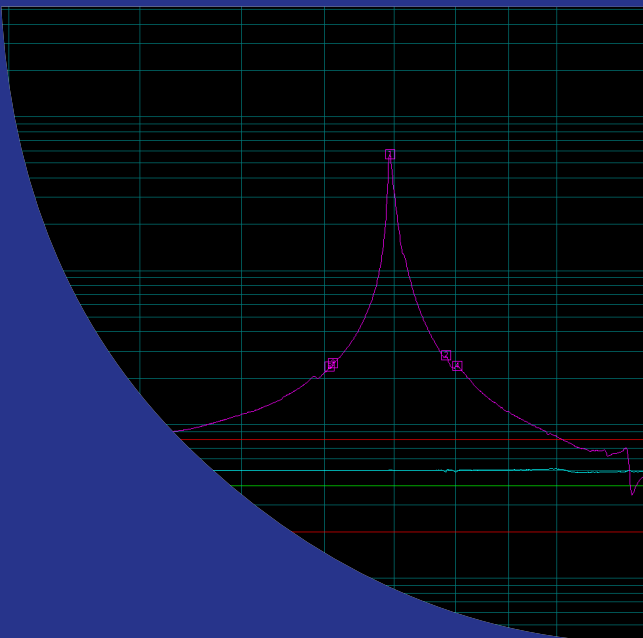
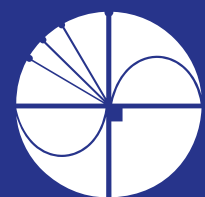


Matematikken bag rumforskning og -industri hos Terma



UNDERVISNINGS OG PROJEKTMATERIALER TIL FILMEN
BJØRN GRØN (RED.), OLAV LYNDRUP, PER ROSENQUIST
OG MADS PETER STEENSTRUP



matematik
i arbejde

Matematikken bag rumforskning og rumindustri hos Terma

**Undervisnings og Projektmaterialer
til filmen**

Bjørn Grøn (red.), Olav Lyndrup,
Per Rosenqvist og Mads Peter Steenstrup

© 2020 Konceptet: *Træk virksomhederne ind i undervisningen* tilhører forfatterne til lærebogssystemet *Hvad er matematik?* Bjørn Grøn, Bodil Bruun og Olav Lyndrup.

© 2022 undervisningsmaterialer til filmen *Matematikken bag rumforskning og rumindustri hos Terma* er produceret af HEM – Produktion og Formidling.

Grafisk koncept: Ulla Korgaard, Designeriet.

Filmene og de tilhørende projektmaterialer hostes af Lindhardt og Ringhof / Praxis på websitet:

[Træk virksomhederne ind i undervisningen \(praxis.dk\)](https://praxis.dk)

Filmene og de tilhørende projektmaterialer kan frit downloades og anvendes til selvstudium og i undervisningen. Hverken film eller projektmaterialer må gøres til genstand for kommerciel udnyttelse. Henvendelser om materialerne kan rettes til Bjørn Grøn: bjgro1@gmail.com.

Undervisningsmaterialer til filmen *Matematikken bag rumforskning og rumindustri hos Terma*

Forfattere: Bjørn Grøn (red.), Olav Lyndrup, Per Rosenquist, Mads Peter Steenstrup

Vi har forsøgt at finde eventuelle rettighedsindehavere, som kan tilkomme honorar i henhold til loven om ophavsret. Skulle der mod forventning være rettighedsindehavere, som måtte have krav på vederlag, vil dette blive håndteret, som om der var indgået en aftale.

Projektet *Træk virksomhederne ind i undervisningen* er forankret på Rysensteen Gymnasium.

Film og tilhørende materialer er produceret med støtte fra Novo Nordisk Fonden

Indholdsfortegnelse




0. Indledning	7
1. Skalering, trigonometri og afstande i solsystemet.....	8
1.1 Skalering og målestoksforhold	9
1.2 Introduktion til beregninger af sider og vinkler.....	11
1.2.1 Ensvinklede og ligedannede trekanter	11
1.2.2 Cosinus, sinus og tangens	11
1.3 Projekt: Trigonometriens oprindelse	16
1.4 Afstande i verdensrummet.....	19
1.4.1 Beregning af Jordens omkreds	19
1.4.2 Måneformørkelser og afstanden til Månen.....	20
1.4.3 Afstanden til Solen	21
1.4.4 Afstanden til stjernerne	21
1.5. Miniprojekt: Træk solsystemet ned på Jorden	23
2. Verdensbilleder.....	25
2.1 Geocentrisk contra heliocentrisk	26
2.1.1 Tycho Brahes verdensbillede.....	29
2.1.2 Miniprojekt: Model af Solsystemet	29
2.1.3 Eksperiment: Parallaxe-metoden	30
2.1.4 Klassediskussion: For og imod verdensbillederne	30
2.2 Med Kepler på vej mod det moderne verdensbillede.....	31
3. Hvordan finder man vej – Navigation klassisk	34
3.1 Et koordinatsystem på jordkloden	35
3.1.1 Projekt: Sfærisk geometri, trigonometri og korttegning	36
3.1.2 Case: Fastlæggelse af meteren som længeenhed.....	36
3.2 Sekstanter, astrolabier og breddegrader	37
3.3 Case: Kampen om længdegraden.....	39
3.4 Projekt: Opdagelsesrejserne.....	39
4. Moderne navigation med GPS	40
5. Matematisk modellering af bølgefænomener	49
5.1 Bølger på en snor.....	50
5.2 Harmoniske bølger	51
5.3 Interferens	52
5.4 Stående bølger	53
5.5 Eksperiment: Refleksion og resonans	54

6. Modellering af svingninger med sinusfunktioner – 1	56
6.1 Termas systemaskine	57
6.2 Opstilling af en matematisk model	57
6.2.1 Friktion	59
6.2.2 Tvungen svingning	60
6.2.3 Projekt: Den fuldstændige løsning til den inhomogene lineære 2. ordens differentialligning	60
6.3 Projekt: Databehandling med inddragelse af regression	61
7. Modellering af svingninger med sinusfunktioner – 2	64
7.1 Case: Callistos omløbstid bestemt ved sinus regression	65
7.2 Projekt: Jordskælv er sinussvingninger	66
7.3 Case: Tidevandets musik	66
8. Termiske modeller – 1	67
8.1 Indledende varmeberegninger for ASIM	68
8.2 Temperaturfordelingen i en metalplade – finite element-metoden	69
9. Termiske modeller – 2: Varmeledningsligningen	74
9.1 Udledning af varmeledningsligningen	76
9.2 Projekt: Løsning af varmeledningsligningen	77
9.2.1 Løsning af rumligningen	79
9.2.2 Løsning af tidsligningen	80
9.2.3 Den samlede løsning	80
9.2.4 Den søgte løsning - ved hjælp af Fourieranalyse	80
10. Raketligningen	83
10.1 Raketligningen uden hensyn til tyngdekraft	84
10.2 Raketligningen under hensyn til tyngdekraft	87
10.3 Raketligningen under hensyn til tyngdekraft og luftmodstand	89
10.4 Raketten og den generelle massetilrækningslov	90
10.5 Projekt: Simulering af raketopsendelse i et tyngdefelt	90
11. Gammadetektoren – geometrien	93
12. Registrering og matematisk modellering af lyn	99
12.1 Data	100
12.2 Matematisk model for styrken af et tilfældigt lyn	101
12.3 Matematisk model af strømstyrke af et lyn	103
Litteratur	105

