for både primær- og sekundærspolen:

$$U_1 = -N_1 \cdot \frac{d\Phi_b}{dt} \quad \text{og} \quad U_2 = -N_2 \cdot \frac{d\Phi_b}{dt}$$

Øvelse 8.11

a) Divider de to ligninger med hinanden og vis derved transformatorligningen:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

b) Overvej hvad der sker med U_2 i forhold til U_1 når

$$N_2 > N_1$$

$$N_2 < N_1$$

c) Hvis du vil fordoble spændingen, hvor mange flere vindinger skal du så have i sekundærspolen i forhold til primærspolen?

8.3.2 Hvordan bestemmer vi strømmen?

I en **ideel transformator** går ingen energi tabt, så effekten P er den samme i sekundærspolen som i primærspolen:

$$P_{\text{primær}} = P_{\text{sekundær}}$$

Effekten beregnes som generelt produktet af strøm og spænding, dvs. $P = U \cdot I$, dvs. for en ideel transformator har vi:

$$U_1 \cdot I_1 = U_2 \cdot I_2$$

Øvelse 8.12

a) Hvad kan du sige om strømmen i sekundærspolen i forhold til primærspolen hvis

$$U_1 < U_2$$

b) Hvad kan du sige om spændingen i primærspolen i forhold til sekundærspolen hvis

$$I_1 < I_2$$

Øvelse 8.13

Udnyt transformatorligningen til at vise at der gælder en tilsvarende transformatorligning for strømmene i primær og sekundærspolerne:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

Øvelse 8.14

En transformator har en primærspole med 100 vindinger og en sekundærspole med 200 vindinger. Hvis vi tilslutter 230 V til primærspolen, hvad bliver spændingen på sekundærsiden?

Øvelse 8.15

Vi ønsker at sænke spændingen fra 230 V til 12 V. Hvor mange vindinger skal sekundærspolen have, hvis primærspolen har 500 vindinger?

Øvelse 8.16

En transformator har en Primærspænding på 230V, en Sekundærspænding på 12V og en Sekundærstrøm på 5A

a) Hvor stor er strømmen i primærspolen?

Øvelse 8.17

Du har en transformator med 500 vindinger i primærspolen og 50 i sekundærspolen. Primærspolen har en strøm på 2A.

a) Beregn strømmen i sekundærspolen

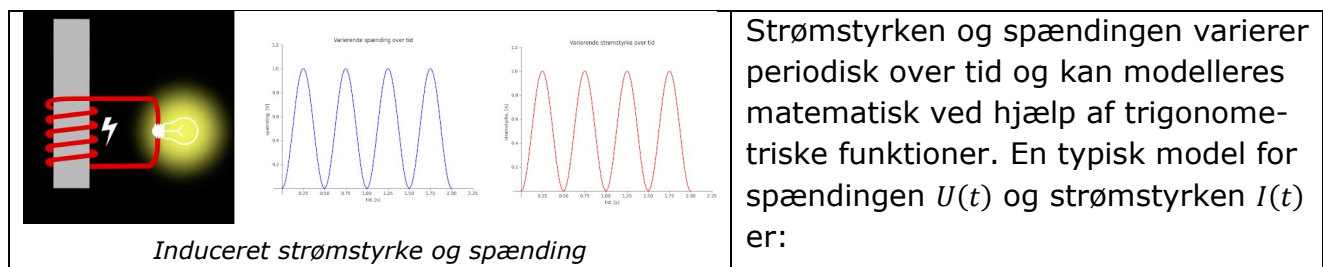
8.4 Jævnstrøm og vekselstrøm, almindelig og høj-spænding

Vestas' vindmøller genererer strøm ved, at vingerne driver en generator, som sidder i nacellen. Nacellen er den øverste del af vindmøllen, hvor vingerne er fastgjort. I nacellen findes mekanik til at holde vindmøllen pegende mod vinden, gearing og en generator. Vingerne på de store vindmøller tager en hel omgang ca. 7 gange i minuttet. Gearene omdanner denne rotation til en rotation på ca. 1500 gange i minuttet ved generatoren. Det giver en gearing på $1500/7 \approx 214$, så én omgang for vingerne giver ca. 214 omgange i generatoren. Til sammenligning er gearingen for en cykel omkring 3, så når pedalerne trædes én gang rundt, roterer baghjulet tre gange. Det er altså en meget stor gearing, som Vestas' vindmøller har.

8.4.1 Effekten i vekselstrøm

Modellering af vekselstrøm og beregning af effekt

I filmen vises, hvordan et ændret magnetfelt får en strøm til at løbe i en ledning. Dette giver en ændring i spændingsfaldet og strømstyrken. Figuren viser et eksempel, hvor strømstyrken og spændingsfaldet varierer på samme måde.



$$U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

hvor U_0 og I_0 er amplituden og svarer til udsving fra ligevægt, og ω er vinkelfrekvensen. Udsvingene er periodiske og gentager sig efter en periode. Perioden kan beregnes ud fra vinkelfrekvensen ved, $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$.

Effekten $P(t)$ kan beregnes som produktet af spændingen og strømmen:

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = U_0 \cdot I_0 \cdot \sin^2(\omega \cdot t)$$

For at finde den gennemsnitlige effekt over en periode T anvendes integralet:

$$P_{\text{avg}} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt.$$

Ved at udnytte trigonometriske identiteter og gennemsnitsværdien af sinusfunktioner over en periode, kan den gennemsnitlige effekt også udtrykkes som:

$$P_{\text{avg}} = \frac{1}{2} U_0 I_0.$$

Vi viser, at udtrykket passer enten ved en lidt lang beregning i øvelse 18 eller en ret smart metode i øvelse 19.

Øvelse 18

For at udregne integralet af $\sin^2(\omega t)$ anvendes følgende trigonometriske identitet:

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Brug den trigonometriske identitet til at vise, at $\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}$.

Vis, at $P_{\text{avg}} = \frac{1}{2} U_0 I_0$.

Løsning

Identiteten bruges til at omskrive $\sin^2(\omega t)$ til en form, der er lettere at integrere:

$$\sin^2(\omega t) = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}.$$

Når denne identitet indsættes i integralet, bliver det:

$$\int \sin^2(\omega t) dt = \int \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt.$$

Dette kan opdeles i to dele:

$$\int \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} \int 1 dt - \frac{1}{2} \int \cos(2\omega t) dt.$$

Resultatet bliver:

$$\int \sin^2(\omega t) dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} + C,$$

hvor C er integrationskonstanten. Over en hel periode T , vil gennemsnittet af $\sin^2(\omega t)$ kunne skrives som:

$$P_{\text{avg}} = \frac{U_0 I_0}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{U_0 I_0}{T} \left(\frac{T}{2} - \left(\frac{\sin(2\omega T)}{4\omega} - \frac{\sin(2\omega \cdot 0)}{4\omega} \right) \right).$$

Dette forenkles til:

$$P_{\text{avg}} = \frac{U_0 I_0}{T} \cdot \frac{T}{2} = \frac{1}{2} U_0 I_0.$$

I næstsidste linje bruges, at $T = \frac{2\pi}{\omega}$, hvilket giver $\sin(2\omega T) = \sin(4\pi) = 0$.

Øvelse 19

Nedenfor er plottet $\sin^2(t/2\pi)$ som den røde graf, hvilket svarer til en periode $T = 1$.

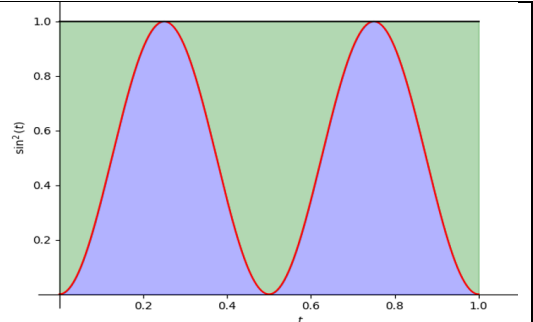
$\int_0^T \sin^2(t/2\pi) dt$ svarer dermed til det blå areal.