0. Indledning

I projektet *Træk virksomhederne ind i undervisningen* vil der blive produceret 12 film med tilhørende undervisningsmaterialer til hver film. Det foreliggende er skrevet i tilknytning til filmen *Matematikken bag rumforskning og rumindustri hos Terma Space*.

Materialet er opdelt i en række kapitler, der kan gennemgås hver for sig. Det enkelte kapitel bygger således ikke på de foregående. Med symboler er det markeret, at dette kapitel eller afsnit kan man arbejde med, når man er på pågældende niveau. Man kan naturligvis også have glæde af at se et stof på nye måder, selv om man selv nu befinder på et lidt højere niveau. Og man kan prøve at udfordre sig selv ved at gå i krig med et emne og øvelser, der er markeret til et højere niveau end ens eget. Niveauerne er markeret med symbolerne:

 9. klasse og 1.g	 Slut 1.g og 2.g	 3.g
---	--	--

En stor del af emnerne er med i de pågældende niveauers læreplaner / curriculum. Men de behandles givetvis her med en anden vinkel – og det kan være en fordel i læringsprocessen at se emner belyst og anvendt på forskellige måder.

Gå selv på opdagelse:

- Der er oplæg til forløb om moderne navigation med GPS og om klassisk navigation.
- Et af de centrale emner er svingninger, og du vil finde forslag til forløb og projekter både på et matematisk indledende niveau og forløb med inddragelse af differentialligninger.
- Et andet centralt emne er varme, og også her indeholder materialerne forløb uden brug af avanceret matematik – og forløb om varmeledningsligningen.
- Raketligningen er et oplagt emne indenfor dette tema, og et klassisk emne i fysikundervisningen på A-niveau. Her er teorien udførligt behandlet, og samtidig ligger der et oplæg til at løse problemerne numerisk med anvendelse af Python
- De to kapitler om lyn kan give stof til gode SRP'er
- Du vil finde mange forslag til projekter, til eksperimenterende forløb og til SRP'er

Du vil finde forslag til forløb om *skalering og trigonometri*, som kan anvendes, hvis pågældende emner er taget ud af den lærebog du bruger. En række andre emner om fx *ligningsløsning med determinantmetoden* eller *lineære differentialligninger* indgår måske kun sporadisk i lærebogen. Sådanne materialer kan findes, hvor der er markeret: **link til 7** (og andre tal). Klik på linket, eller gå ind på website for Terma-filmen, find nummeret og klik.

Forkortelsen HEM står for lærebogssystemet: *Hvad er matematik?* Der kan frit hentes projekter og andet materiale fra HEM's website: [Hvad er matematik - LRU.dk \(praxis.dk\)](http://praxis.dk).

Film og materialer er til fri download og anvendelse i undervisning og selvstudier. Bliver undervisningsmaterialet downloadet og dele af det kopieret, skal der angives kilde.

Vi vil meget gerne have feedback med kommentarer og forslag der kan forbedre de kommende samlinger af undervisningsmaterialer.

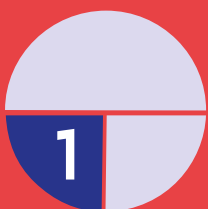
Film og undervisningsmaterialer produceres med støtte fra Novo Nordisk Fonden

1.

Skalering, trigonometri og afstande i solsystemet



I filmen forklarer Dan Bhanderi, hvordan man navigerer og finder sin egen præcise position i rummet ved hjælp af særlige stjerne kameraer. Og nøjagtigheden visualiseres her ved hjælp af en mønt, der skal kunne skelnes i en afstand på 1 km. Trigonometriske metoder er essentielle for disse beregninger. I kapitel 1 dykker vi ned i denne indledende geometri og trigonometri.



1. Skalering, trigonometri og afstande i solsystemet

1.1 Skalering og målestoksforhold

Cheopsypyramiden, der er den største af alle pyramider, blev bygget omkring 2600 f.v.t. Den er bygget af ca. 2,3 millioner stenblokke, der hver vejer omkring 2500 kg. Nogle af blokkene vejer helt op mod 15 tons. Den er bygget med en forbløffende nøjagtighed. Grundfladen er et perfekt kvadrat, sidelængderne er 230,3 meter med en variation på kun 0,01%. Og hældningen af sidefladerne er fuldstændig ens.

Et sådant byggeri kan ikke være lavet uden ingeniører, arkitekter og matematikere til at tegne og beregne samt lede hele byggeprocessen, herunder udregne behovet for arbejdskraft osv. Man vurderer fx, at der har været ca. 20.000 arbejdere beskæftiget gennem 20 år. Men vi har ikke nogen overleveringer, der fortæller om deres ingeniørkunst.

Der findes i det hele taget kun få kilder til den ægyptiske matematik, fordi de skrev på papyrus, der er en art papir lavet på basis af siv. Men en af de få, der er bevaret, er heldigvis en slags matematikbog med en masse opgaver. Der er bla. opgaver i brøkregning, opgaver med beregninger af hældningen på pyramideflader, og mange opgaver om at beregne arealer og rumfang

Så der foregik en matematikundervisning, og kendskab til matematik var givetvis uomgængelig for de embedsmænd, der hed skrivere, og som hørte til den ledende gruppe i samfundet.



Da Cheopsypyramiden blev bygget, var den 147 m høj, og den var i ca. 4000 år verdens højeste bygning. Den havde dengang en glat overflade lavet med hvide kalksten, men et voldsomt jordskælv i år 1300 løsnede disse kalksten og noget af det øverste af pyramiden, så den kom til at se ud, som vi nu ser den.

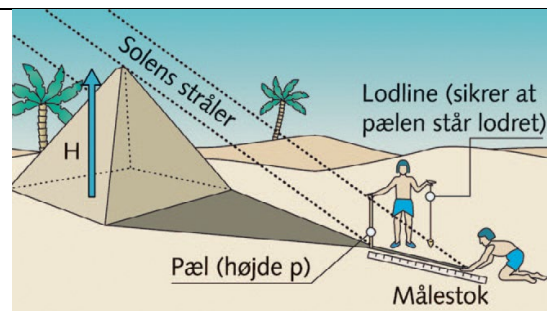
Faraoerne, de ægyptiske herskere fik deres hovedindtægt gennem beskatning af bønderne, og størrelsen heraf blev bestemt af markernes areal. Derfor var det nødvendigt med en nøje opmåling og registrering af markerne. Markerne, der for en stor del var anlagt langs Nilen, fik tilført næringsrig gødning fra floden, når denne nogle gange om året gik over sine bredder. Men oversvømmelserne kunne også udviske skellene mellem markerne og derfor var det ofte nødvendigt med en ny opmåling.

Den græske historiker Herodot (484-425 f.v.t.), der levede mere end 2000 år efter, Cheopsypyramiden blev bygget, foretog mange rejser i middelhavsområdet, og han samlede sine indtryk i et værk, der simpelthen hed *Historien*. Han kom også til Ægypten og fortæller: "Hvis floden tog noget fra en mands jordlod, henvendte han sig til kongen og meddelte, hvad der var sket. Denne sendte så synsmænd ud, der skulle måle op, hvor meget mindre stykket var blevet, for at besidderen i fremtiden kunne svare afgift i forhold dertil. Jeg mener, dette var anledningen til, at landmålerkunsten blev opfundet, som siden er kommet til Hellas."

På Herodots tid er vi langt forbi Ægyptens storhedstid, og den gamle viden om matematiske beregninger er væk. Herodot fortæller, at en af de første store græske matematikere Thales (ca. 625 – 547 f.v.t.) havde besøgt Ægypten for at se pyramiderne og dér havde imponeret dem ved at kunne beregne højden af den største pyramide. Han gjorde det ved at måle dens skygge, netop på det tidspunkt, hvor hans egen skygge var lige så lang som hans højde.

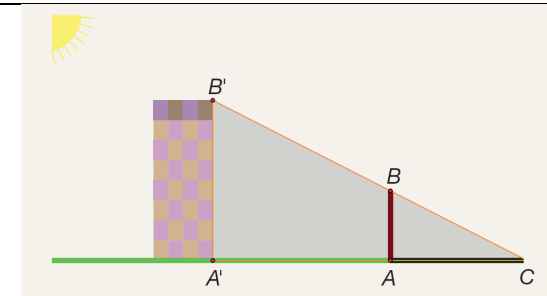
Øvelse 1.1

Forklar ved at tegne en skitse af situationen, hvordan Thales kan have udført denne måling. Du kan lade dig inspirere af figuren. Tegn en model og angiv de stykker, du ønsker at måle eller beregne. Læg mærke til den særlige oplysning, Herodot giver – hvorfor gør det opgaven lettere?



Øvelse 1.2

- Forklar ud fra denne tegning, hvordan vi kan beregne højden af tårnet, dvs. beregne $|A'B'|$. Sæt selv tal på dét, som vi kan måle.
- Beskriv hvorledes man kan beregne højden af skolen eller af en anden bygning med denne teknik. Lav en tegning af situationen



Den teknik, Thales anvendte i beregningen af pyramidernes højde, er en hel fundamental matematisk teknik, som også de gamle ægyptere må have kendt, nemlig *skalering*: Noget uoverskueligt stort som en pyramide *skaleres ned* til noget, vi kan overskue. Denne proces, hvor vi formindsker pyramiden, ændrer ikke pyramidens form: Den skaleres ned til en pyramide, der ligner den oprindelige, men blot er i vores størrelsesforhold.

Formindsker vi en figur 100 gange, dvs. alle sider og højder bliver 100 gange mindre, så siger vi, at målestoksforholdet er 1:100 (læses: 'en til hundrede'). Vi kan måske endda skalere ned til en figur, vi kan have på vores papir. Det er lettere at argumentere ud fra den lille figur, vi kan pege, sætte bogstaver og andre symboler på, vi kan måle og foretage beregninger osv. Når vi har løst opgaven på den lille figur, kan vi skalere op igen til den store ved at gange alle sider med målestoksforholdet.

Øvelse 1.3

- Vi kender målestoksforhold fra alle atlas og kort over byer og landområder. Et kort over København og omegn er lavet med målestoksforholdet 1:15.000. En strækning på et af kortene måles til at være ca. 20 cm. Hvor langt er der så i virkeligheden?
- Et kort over Jylland skal rummes på en A4-side. Et A4 arks mål er 29,7 cm x 21 cm. Fra Skagen i nord til grænsen ved Padborg i syd er der 337 kilometer. Fra Fornæs i øst er der 174 kilometer til vestkysten ved Bovbjerg. Hvilket målestoksforhold skal vi vælge?

Øvelse 1.4

Det højeste bjerg på Jorden er Mount Everest med 8.849 m over havet. Det dybeste menneskeskabte hul er det såkaldte "superdybe hul" på Kolahalvøen i Rusland. Det er 12.262 m dybt.

- Hvis Jorden skaleres ned til en vandmelon, hvor dybt ind i melonen går så det superdybe hul, og hvor langt op rækker Mount Everest? Jordens radius er 6371 km. Vandmelonens diameter bestemmer du selv
- Lad os antage, de to ekstremer er blevet afsat på vandmelonens med den nedskalerede højde og dybde? Vil du kunne se dem? Vil du kunne mærke dem med håndfladen?

1.2 Introduktion til beregninger af sider og vinkler

1.2.1 Ensvinklede og ligedannede trekanter

De to trekanter i **øvelse 1.1** er ikke alene retvinklede, men også *ensvinklede*. To ensvinklede trekanter – og de behøver ikke være retvinklede – har som navnet siger vinklerne parvis ens. For ensvinklede trekanter gælder der, at de også er *ligedannede*, dvs de har samme form.

Øvelse 1.5

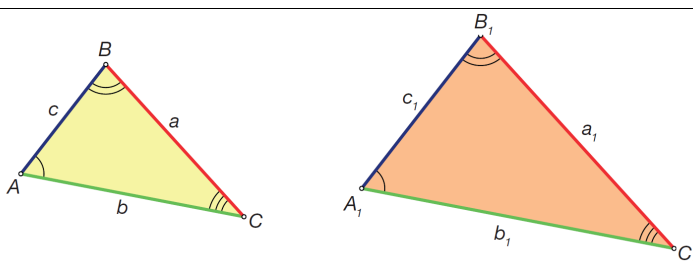
Gælder det samme også for firkanter, at hvis vinklerne er parvis ens, så er de ligedannede?