Argumenter for, at det blå og det grønne areal er lige store.

Udregn det samlede areal (meget let).

Brug resultatet til at vise, at det blå areal er $A = \frac{1}{2}$.

Konklusion: $\int_0^T \sin^2(t/2\pi) dt = \frac{1}{2}$, så $P_{\text{avg}} = \frac{1}{2} U_0 I_0$.



Strøm i hjemmet

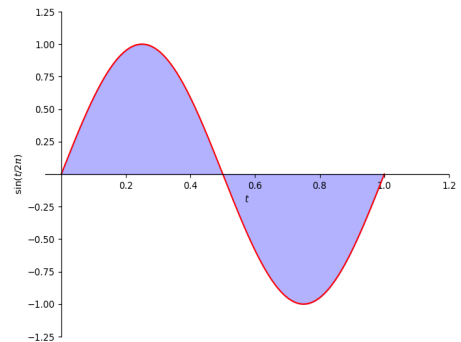
Den strøm vi har i hjemmet, har en frekvens på $f = 50\text{Hz}$ og en spænding på $U = 220\text{V}$. Strømstyrken varierer, men de fleste sikringer er sat til at springe ved en strømstyrke på $I = 10\text{A}$. Spørgsmålet er nu hvordan man regner spændingen ud for vekselstrøm beskrevet med en sinus-svingning.

Gennemsnit virker ikke

Vi tænker os som før, at spændingen er givet ved $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ og vil gerne finde gennemsnittet:

$$\begin{aligned} U_{avg} &= \frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt = \frac{U_0}{T} \int_0^T \sin(\omega t) dt \\ &= -\frac{U_0}{T\omega} [\cos(\omega t)]_0^T = -\frac{U_0}{T\omega} [\cos(\omega T) - \cos(\omega \cdot 0)] \\ &= -\frac{U_0}{T\omega} [\cos(2\pi) - \cos(0)] = -\frac{U_0}{T\omega} [1 - 1] = 0 \end{aligned}$$

Integralet giver altså nul, hvilket også kan ses på figur, hvor arealet er det samme over og under x-aksen.



RMS spænding

For at komme uden om dette problem bruger man i stedet gennemsnittet af den kvadrerede spænding, som man derefter tager kvadratroden af. Det svarer fuldstændigt til at finde standardafvigelsen, og RMS står for root mean square. Lad os beregne det:

$$U_{rms}^2 = \frac{U_0^2}{T} \int_0^T (\sin(\omega t))^2 dt.$$

Dette integral kender vi heldigvis fra udregningen af den gennemsnitlige effekt, hvor vi fandt

$$\int_0^T (\sin(\omega t))^2 dt = \frac{T}{2}.$$

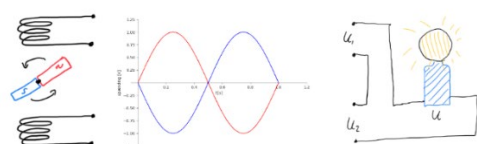
RMS spændingen bliver

$$U_{rms} = \sqrt{U_0^2 \frac{1}{T} \frac{T}{2}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

Når vi har $U = 220\text{V}$ hjemme betyder det, at udsvinget i spænding i vores stikkontakter er $U_0 = U_{rms} \sqrt{2} = 220\text{V} \sqrt{2} = 311\text{V}$. Ved $U_{rms} = 220\text{V}$ spænding er udsvingene i spændingen faktisk $U = 311\text{V}$.

8.4.2 Hvordan genererer strømmens to faser

Ved en simpel generator med to faser sidder der en magnet i midten, som roterer, og to spoler rundt om, en på hver side.



Figuren ovenfor viser en tegning af en magnet, som drejer mellem to spoler og genererer en spænding i de to spoler. Spolerne er placeret over for hinanden, hvilket giver en spænding, som er i modfase, hvilket ses i diagrammet med de to grafer. At de to svingninger er i modfase, kan skrives matematisk som

$$U_1 = U_0 \sin(\omega t), \quad U_2 = U_0 \sin(\omega t + \pi).$$

Til højre i figuren virker spændingsforskellen over en elektrisk pære sådan, at når den røde kurve i starten er høj, løber strømmen den ene vej, mens den til sidst, når den blå er høj, løber den anden vej. Det samlede spændingsfald over den elektriske pære fås ved at trække spændingen fra de to spoler fra hinanden.

$$U = U_1 - U_2 = U_0 \sin(\omega t) - U_0 \sin(\omega t + \pi) = U_0 (\sin(\omega t) - \sin(\omega t + \pi))$$

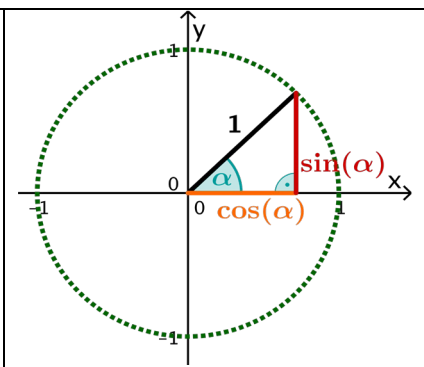
Øvelse 8.20

Betragt illustrationen af enhedscirklen:

Brug af sin og cos i enhedscirklen til at argumentere definitionen for, at $\sin(v) = -\sin(v + \pi)$.

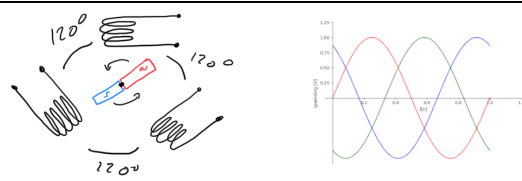
Brug det til at argumentere for, at $U = 2U_0 \sin(\omega t)$.

Konklusion: Ved to faser får man altså den dobbelte spænding.



8.4.3 Hvordan genererer strømmens tre faser

I Vestas' møller sidder der tre spoler symmetrisk omkring den roterende magnet. Det giver 3-faset strøm, hvor spændingen fra hver spole er forskudt med 120° , hvilket svarer til $2\pi/3$ radianer.



Generering af 3-fase strøm.

Øvelse 8.21 Kombinationsmuligheder med 3-faser.

Vi vil undersøge mulighederne ved at plote graferne og aflæse perioden og amplituden. Spændingen fra de tre faser er U_1, U_2, U_3 , og et eksempel kunne være $U = U_1 + U_2 - U_3$.

- Undersøg om perioden og frekvensen forbliver den samme.
- Undersøg om amplituden af den kombinerede spænding altid er $\sqrt{3} \cdot U_0$.

8.4.4 Transformer af vekselstrøm

Transformer af vekselstrøm er en proces, hvor spændingen i et vekselstrømskredsløb ændres ved hjælp af en transformer. En transformer består af to spoler, der er viklet omkring en fælles jernkerne. Når vekselstrøm løber gennem den ene spole (primærspolen), skaber det et skiftende magnetfelt i jernkernen, som inducerer en spænding i den anden spole (sekundærspolen). Forholdet mellem spændingen i primær- og sekundærspolen afhænger af antallet af vindinger i hver spole.

Forholdet mellem spændinger: Transformatorens spændingsforhold kan beskrives med følgende formel:

$$\frac{U_s}{U_p} = \frac{N_s}{N_p},$$

hvor:

U_s er spændingen i sekundærspolen,

U_p er spændingen i primærspolen,

N_s er antallet af vindinger i sekundærspolen,

N_p er antallet af vindinger i primærspolen.