Hvorfor eller hvorfor ikke?

Det er altså en særlig egenskab ved ensvinklede *trekanter*, at der findes skaleringsfaktor k , som ganget på den ene trekants sider giver os den anden trekants sider:

Hvis to trekanter ABC og $A_1B_1C_1$ er *ensvinklede*, så findes der et tal k , så der gælder: $k \cdot a = a_1$, $k \cdot b = b_1$, $k \cdot c = c_1$.

Kender vi længderne af to ensliggende sider, fx a -siderne, så kan tallet k findes af ligningen: $k \cdot a = a_1$



Øvelse 1.6

Trekanterne ABC og $A_1B_1C_1$ er ensvinklede. Vi får oplyst, at $a = 7$, $b = 5$, $b_1 = 10$, $c_1 = 6$.

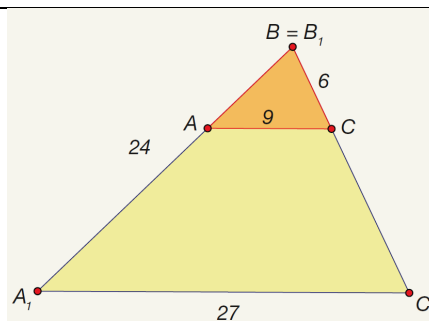
a) Beregn c og a_1 .

Øvelse 1.7

Trekant ABC er ensvinklet med $A_1B_1C_1$. ABC ligger inden i trekant $A_1B_1C_1$, således at B og B_1 falder sammen, og AC er parallel med A_1C_1 .

Vi får oplyst, at $|BC| = 6$, $|A_1C_1| = 27$, $|AC| = 9$ og $|A_1B_1| = 24$

a) Beregn $|AB|$ og $|CC_1|$.



1.2.2 Cosinus, sinus og tangens

Vi vender nu tilbage til retvinklede trekanter. Siden overfor den rette vinkel kaldes for *hypotenusen*, og de andre sider kaldes for *kateterne*.

Vi ser på to *retvinklede* og *ensvinklede* trekanter, $A_1B_1C_1$ og ABC , med sider som angivet på figuren.

I trekant $A_1B_1C_1$ har hypotenusen længden 1, altså: $c_1 = 1$.

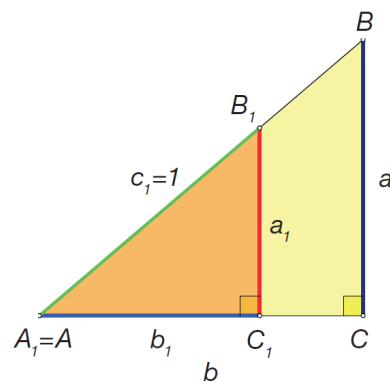
En sådan trekant kaldes for en *standardtrekant*.

Hvis vi nu yderligere kender vinkel A , så ville vi faktisk kunne *konstruere* trekant $A_1B_1C_1$. Men det betyder, at så ville længderne af siderne a_1 og b_1 ligge fast og vi kunne måle os frem til en tilnærmet værdi.

Øvelse 1.8

Gennemfør en sådan konstruktion i Geogebra med $\angle A = 35^\circ$ og mål dig frem til længderne af siderne a_1 og b_1

(Du skal få med to dec: $a_1 = 0,57$ og $b_1 = 0,82$)



I trekant ABC betegnes hypotenusen c . De to trekanter er lignedannede. Argumenter for at skaleringsfaktoren k er lig med c .

Men det betyder jo, at: $a = c \cdot a_1$ og $b = c \cdot b_1$. (Bemærk, at i forhold til afsnittet ovenfor er der byttet om på $A_1B_1C_1$, som her er "den lille" og ABC , som her er "den store")

Øvelse 1.9

I en retvinklet trekant ABC , hvor C er den rette, får vi oplyst at hypotenusen c er 8, og at $\angle A = 35^\circ$. Bestem længderne af de to kateter, a og b .

Vi så ovenfor, at hvis vi har givet størrelsen af vinkel A i en standardtrekant, så er længderne af siderne a_1 og b_1 lagt fast- og vi kan måle os frem til dem. Det kan vi udtrykke ved at sige:

siderne a_1 og b_1 er begge funktioner af vinkel A

Funktioner kan repræsenteres ved tabeller. Det kunne se sådan ud; Her har vi konstrueret standardtrekanten med $\angle A = 26^\circ$ og målt os frem til de to tal.	Vinkel A	a_1	b_1
	...		
	26	0,438	0,899
	...		

Dette kan man naturligvis gøre for enhver vinkel. Det var også sådan det startede, da græske matematikere opstillede tabeller over tilsvarende funktioner. Men allerede de havde smartere metoder til at beregne sig frem, når man kender værdierne af a -tallene og b -tallene for nogle få vinkler.

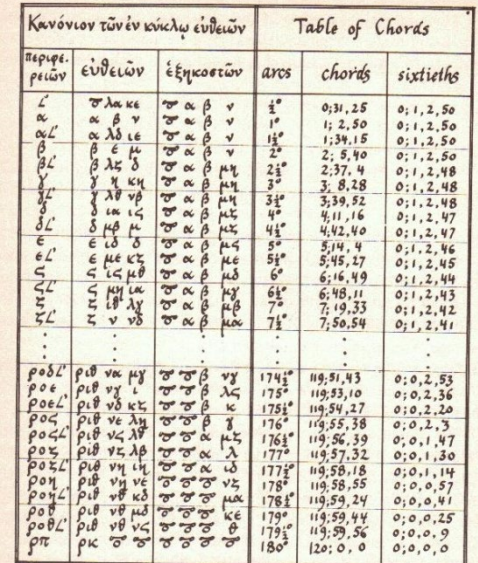
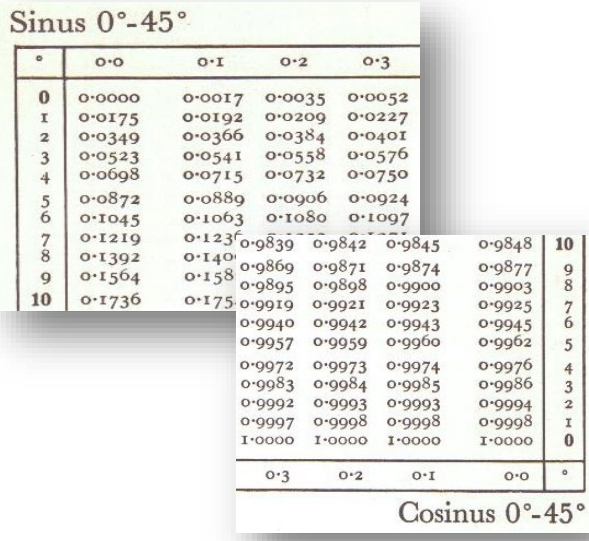
Tabellerne, vi lægger an til at fremstille, er *tabeller over de to trigonometriske funktioner sinus og cosinus*, fx får vi:

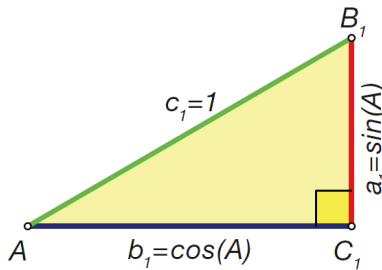
Vinkel A	$a_1 = \sin(A)$	$b_1 = \cos(A)$
1°	0,017	0,9998
5°	0,087	0,996
30°	0,5	0,866
85°	0,996	0,087
89°	0,9998	0,017

Øvelse 1.10

- Kontroller værdierne i tabellen med dit eget værktøj. Hvis der er noget, der ikke stemmer er det måske fordi dit værktøj er indstillet på at regne i *radianer* i stedet for *grader*. I så fald, få hjælp til at ændre indstillingen.
- Det er jo kun et lille udsnit af tabellen over sinus og cosinus. Men alene dette udsnit antyder, der er en sammenhæng mellem sinus og cosinus. Kan du gennemskue det? Kan du formulere dette i en formel eller en lille sætning? Afprøv din opdagelse på andre vinkler.

Når du anvender dit værktøj til at bestemme fx $\sin(10)$ svarer det til at slå op i en tabel. Sådanne tabeller har været fremstillet og anvendt siden oldtiden:

	
<p>Den græske matematiker og astronom Ptolemaios var den første, der udarbejdede sådanne tabeller. Ovenfor ses et udsnit af hans såkaldte kordetabel. Vi vender tilbage til hans metoder i et projekt nedenfor.</p>	<p>I næsten 2000 år efter Ptolemaios har matematikere benyttet sig af sådanne trigonometriske tabeller til beregning af sider og vinkler. Tabellerne er nu lagt ind i de matematiske værktøjsprogrammer.</p>

<p>Definition: Sinus og Cosinus</p> <p><i>Sinus</i> til en vinkel er det samme som længden af den katete (på figuren betegnet B_1C_1), der ligger overfor vinklen i en standardtrekant.</p> <p><i>Cosinus</i> til en vinkel er det samme som længden af den katete (på figuren betegnet AC_1), der ligger <i>hos</i> vinklen i en standardtrekant (dvs. vinklens ene ben).</p>	
---	---

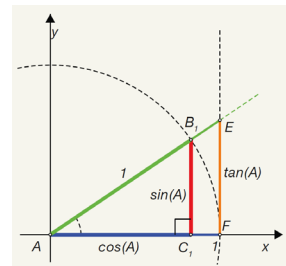
Vi kunne nøjes med disse to trigonometriske funktioner. Alle beregninger kan klares med sinus, cosinus og Pythagoras sætning. Der er dog tradition for at indføre endnu en trigonometrisk funktion:

Definition: Tangens

Tangens til en vinkel er det samme som forholdet mellem kateten overfor vinklen og kateten hos vinklen i en standardtrekant: $\tan(A) = \frac{a_1}{b_1}$.

Øvelse 1.11

- Vis, at $\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)}$.
- Vis, at $\tan(A)$ er lig med stykket FE på tegningen til højre.
- Giv ud fra tegningen og det vi fandt ud af i pkt. 2 en begrundelse for navnet *tangens*.



Tabellerne over sinus og cosinus er altså tabeller over sidelængder i en standardtrekant. Men så kan vi derudfra let finde sidelængderne i en vilkårlige retvinklede trekant ABC . Der gælder nemlig følgende:

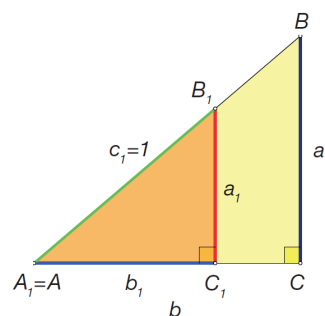
Sætning 1: Beregning af ukendte sider

I en retvinklet trekant ABC gælder der følgende sammenhænge mellem vinkel og sider:

$$a = c \cdot \sin(A), \quad b = c \cdot \cos(A), \quad a = b \cdot \tan(A).$$

Bevis:

Trekant ABC er en opskalering af trekant $A_1B_1C_1$. Forstørrelsesfaktoren er c . Men så følger de to første formler af definitionen på sinus og cosinus.



Vis selv den tredje formel. (Hint: Divider ligning 1 med ligning 2, og anvend øvelsen ovenfor)

Øvelse 1.12

Sætningen udtaler sig om vinkel A . Formuler selv de tilsvarende formler, med vinkel B .

Eksempel på at bestemme ukendte sider ved beregning.

I en retvinklet trekant med $\angle C = 90^\circ$ er $\angle A = 38^\circ$ og hypotenusen $c = 22$.

Bestem de ukendte sider og vinkler:

Da vinkelsummen i en trekant er 180° får vi $\angle B = 180^\circ - \angle C - \angle A = 180^\circ - 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ$.

Vi kan nu benytte formlerne i sætningen til at bestemmer de to kateter:

$$b: \quad b = c \cdot \cos(A) = 22 \cdot \cos(38^\circ) = 17,3$$

$$a: \quad a = c \cdot \sin(A) = 22 \cdot \sin(38^\circ) = 13,5.$$

Øvelse 1.13

I en retvinklet trekant ABC , hvor vinkel C er den rette vinkel, er $\angle B = 77^\circ$, og kateten $a = 13$.

- Bestem de ukendte sider og vinkler ved beregning
- Kontroller resultaterne ved konstruktion og måling.

Ovenfor beregnede vi ukendte sider ud fra oplysninger om trekantens vinkler. Vi kan også regne den anden vej, dvs. beregne vinklerne ud fra oplysninger om trekantens sider. Vi opstiller formler til disse beregninger ud fra **sætning 1** ovenfor:

Sætning 2: Beregning af ukendte vinkler (første version)

I en retvinklet trekant ABC gælder der følgende sammenhænge mellem vinkel og sider:

$$\sin(A) = \frac{a}{c}, \quad \cos(A) = \frac{b}{c}, \quad \tan(A) = \frac{a}{b}.$$

Vi kalder sætningen for "første version", fordi den udtaler sig om vinkel A .

Formuler selv en tilsvarende sætning om vinkel B .