Hvis antallet af vindinger i sekundærspolen er større end i primærspolen ($N_s > N_p$), øges spændingen, og transformeren kaldes en optransformer. Hvis antallet af vindinger i sekundærspolen er mindre end i primærspolen ($N_s < N_p$), reduceres spændingen, og transformeren kaldes en nedtransformer.

Anvendelse af transformere

Transformere bruges i mange forskellige sammenhænge, herunder:

Elforsyning: I elnettet bruges transformere til at øge spændingen (optransformere) ved transport af elektricitet over lange afstande for at minimere energitab. Ved forbrugernes hjem reduceres spændingen igen (nedtransformeres) til et sikkert niveau, typisk 230V i Danmark.

Elektroniske apparater: Transformere bruges til at tilpasse spændingen til det niveau, som elektroniske apparater kræver.

Industri: I industrien bruges transformere til at levere højspænding eller lavspænding afhængigt af maskinernes behov.

Effekt og energitab

Transformere er meget effektive og kan overføre op til 99% af den elektriske energi fra primær- til sekundærspolen. Dog kan der opstå små energitab som følge af:

- Jernkerne-tab: Energi tabt som varme i jernkernen på grund af hysteres og hvirvelstrømme.
- Kobber-tab: Energi tabt som varme i spolerne på grund af deres elektriske modstand.

Transformering af vekselstrøm er en essentiel teknologi, der gør det muligt at transportere elektricitet effektivt og sikkert fra kraftværker til forbrugere.

8.4.5 Energitab og transmission

Strømmen skal transporteres fra vindmøllerne til forbrugeren, enten industrien eller husholdninger. Når strøm transporteres gennem en ledning, sker der en opvarmning af ledningerne, hvilket resulterer i et energitab.

Der er planer om at lave power-to-x anlæg, som kan lave den elektriske energi om til flydende brændstof tæt ved vindmøllerne, men i øjeblikket bliver langt den meste producerede energi transporteret via ledningsnettet.

Ledninger virker som ohmske modstande og følger Ohms lov, hvor spændingsfaldet er et produkt af strømstyrken og modstanden i ledningen,

$$U = R \cdot I$$

Spændingsfaldet, U , er her den lavere spænding, som er i den anden ende af en ledning. Modstanden, R , i en ledning afhænger af hvilket materiale og hvor tyk ledningen er. Jo bedre ledende og jo tykkere ledninger, jo mindre tab. Tabet af energi per sekund kaldes effekten og kan omskrives til en funktion af strømstyrken med Ohms lov,

$$P_{\text{tab}} = U \cdot I = R \cdot I^2$$

Ved at transformere til *højspænding* kan vi få samme effekt, men ved en lavere strømstyrke og derfor ved et lavere effekt-tab. I Danmark har vi et højspændingsnet med en spænding på mellem 132kV og 400kV, altså helt op til $U = 400.000\text{V}$, mens s-togs netværket er på 25kV.

Øvelse 8.22

Vi vil gerne levere en fast effekt til forbrugerne kaldet P . Dette kan vi enten gøre med en høj spænding, U_1 , eller en lav spænding U_2 . Da effekten leveret skal være den samme, må $U_1 \cdot I_1 = U_2 \cdot I_2$.

- a) Vis, at $\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_2}{U_1}$.
- b) Vis, at forholdet mellem tabet er $\frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1^2}{I_2^2}$.
- c) Brug punkt 1 til at vise, at $\frac{P_1}{P_2} = \frac{U_2^2}{U_1^2}$.
- d) Hvor meget større er tabet i de gamle 132kV net i forhold til de nye 400kV net?
- e) Hvis man skal transportere elektrisk energi over lange afstande, bruger man ultra-højspænding, UHV, hvor spændingen ligger på 1000kV.
- f) Hvor meget lavere er tabet ved UHV i forhold til de danske 400kV net?

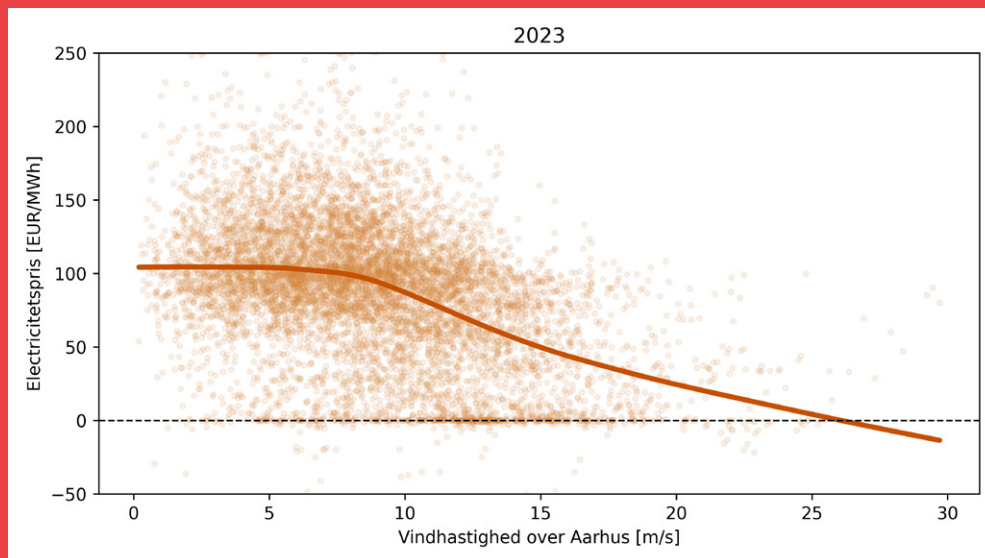
Det er især Kina, som har udbygget deres UHV-netværk, hvor de transporterer strøm genereret i store vandkraftværker til industriområder. Et eksempel er Yunnan–Guangdong transmission line på 1953 km med en spænding på 800kV. For UHV estimeres tabet pr. 1000 km til at være mellem 3% – 7%.

Øvelse 8.23 Sammenligning af almindelig højspænding med UHV

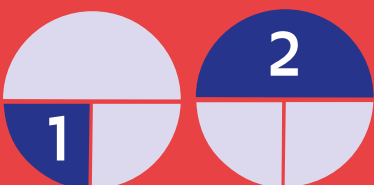
- a) Find et danmarkskort og estimer tabet ved at distribuere energi fra vestkysten til hele landet med et 400kV netværk.
- b) Hvordan vil det se ud, hvis vi udbyggede til et UHV-netværk?
- c) På europæisk plan snakker man om at forbinde landene med UHV-netværk.
- d) Find igen et kort, men nu med Tyskland. Hvad vil tabet være ved en transmission fra Esbjerg til München?

9.

Vind og el gennem døgnets og årets rytme



På grafen herover, som Tue Vissing Jensen fra Vestas viser i filmen, kan vi se det fænomen som Caspers farmor og mange med hende undrer sig over – hvordan kan en virksomhed, der skal leve af at sælge strøm, forære den væk, og endda gå i minuspriser? Det får du lov til selv at udforske i dette kapitel, hvor vi har fået adgang til en stor datamængde fra Vestas, netop om pris, vindhastighed og elproduktion.



9. Vind og el gennem døgnets og årets rytme

I dette kapitel får du adgang til et autentisk datasæt fra Vestas med målinger over et helt år på en af deres møller:

Stamdata for vindmøllen

- Model: Vestas V90-3MW
- Max produktion per mølle: 3.0 MW
- Lanceringsår: 2003
- Indkøbspris: Varierer, regn med 5.600.000 DKK per styk
- Hubhøjde: 105 meter
- Rotordiameter: 90 meter
- Totalvægt: 396 ton, af hvilket tårnet er udgør 285 ton, nacellen 70 ton, og roto-
ren 41 ton.
- Antal solgt: 3.427 styk af 3MW-varianten. 11.288 for alle V90 varianter.

V90-3MW møllen optræder i videoen - Det er den mølle vi bruger som whiteboard.

Data er givet i excelformat, og består af to regneark i én fil; et med data fra 2011, og et med data fra 2023.

Regnearkene har følgende kolonner:

- Tidspunkt: Tidspunktet angivet i data og klokkeslæt, dvs der er 365 x 24 rækker.
- Vindhastighed: Vindhastigheden givet i meter per sekund.
- Elpris: Elpris i DK1 (vestdanmark) givet i DKK per MWh for den givne time.
- Produktion: Produktionen i MWh henover timen for en Vestas V90-mølle, hvis den mødte den givne vindhastighed.

Hent regnearket [her](#) link til 9-a-data fra vestas mølle over et år.

Start med at orientere dig i arket, hvilke oplysninger vi har. Læg mærke til, at der er data fra alle døgnets 24 timer, hvilket betyder, at hvis vi ikke sorterer omhyggeligt, så vil døgnrytmen forvinde, og måske gemme vigtige informationer.

Hver gang du foretager dig noget i regnearket så skal du gemme en ny version.

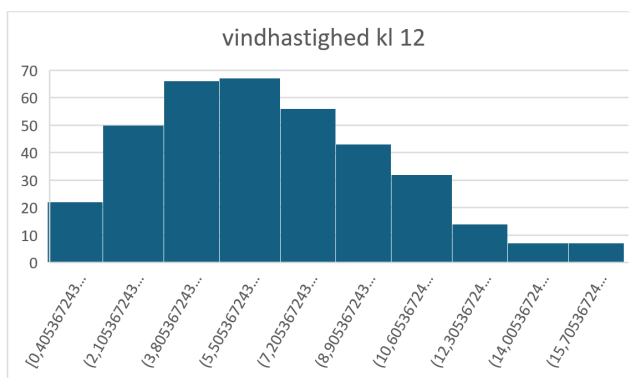
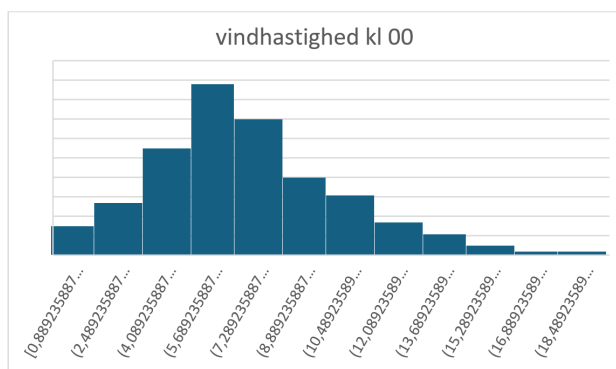
Start med at undersøge, om der er væsentlige forskelle på priserne hen over døgnet

Øvelse 9.1 Sorter data

Sorter data i regnearket efter klokkeslættet, så du får kl 0 i de første 365 rækker, kl 1 i de næste osv.

Overvej selv, hvad det kunne være interessant at undersøge

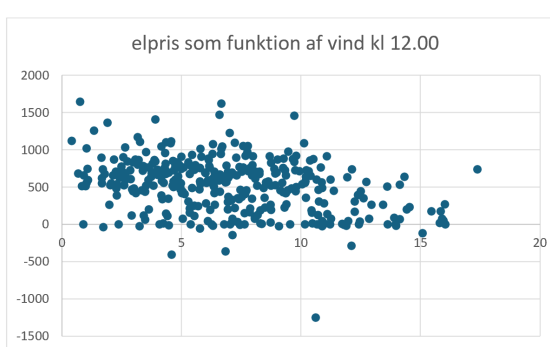
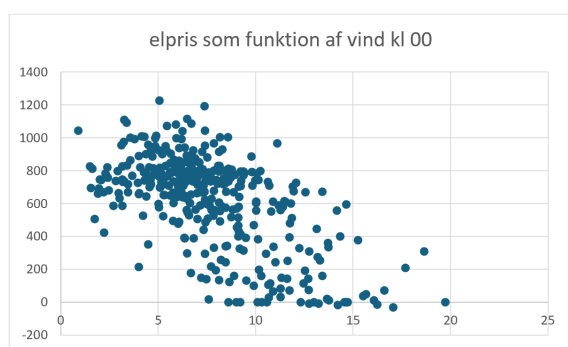
Vi kunne fx se på hvordan vindhastighederne fordeler sig kl 00 og kl 12:



Kommenter.

Øvelse 9.2 Elpris over døgnet

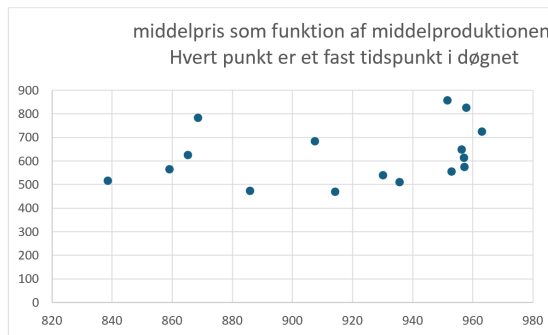
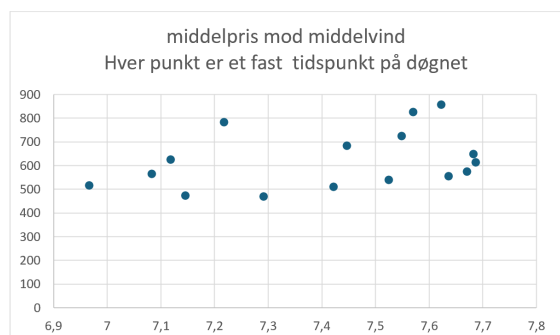
Anvend det sorterede ark og undersøg om der er forskelle – anvend en punktgraf:



Stil selv spørgsmål til graferne og kommenter

Øvelse 9.3. Middelværdier

Udregn middelværdier af vindhastighed, pris og produktion for hvert klokkeslæt. Når du har disse data, kan du undersøge sammenhænge som disse:

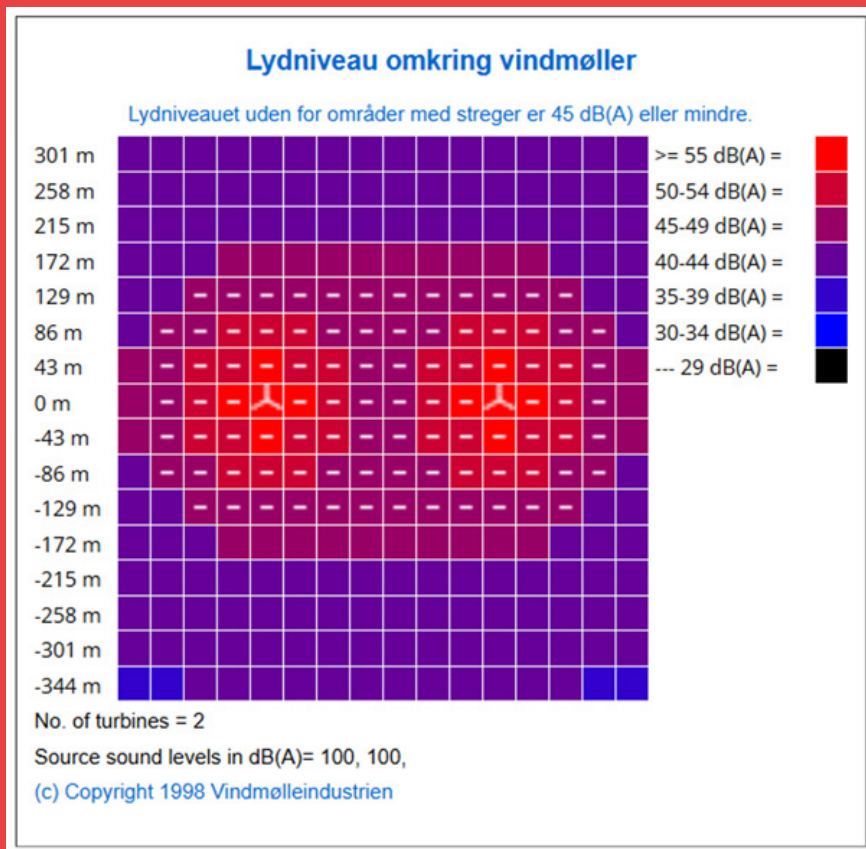


Formuler selv spørgsmål og anvend statistiske værktøjer som standardafvigelse, regression og andet.