Eksempel på at bestemme ukendte vinkler ved beregning

En retvinklet trekant med $\angle C = 90^\circ$, har siderne $a = 7$ og $c = 15$.

Vi bestemmer de ukendte sider og vinkler.

Vi skal finde en formel, der indeholder de to sider, vi kender. Der er flere, men vi vælger den, som giver os mulighed for at bestemme vinkel A ud fra de to kendte sider:

$$\sin(A) = \frac{a}{c}, \text{ dvs:} \quad \sin(A) = \frac{7}{15}$$

I værktøjsprogrammet kan vi nu anvende *den omvendte sinusfunktion* til at bestemme A . Notationen er lidt forskellig i de forskellige værktøjer.

$$\text{I nogle er det: } A = \sin^{-1}\left(\frac{7}{15}\right), \quad \text{i andre er det: } A = \arcsin\left(\frac{7}{15}\right)$$

Vi får: $A = 27,8^\circ$.

Bestem selv vinkel B og siden b .

Øvelse 1.14

I den retvinklede trekant ABC , hvor vinkel C er ret, gælder der, at $a = 6$, $b = 8$

- Bestem vinkel A og vinkel B ved hjælp af formlerne for tangens
- Bestem siden c ved hjælp af Pythagoras og ved hjælp af trigonometri

Den rette vinkel har vi ovenfor betegnet C , men en opgave kan have valgt andre betegnelser. Er det tilfældet, så start med omhyggeligt at opskrive formlerne *med brug af opgavens betegnelser*.

Øvelse 1.15

I trekant ABC er $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 63^\circ$ og $b = 7$.

- Bestem vinkel C og bestem trekantens øvrige sider ved hjælp af formlerne ovenfor.
- Konstruer trekanten og mål de resterende sider og den sidste vinkel.

1.3 Projekt: Trigonometriens oprindelse

Det følgende er en kort introduktion til projekt 6.4 i HEM1, som du kan hente [her-link til 1](#), og som handler om trigonometriens oprindelse. Det forudsætter kendskab til den moderne trigonometri, da vi projektet igennem sammenligner oldtidens metoder og beregninger med dem, vi ville foretage med brug af sinus.

Trigonometrien, som vi kender den i dag, har sin oprindelse i den græske matematik og astronomi. Selv om Athens storhedstid slutter med Alexander d. Stores erobringer, og Alexanders eget verdensrige bryder sammen med hans tidlige død, så lever den græske kultur videre i mange hundrede år.

Det er en tidsalder, vi i dag kalder for *Hellenismen*, og som satte sit præg på middelhavsområdet, på Mellemøsten og helt over til Indien. Der var universiteter og store biblioteker i mange af de større byer, og størst af alle var Biblioteket og universitetet i Alexandria i det nuværende Ægypten.

Det var her Euklid omkring 300 fvt. havde undervist i geometri og skrevet sine 13 bøger om geometriens grundlæggende *Elementer*. Det var her Apollonius knap 100 år senere underviste om *keglesnit* – ellipser, parabler og hyperbler – og skrev sine 8 bøger om disse emner. Og det var her oldtidens mest betydningsfulde astronom, Claudius Ptolemaios arbejdede omkring 150 e.v.t.

Lang tid før Ptolemaios havde man observeret, at himmelrummet både indeholdt "fiksstjerner", hvis position lå fast, og "vandrestjerner", hvis positioner ændrede sig, som navnet siger. Det er dem vi i dag kalder planeter. Nogle hundrede år før Ptolemaios havde en anden stor astronom Hipparchos samlet data over positionerne for 850 stjerner – hvilket Ptolemaios udbygges med et par hundrede. Og dertil kom flere hundrede års observationer af "vandrestjernerne". Det blev Ptolemaios store bedrift at opstille en matematisk model, der kunne beskrive planeterens vandring over himmelkuglen – en model, der faktisk var den herskende i ca 1200 år.

Hans mesterværk, der oprindeligt havde titlen *Den store traktat om matematik* (egentlig: *om matematikkens sprog*), blev efter en fejloversættelse til arabisk blot betegnet "Almagest", hvilket betyder *Den største* (bog om matematik). Og det har den heddet siden.



Træsnit, som illustration på en side i en udgave af "Almagest" fra 1496.

Almagest er en omfattende afhandling om alle aspekter af matematisk astronomi, og rummer bl.a. en model for planeterens bevægelse. Man kan populært sige, at Ptolemaios leverer en matematisk beskrivelse af Aristoteles verdensbillede. Aristoteles levede 384 – 322 fvt., så der var et stort tidsrum mellem dem. Men når man omtaler "oldtidens verdensbillede" til sammenligning med fx Kopernikus model, så mener man Aristoteles og Ptolemaios verdensbillede. De tilhører godt nok en helt anden kultur end den kristne, der kom til at herske nogle hundrede år efter Ptolemaios, men alligevel tog kirken efterhånden denne model til sig og bidrog dermed til, at det blev den herskende model i så mange år.

Almagest består af 13 bøger, der rummer al den viden, man havde om matematisk astronomi og mere til, som han selv bidrog med. Det drejer sig bl.a. om trigonometri, som han har brug for til sine beregninger af planeternes positioner på himmelkuglen. Trigonometrien præsenteres sidst i bog 1, der slutter med et tabelværk i kapitel 11 og hvor teorien præsenteres i kapitel 10, herunder en præsentation af, hvordan han har beregnet tallene i tabelværket.

De sidste 5 bøger af Almagest handler om planeternes bevægelser, og det er her vi finder hans "løsning" på problemet med de såkaldte *retrograde bevægelser*, dvs. det fænomen, at planeterne somme tider ser ud til at bevæge sig baglæns! Det emne behandles i kapitel 2 om verdensbilleder. I nogle af de første bøger får vi også præsenteret de græske astronomers beregninger af afstandene i solsystemet, som vi ser nærmere på i næste afsnit.

Da Ptolemaios opdagede de sammenhænge mellem sider og vinkler, der blev grundlaget for trigonometrien, begyndte han at udarbejde de første trigonometriske tabeller. Tabellerne blev beregnet i 60 talsystemet. Det var det mest avancerede talsystem i oldtiden, og det klart bedste til at udføre beregninger og regne med brøker.


Er man ikke overbevist, kan man fx sammenligne med romertallene: Prøv at udføre de 4 regningsarter i det system! Nedenfor præsenteres grækernes talsystem, der er helt umuligt at regne i!

Her ses et udsnit af hans såkaldte *korde-tabel* skrevet med græske bogstaver samt en transskribering til vores tal.

Denne tabel er forløberen for senere tiders sinustabeller, der er blevet anvendt lige siden. I dag er det naturligvis lagt ind i matematiske værktøjsprogrammer

Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν			Table of Chords		
περιφ. ρεῖων	εὐθειῶν	ἑξηκοστῶν	arcs	chords	sixtieths
Λ'	σ λα κε	σ α β ν	1/2°	0;31,25	0;1,2,50
α	α β ν	σ α β ν	1°	1;2,50	0;1,2,50
αΛ'	α λδ ιε	σ α β ν	1 1/2°	1;34,15	0;1,2,50
β	β ε μ	σ α β ν	2°	2;5,40	0;1,2,50
βΛ'	β λς δ	σ α β ν	2 1/2°	2;37,4	0;1,2,48
γ	γ η κη	σ α β ν	3°	3;8,28	0;1,2,48
γΛ'	γ λθ νβ	σ α β ν	3 1/2°	3;39,52	0;1,2,48
δ	δ ια ις	σ α β ν	4°	4;11,16	0;1,2,47
δΛ'	δ μβ μ	σ α β ν	4 1/2°	4;42,40	0;1,2,47
ε	ε ιδ δ	σ α β ν	5°	5;14,4	0;1,2,46
εΛ'	ε με κς	σ α β ν	5 1/2°	5;45,27	0;1,2,45
ς	ς ις μθ	σ α β ν	6°	6;16,49	0;1,2,44
ςΛ'	ς κη ια	σ α β ν	6 1/2°	6;48,11	0;1,2,43
ζ	ζ ιθ λγ	σ α β ν	7°	7;19,33	0;1,2,42
ζΛ'	ζ ν νδ	σ α β ν	7 1/2°	7;50,54	0;1,2,41
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ρδδΛ'	ρ ιθ να μγ	σ α β ν	174 1/2°	119;51,43	0;0,2,53
ρδε	ρ ιθ νχ ι	σ α β ν	175°	119;53,10	0;0,2,36
ρδεΛ'	ρ ιθ νδ κς	σ α β ν	175 1/2°	119;54,27	0;0,2,20
ρδς	ρ ιθ νε λη	σ α β ν	176°	119;55,38	0;0,2,3
ρδςΛ'	ρ ιθ νς λθ	σ α β ν	176 1/2°	119;56,39	0;0,1,47
ρδζ	ρ ιθ νς λβ	σ α β ν	177°	119;57,32	0;0,1,30
ρδζΛ'	ρ ιθ νη ιη	σ α β ν	177 1/2°	119;58,18	0;0,1,14
ρδη	ρ ιθ νη νε	σ α β ν	178°	119;58,55	0;0,0,57
ρδηΛ'	ρ ιθ νθ κδ	σ α β ν	178 1/2°	119;59,24	0;0,0,41
ρδθ	ρ ιθ νθ κς	σ α β ν	179°	119;59,44	0;0,0,25
ρδθΛ'	ρ ιθ νθ νς	σ α β ν	179 1/2°	119;59,56	0;0,0,9
ρπ	ρ κ σ	σ α β ν	180°	120;0,0	0;0,0,0

Øvelse 1.16

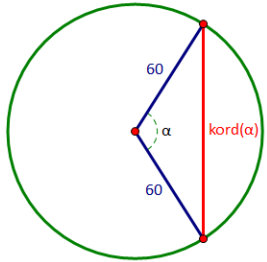
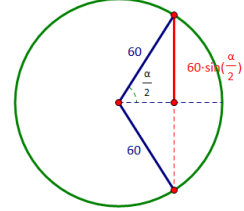
Tabellen kan oversættes til vores tal ved hjælp af denne oversigt over de enkelte bogstavers tal-betydning samt tegnet , som betyder 1/2°. Tegnet fungerer også som en form for vinkelmarkering, hvor vi i dag skriver ∠.

- a) Tjek ved hjælp af tabellen transskriberingen ovenfor fx ved 3° og 177°

A	α	1	I	ι	10	P	ρ	100	α	1000
B	β	2	K	κ	20	Σ	σ	200	β	2000
Γ	γ	3	Λ	λ	30	T	τ	300	γ	3000
Δ	δ	4	M	μ	40	Υ	υ	400	δ	4000
E	ε	5	N	ν	50	Φ	φ	500	ε	5000
F	ς	6	Ξ	ξ	60	X	χ	600	ς	6000
Z	ζ	7	O	ο	70	Ψ	ψ	700	ζ	7000
H	η	8	Π	π	80	Ω	ω	800	η	8000
Θ	θ	9	Q	ϙ	90	Ϙ	ϙ	900	θ	9000

σ, σ εν: 0

Ptolemaios tabel indeholder ikke sinus og cosinus, men i stedet en funktion, som kaldes en *kordefunktion*, som vi vil betegne $kord(a)$. Den defineres som:

 <p>$kord(a)$ er længden af korden svarende til en bue på a grader i en cirkel, hvis radius er 60</p>	<p>Sammenhængen mellem kordefunktionen og sinusfunktionen:</p> $\frac{1}{2} \cdot kord(a) = 60 \cdot \sin\left(\frac{a}{2}\right)$ $kord(a) = 120 \cdot \sin\left(\frac{a}{2}\right)$	
--	--	---

Tabellen angiver længden af korder, som spænder over vinkler fra $\frac{1}{2}^\circ$ til 180° i skridt på $\frac{1}{2}^\circ$, og kordelængderne er som nævnt angivet i de babylonske 60-talsystem, Dvs. når Ptolemaios i tabellen angiver, at

$$kord(4\frac{1}{2}^\circ) = 4;42,40$$

så betyder det i vores 10-tals-system, at

$$kord(4\frac{1}{2}^\circ) = 4 \cdot 60^0 + 42 \cdot 60^{-1} + 40 \cdot 60^{-2} \quad (\text{Bemærk: } 60^0 \text{ er 'tres opløftet i nul'te'})$$

$$kord(4\frac{1}{2}^\circ) = 4 + 0,7 + 0,011$$

$$kord(4\frac{1}{2}^\circ) = 4,711$$

Øvelse 1.17

- Forklar beregningerne ovenfor
- Sammenlign med vores sinustabel, ved at udregne $120 \cdot \sin(\frac{1}{2} \cdot 4.25)$
- Udregn ud fra kordetabellen selv kordelængden for buerne svarende til $a = 6^\circ$ og for $a = 7,5^\circ$ og sammenlign igen med vores sinustabel.

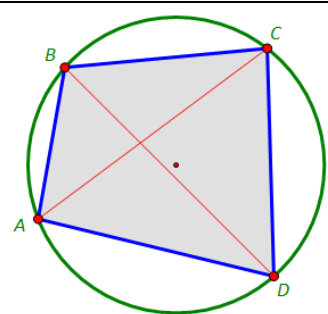
.....