Da Danmarks elnet er forbundet med store dele af ikke bare Nordens men Europas, skal man naturligvis være varsom med at konkludere for bastant alene på basis af danske tal. Men nogle specielle spørgsmål får man hurtigt svar på: Fx hvor mange tidspunkter er der faktisk negativ pris.

10.

Støj fra vindmøller



Støj fra vindmøller kan være voldsomt belastende og give anledning til nabokonflikter og modstand mod nye møller. Så det er et problem vindmøllefabrikanter tager alvorligt. Noget kan løses, andet der er forårsaget af naturens kræfter er vanskeligere at håndtere. Det studeres nærmere i dette kapitel.

10. Støj fra vindmøller

Støjen fra vindmøller kan opdeles i to kategorier: mekanisk støj og aerodynamisk støj

Mekaniske støjklender

Den mekaniske støj opstår når f.eks. tandhjul eller andre komponenter roterer og arbejder mod hinanden. Det kan typisk komme fra gearkassen, akslerne og i vindmøllens generator. Ældre møller fra 1980'erne og tidligere udsender en del mekanisk støj, som i de værste tilfælde kan høres op til 200 meter fra vindmøllen. Fra midten af 90'erne var konstruktionen af møllerne så optimeret, at ingen producenter længere betragtede den mekaniske støj som et problem.

Aerodynamiske støjklender

Aerodynamisk støj kan man ikke konstruere sig ud af. Når vinden rammer en genstand som f.eks. et træ, et hus eller en møllevinge, vil der altid blive udsendt lyd fra sammenstødet. Som regel vil lyden være en jævn blanding af alle mulige frekvenser, og vi taler så om "hvid støj". Men i nogle situationer kan der være bestemte frekvenser, der fremhæves, som f.eks. når vi blæser hen over en flaske og hører en ren tone.

I de følgende afsnit skal vi fokusere på den hvide støj og se på sammenhængen mellem den energi, der er i støjen, dvs. effekten eller lydtrykket, og hvor høj lyden opfattes.

10.1 Lydintensitet og lydstyrke

Lydintensitet er den energimængde, som en lydbølge transporterer pr. sekund pr. arealenhed. Den måles derfor i Watt per kvadratmeter (W/m^2) og defineres som:

$$I = \frac{P}{A}$$

Hvor I er lydintensiteten (W/m^2), P er effekten (Watt) og A er det areal, lyden breder sig over (m^2)

Den svageste lyd, vi mennesker kan høre (høregrænsen), har intensiteten:

$$I_0 = 1,0 \times 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Den kraftigste lyd, vi mennesker kan tåle uden smerte (smertegrænsen), har en intensitet på ca. 1 W/m^2 .

Øvelse 10.1

- Beregn forholdet $\frac{\text{kraftigste lyd}}{\text{svageste lyd}}$ mellem den kraftigste og svageste lyd.
- Udtryk med ord, hvor mange gange større den kraftigste lyd er ift. den svageste.

10.1.1 Decibelskalaen – Hvorfor bruger vi den?

Lydintensiteten kan altså variere fra $1,0 \times 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ til $1,0 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$, hvilket er et ekstremt stort interval!

For at gøre det lettere at sammenligne lydniveauer, bruger vi i stedet *lydstyrken* L , som er defineret som følger:

$$L(I) = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

hvor L er lydstyrken (lydniveauet) målt i decibel (dB), I er lydintensiteten i W/m^2 og $I_0 = 1,0 \times 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ er høregrænsen.

Øvelse 10.2

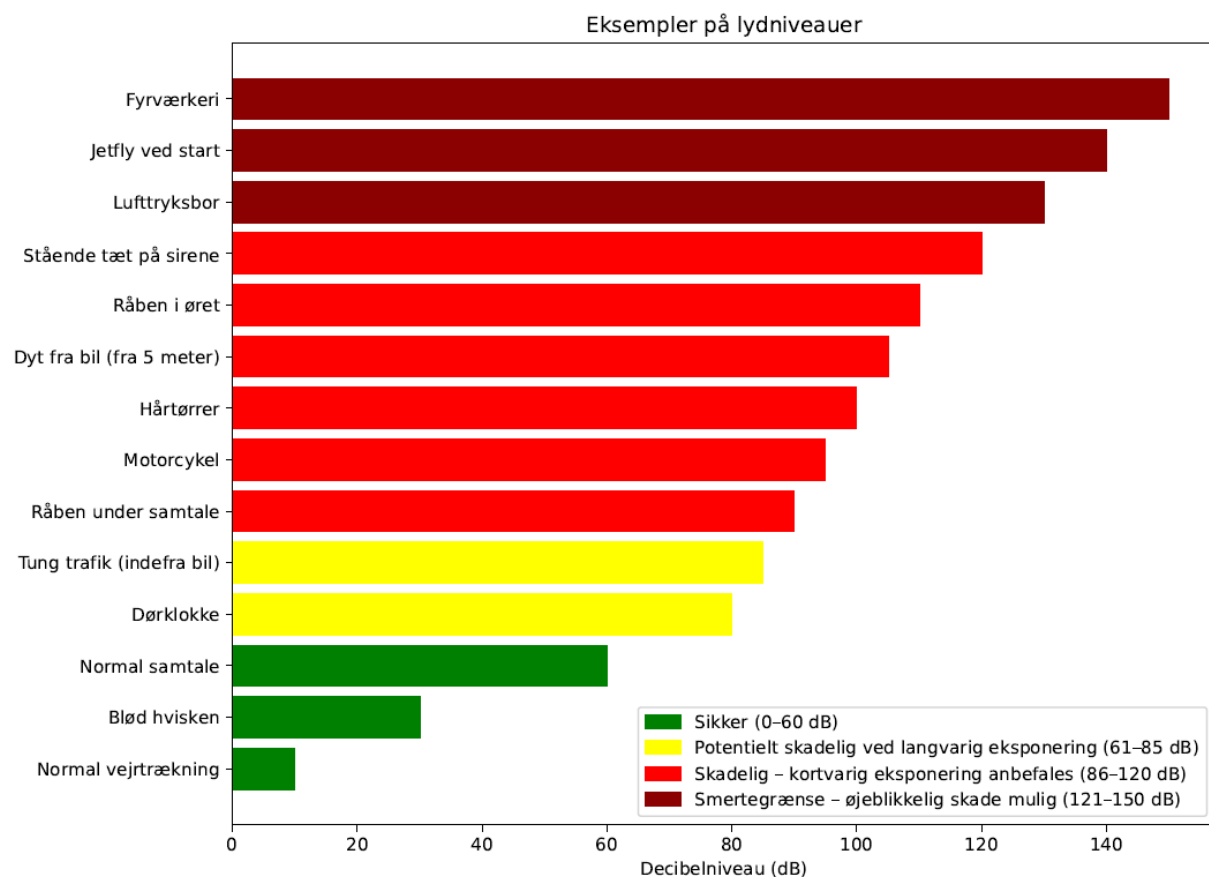
- Vis, at lydstyrken for høregrænsen svarer til 0 decibel
- Vis, at smertegrænsen svarer til en lydstyrke på 120 dB
- Forklar hvorfor man godt kan have et negativt dB-tal
- Hvad svarer det til?

Øvelse 10.3

- Vis at formelen for lydstyrke kan skrives som $L(I) = 10 \cdot \log(I) + 120$
- Vis, at intensiteten kan beregnes fra en kendt lydstyrke L ved formelen

$$I(L) = 10^{0,1 \cdot L - 12}$$

Tabellen her viser nogle typiske lydniveauer:



Øvelse 10.4

- Løs følgende opgaver ved brug af tabellen:
- Beregn lydintensiteten I for almindelig samtale.

- c) Beregn lydintensiteterne I_{hvisken} for hvisken og I_{smerte} for smertegrænsen.
d) Overvej, hvorfor det er smart at bruge en logaritmisk skala for lydstyrken.

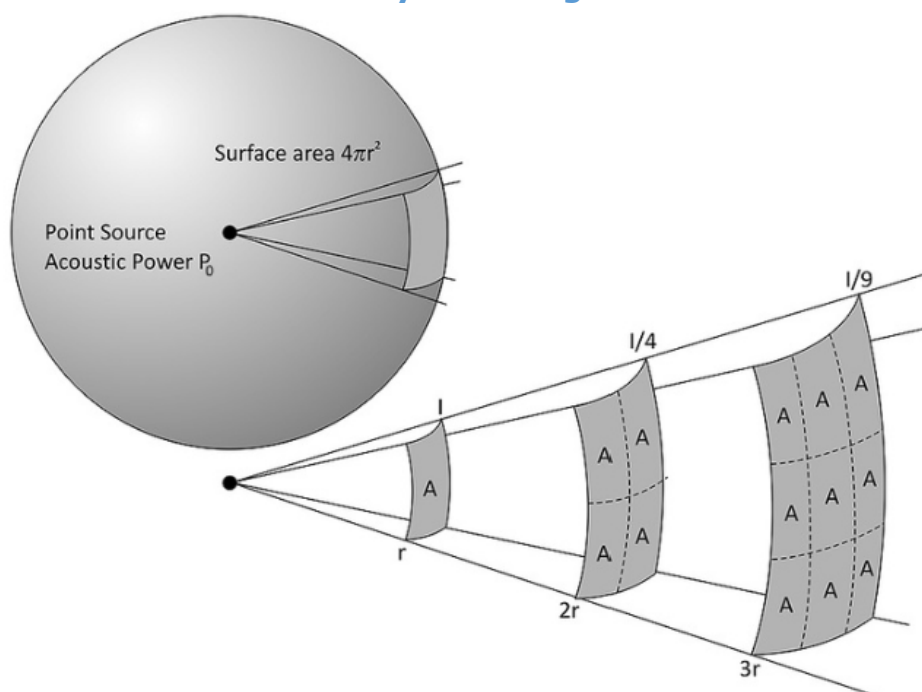
Øvelse 10.5

- a) Ved en rockkoncert kan lydintensiteten være 1 W/m^2 . Hvor mange dB svarer det til?
b) En hvisken har en lydstyrke på 30 dB, mens en motorsav har 110 dB. Hvor mange gange større er lydintensiteten fra motorsaven?

10.2 Afstandskvadratloven

Når vi bevæger os væk fra en lydkilde, bliver lyden svagere. Men hvordan hænger lydstyrken præcist sammen med afstanden? Vi kigger i det følgende på nogle opgaver, der hjælper os til at udlede en - lidt idealiseret - formel for det!

10.2.1 Afstandskvadratloven – en fysisk antagelse



Kilde <https://www.soundonsound.com/sound-advice/q-does-strength-proximity-effect-depend-volume-source>

Betragt figuren herover. For at gøre det simpelt, antager vi 3 ting, nemlig at:

1. Lyden kommer fra en punktformig lydkilde med effekten P_0 (Watt)
2. Lyden spreder sig ens i alle retninger så al lydenergien fordeles jævnt på en kugleflade.
3. Der er ingen absorption (dæmpning) eller refleksion af lyden, når den udbreder sig i rummet (dvs. al energi bevares, men fordeles over en større overflade).

Øvelse 10.6

Formlen for overfladearealet A af en kugle med radius r er $A = 4\pi r^2$

- a) Vis, at når kuglens radius fordobles så 4 dobles overfladearealet
b) Hvor mange gange bliver arealet større når radius 3 dobles?

- c) Hvad er forskellen på effekt (Watt) og lydintensiteten? **Vink: kig på enhederne**
 d) Forklar hvad figuren herover viser. Hvad betyder tallene I , $I/4$ og $I/9$?
 e) Vis, at formlen for lydintensiteten $I(r)$ som funktion af afstanden r til kilden kan

skrives:
$$I(r) = \frac{I_0}{r^2} \text{ med } I_0 = \frac{P_0}{4\pi}$$

Sætning 1 Afstandskvadratloven

Antag en punktformig lydkilde har effekten P_0 (målt i Watt).

Afstanden fra lydkilden måles i meter. I afstanden 1 m er lydintensiteten $I_0 = \frac{P_0}{4\pi}$.

Så er lydintensiteten $I(r)$ som funktion af afstanden r til kilden:

$$I(r) = \frac{I_0}{r^2}$$

Overvej hvilken af de tre indledende antagelser for udledningen der er mindst realistisk, når vi taler om en virkelig lydkilde i virkelige omgivelser.

Øvelse 10.7

Et jetfly der starter, har en lydintensitet på ca. $I_0 = 100 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ i en afstand på 1 meter

- a) Hvad er lydintensiteten fra jetflyet 20 meter fra flyet?
 b) Hvor mange dB svarer det til?
 c) Hvor langt væk skal vi før støjen fra flyet svarer til lydniveauet for almindelig samtale (60 dB)?

Eksperiment: Afstandskvadratloven for lydstyrke?

Undersøg om afstandskvadratloven gælder for lydstyrken $L(r)$. Du skal bruge et dB meter (er let at finde som app til din smartphone), en lineal eller tommestok og en lydkilde med konstant tone (her kan du også få hjælp af en smartphone eller computer – google f.eks. "online tonegenerator")

Fremgangsmåde

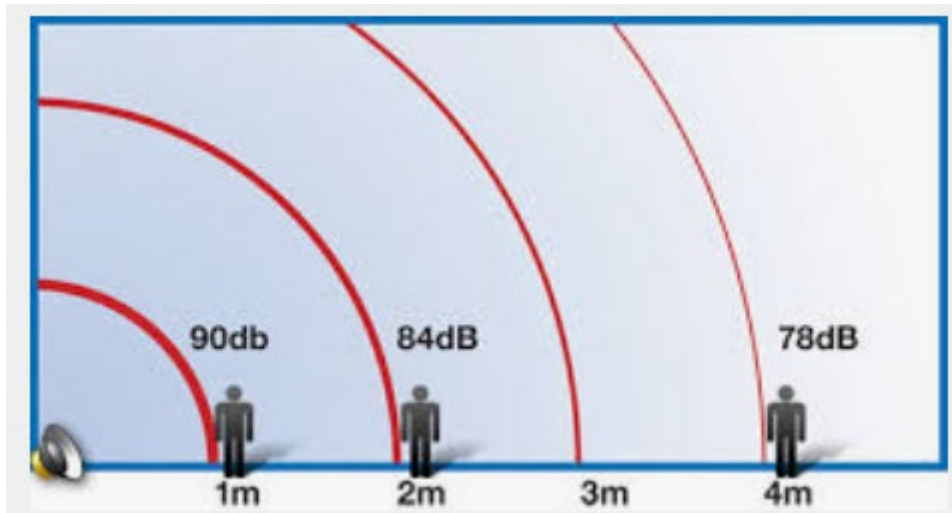
Du skal være i et lokale eller område hvor der ikke er for mange forstyrrende lyde. Sørg for, at lydkilden ikke er for tæt på hårde reflekterende flader. Mål lydstyrken ved en række forskellige afstande og noter samhørende værdier af lydstyrke og afstand ned i en tabel.

Databehandling

Tegn dine målinger ind i et punktplot hvor du har afstanden ud af førsteaksen og lydstyrken op ad andenaksen. Undersøg ved potensregression (hvorfor potensregression?) om afstandskvadratloven er opfyldt

Øvelse 10.8

Betragt figuren herunder hvor lydniveauet fra en højttaler er vist. Vi antager, at lydniveauet $L(I_{1\text{ meter}})$ på 90 dB i 1 meters afstand er korrekt.



- a) Hvad er lydintensiteten $I_{0(\text{højttaler})}$ i afstanden 1 meter? Pas på: der er to forskellige I_0 'er i spil her! Dels er der I_0 fra definitionen af lydstyrke og en $I_{0(\text{højttaler})}$ for højttaleren fra afstands-kvadratloven. Det er den sidste vi skal finde. Du skal få:

$$I_{0(\text{højttaler})} = 0,001\text{W/m}^2$$

- b) Hvad er lydkildens effekt P_0 ?
- c) Hvad er lydintensiteten I i 2 meters afstand?
- d) Hvad er lydstyrken L i 2 meters afstand. Passer det med de 84 dB på figuren?
- e) Undersøg på samme måde om en afstand på 4 m svarer til en lydstyrke på 78 dB
- f) Plot de tre punkter med afstand ud af x-aksen og lydstyrken (dB) op ad y-aksen og undersøg om det også passer med en afstands-kvadratlov.

Øvelse 10.9

- a) Vis med et konkret eksempel, at når vi fordobler afstanden, falder lydstyrken L med ca. 6. dB
- b) Opstil en formel for lydstyrken L som funktion af afstanden r . **Vink: opstil den sammensatte funktion $L = L(I(r))$**
- c) Vis at den eksakte værdi lydstyrken falder med ved en fordobling af afstanden er $20\log(2)$. **Vink: opstil udtrykket $L(2r) - L(r)$ og reducer dette.**
- d) Vis, at den generelle formel for lydstyrken som funktion af afstanden kan udtrykkes:
- $$L(r) = 10(\log(K_0) - 2\log(r)) = L_0 - 20\log(r)$$
- hvor K_0 er en konstant.
- e) Hvordan hænger konstanten K_0 sammen med lydkildens effekt P_0 i afstanden 1 m?

Eksperiment Afstandskvadratloven for lyd igen...også selvom du ikke har lavet forsøget

Nu da vi har udledt en teoretisk formel for lydstyrken som funktion af afstanden, kan vi lave en ny databehandling af eksperimentet ovenfor. I stedet for at plote lydstyrke som funktion af afstand gør vi nemlig gøre noget andet:

- Forklar, hvorfor det vil være en god idé i databehandlingen at beregne $\log(r)$ for alle de målte afstande og lave et plot med $\log(r)$ ud ad førsteaksen og lydstyrken op ad andenaksen?
- Lav plottet og lav lineær regression på datasættet.
- Hvilken fortolkning er der af regressionslinjens skæring med andenaksen?
- Beregn den afstand hvor regressionslinjens skærer førsteaksen. Hvilken fortolkning er der af denne afstand?

10.2.2 Addition af støj

Når vi modtager støj fra flere forskellige lydkilder (målt i dB) og skal finde den samlede lydstyrke, kan vi ikke bare lægge decibeltallene sammen! Intensiteterne er derimod et mål for hvor meget energi, der kommer pr. sekund fra de forskellige lydkilder, og den samlede energi kan vi derfor godt finde ved at addere de enkelte bidrag. Til sidst kan vi så bruge formlen for lydstyrken og regne tilbage til decibel ud fra den samlede lydintensitet.

Øvelse 10.10

Lad os lege, at vi har to lydkilder som i det punkt, vi står i, har lydstyrker L_1 og L_2

- Vis, at intensiteten fra lydkilde 1 er: $I_1 = I_0 \cdot 10^{0,1 \cdot L_1}$
- Vis, at den samlede intensitet i punktet vi står i bliver $I_{tot} = I_0 (10^{0,1 \cdot L_1} + 10^{0,1 \cdot L_2})$
- Vis, at hvis $L_1 = L_2 = L$ så bliver den samlede lydstyrke $L_{tot} = 10\log(2) + L$

Den samlede lydstyrke vokser altså kun med $10\log(2)$ dB dvs. ca. 3,0 dB, når vi lægger to ens lydstyrker sammen, og det uanset hvor store de to lydstyrker er!

Øvelse 10.11

Du står midt mellem to ens højtalere der hver har en lydstyrke på 70 dB

- Hvor stor bliver den samlede lydstyrke?

Vi placerer nu flere højtalere magen til de to første i en cirkel rundt om dig, og du står i centrum

- Hvor mange højtalere af denne slags skal vi placere, for at den samlede lydstyrke øges med 10 dB? Det kan regnes eksakt ud helt uden lommeregner!

Øvelse 10.12

En maskine larmer med 80 dB, og en anden larmer med 74 dB.

- Vis, at den samlede lydstyrke bliver ca. 81 dB

Tre maskiner udsender henholdsvis 85 dB, 80 dB og 78 dB.

b) Hvad er det samlede lydniveau? (Du skal få 86,8 dB)

Øvelse 10.13

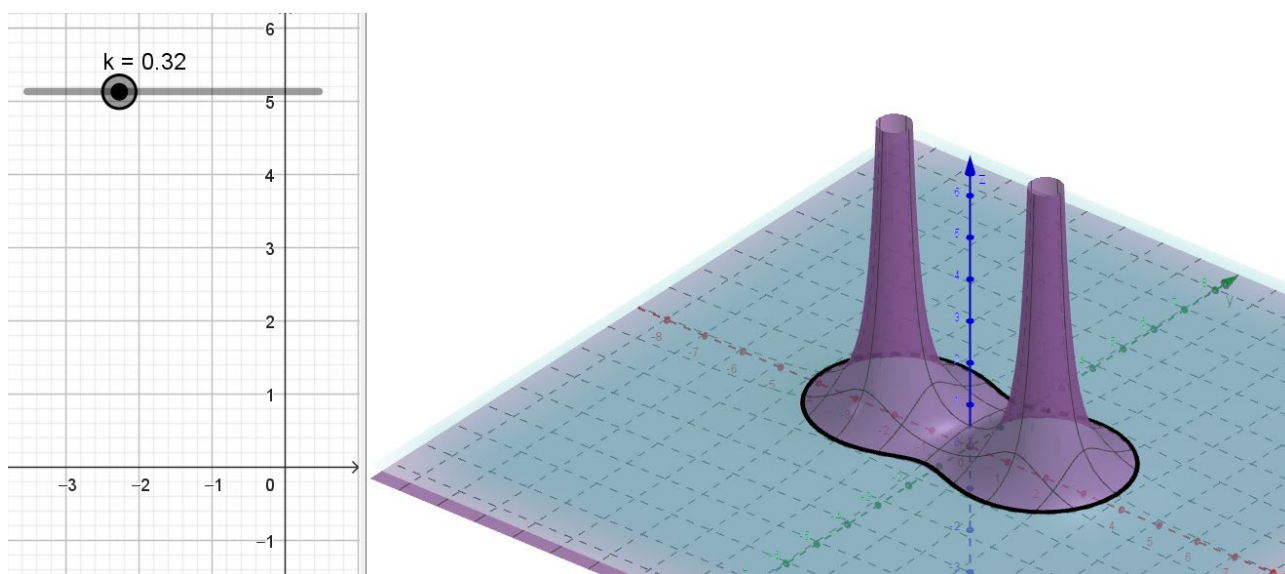
Find på nettet realistiske tal for lydniveauet fra to vindmøller, du står midt i mellem.

c) Beregn den samlede lydstyrke.

d) Sammenlign med tabellen over dagligdags støjniveauer fra starten af afsnittet. Hvad svarer støjen mest til?

Projektskitse/SRP: Støj fra vindmølleparker

Hvordan beregner man støjniveauet fra en hel vindmøllepark? Vi kan her kombinere afstandskvadratloven og definitionen af lydstyrke på forskellig måde, og der kan måles på den virkelige verden! Start med at lege med en simpel model med to vindmøller med samme lydintensitet. Opstil en funktion af to variable, der beregner lydintensiteten i et hvert punkt i x-y- planen. Undersøg niveaukurverne for lydintensiteten med en skyder som vist her:



Hvad ligner niveaukurverne, når vi kommer langt væk? Udvid med flere møller og realistiske mål for intensiteter og afstande.

Du kan udføre et eksperiment med din smartphone eller skolens lydmålerudstyr som beskrevet i eksperimentet om afstandskvadratloven ovenfor (nu evt. med flere enslydende højttalere), eller prøve at tage i felten og lave målinger på en rigtig vindmølle eller vindmøllearray/ vindmøllepark.

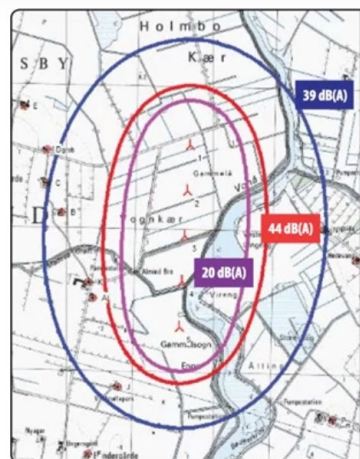
Et praktisk problem ved måling på virkelige vindmøller og parker er afstanden til de enkelte møller. En idé her er at lokalisere, hvor møllerne er præcist på din gps på telefonen samt hvor du selv er, når du foretager målingerne. Bagefter kan du i ro og mag beregne afstande til møllerne og se, hvordan det passer med modellens forudsigelse (som du også kan lave bagefter, når du har målt lydintensiteterne tæt på møllen/møllerne). Det kan også være, du går specifikt efter niveaukurverne. Det kræver en del flere data, og her skal du også notere dine koordinater for hver måling.

Se f.eks. også <https://videnomvind.dk/svar-paa-rede-haand/hvor-meget-maa-vindmoeller-stoeje/>, hvor følgende er hentet fra:

Vedrørende almindelig støj

Vindmøller skal døgnet rundt overholde støjkrav på 42 dB og 44 dB ved henholdsvis 6 og 8 m/s. Støjkravene er fastsat ved disse vindhastigheder, fordi det er her vindmøllerne støjer mest.

I særligt støjfølsomme områder, for eksempel beboelseskvarterer og sommerhusområder, må vindmøller maksimalt støje 37 dB eller 39 dB ved hhv. 6 eller 8 m/s.



Kort med støjgrænser for vindmøllepark

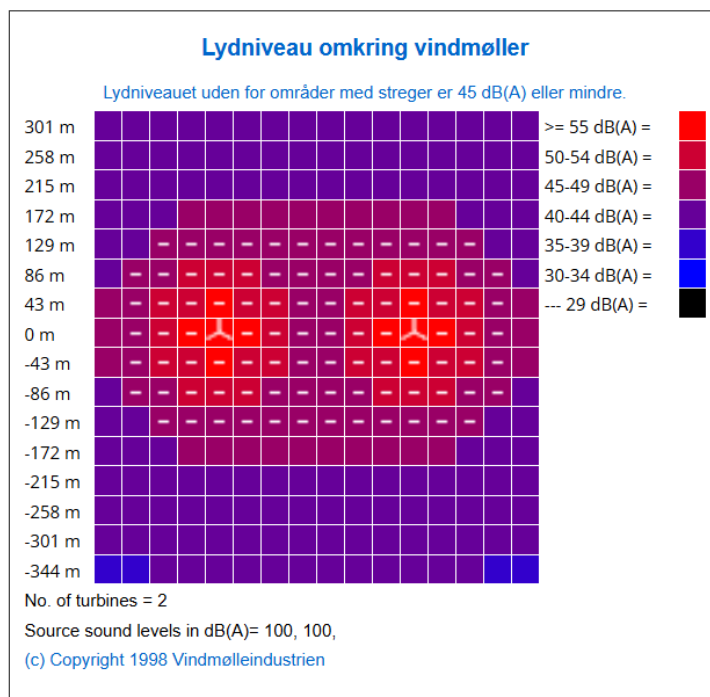
På denne side er der også et lydkortregneark, se adressen ved illustrationen.

Her kan du selv eksperimentere med at sætte flere eller færre vindmøller op og hurtigt få beregnet støjniveauet i nabolaget omkring vindmølleområdet. Følgende er et klip fra deres vejledning:

Klik på gitteret for at indsætte eller fjerne vindmøller. Peg med musen for at aflæse lydniveauet i dB(A) i browserens statuslinje. Kildestøjniveau for den næste vindmølle er sat til dB(A), gitterstørrelsen er sat til m. (Det er praktisk at bruge rotordiameteren som gitterstørrelse, når vindmøllerne skal placeres). Det tilladte maksimum lydniveau ved bebyggelse er sat til dB(A). Dette gitter har knudepunkter i hver retning. Du kan bruge et gitter med op til 20×20 felter, hvis din computer er hurtig nok og har tilstrækkelig hukommelse. Hvis du ændrer et tal, tryk på tabulatortasten, klik på [Beregn](#) eller klik udenfor feltet, som du lige har indtastet tallet i for at begynde beregning og tegning. Klik på [Nulstil](#) for at slette vindmøllerne og gå tilbage til defaultdata.

<https://videnomvind.dk/wiki/lydkortregneark/>

Lydkortregneark

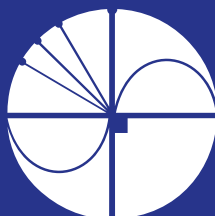


Projektet **Træk virksomhederne ind i undervisningen** fortæller, hvordan matematik er uundværlig for avancerede virksomheder i et moderne samfund. I filmene besøger Casper, Anton og Nicoline 12 forskellige virksomheder og lærer noget om den matematik, de anvender.

Casper, Anton og Nicoline møder ansatte, der er med helt i front af det matematiske arbejde: statistikere, ingeniører, matematik-økonomer, epidemiologer m.fl. Alle har uddannelser med et betydelig matematisk indhold.

Til hver film kan du downloade undervisningsmaterialer. Her finder du øvelser, opgaveforløb, projekter og oplæg til studieretningsprojekter. Materialerne er opdelt i tre niveauer af sværhedsgrad fra 9 kl til 3 g. Emnerne er inspireret af filmen om virksomheden og den anvendte matematik, men man kan arbejde med materialet uden at have filmen kørende.

Hæftet om Matematikken bag vindenergi hos Vestas knytter sig til filmen af samme navn.



**matematik
i arbejde**