Men hvordan er Ptolemaios nået frem til de tal, der står i tabellen. Nogle kunne måske tro, de havde tegnet store trekanter og cirkler og målt sig frem. Men matematikken var på et lidt højere niveau.

Ptolemaios ræsonnerede sig frem til en række af værdierne ud fra kendskab til trekanternes geometri. Og da han havde værdierne for en hel del tal i tabellen, så kunne han beregne sig frem til mange flere ved hjælp af en særlig sætning, han selv viste, og som vi i dag kalder **Ptolemaios sætning**:

Hvis $ABCD$ er en firkant indskrevet i en cirkel, så er produktet af diagonalerne lig med summen af produkterne af hvert par af modstående sider, dvs.

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$



Beviset for denne sætning, anvendelsen af den i konstruktion af tabellen og anvendelsen af kordefunktionen til at gennemføre trekantsberegninger i vilkårlige trekanter er alt sammen behandlet i det omtalte projekt 6.4 i HEM1, som du kan hente [her-link til 1](#).

1.4 Afstande i verdensrummet

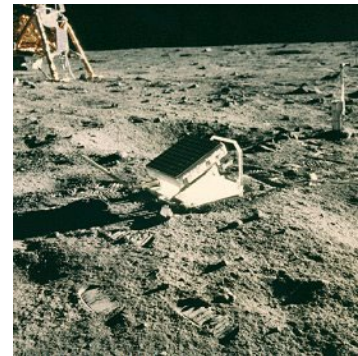
(Dette afsnit er hentet fra bogen 'Fagligt samarbejde matematik-fysik, C-niveau', skrevet til lærebogssystemet HEM af Dorthe Agerskov og Michael Olesen. Det kan hentes fra HEM's website)

Geometri og specielt trigonometri er siden antikken blevet anvendt til at bestemme afstande henover svært tilgængeligt (evt. fjendtligt) terræn. For eksempel er det vigtigt ved bygning af stormstiger o. lign. at kende højden af den fjendtlige forsvarsmur. Traditionel opmåling med længdestokke vil være en ren selvmordsmission, så opmåling af en kendt distance i sikker afstand fra muren kombineret med måling af passende vinkler er vejen frem. Tilsvarende problemer møder man ved bestemmelse af bredden af en flod eller en sø.

Ser man på afstande udenfor Jorden, er anvendelse af geometri ofte vejen til at bestemme afstandene i Solsystemet, i Mælkevejen eller til andre galakser. En af de få undtagelser til reglen er brugen af radar/lasere til bestemmelse af afstande til Månen og de indre planeter.

Øvelse 1.18

Laserlys sendes mod Månen, reflekteres af et spejl anbragt under en af Apollo-missionerne og modtages igen på Jorden 2,564 s senere. Lysets fart er $2,998 \cdot 10^8$ m/s. Beregn afstanden til Månen.

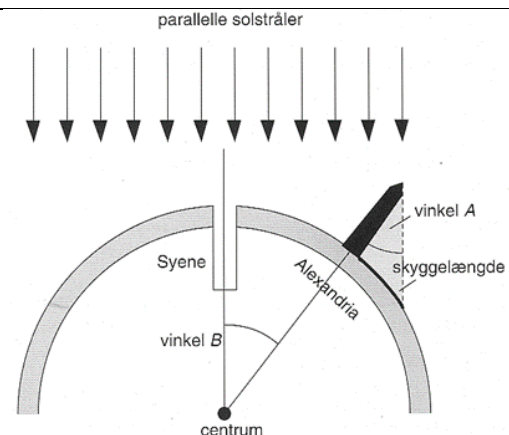


Panel med spejle efterladt af Apollo 11. Spejlene reflekterer laserlys fra Jorden.

1.4.1 Beregning af Jordens omkreds

Erathostenes var den første, der beregnede omkredsen af Jorden. Han kom fra Kyrene, der var en græsk by på Afrikas nordkyst (i det nuværende Libyen) og levede ca. 276 - 195 fvt.

Hans måling byggede på, at han havde observeret, at Solen ved sommarsolhverv ikke kastede nogen skygge i byen Syene (nær det nuværende Aswan i Egypten), mens han kunne måle en vinkel på $\frac{1}{50}$ af en fuld cirkel for en skygge i Alexandria ved Nilens munding. Afstanden mellem de to byer bestemte han til 5000 stadier ud fra rejsetiden mellem de to byer.

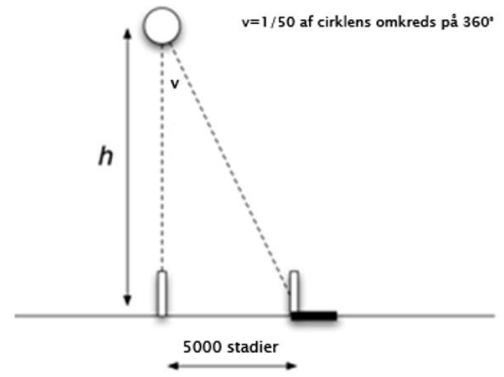


Øvelse 1.19

- Anvend den målte vinkel til at beregne omkredsen af Jorden målt i stadier.
- Den græske stadien var på 185 m, mens den egyptiske var 157,5 m. Der er en del uenighed om, hvilken af disse to enheder, Erathostenes brugte. Beregn jordens omkreds i meter vha. begge omregninger og sammenlign med den moderne værdi.
- Diskuter hvilke fejl hans beregninger kan være behæftede med.

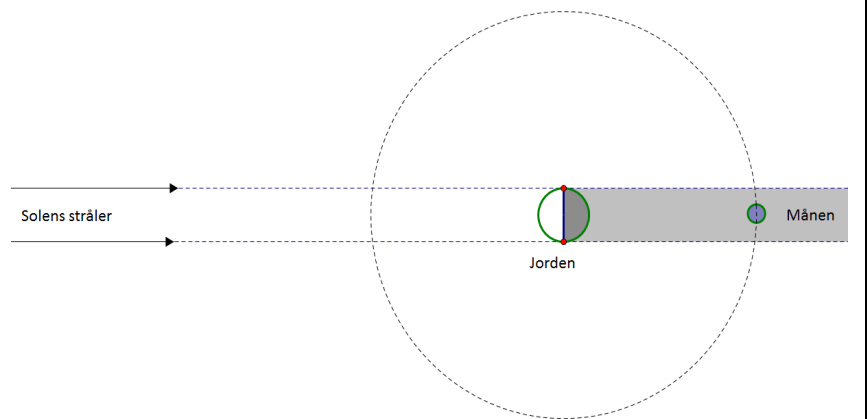
Øvelse 1.20

Man kunne i stedet antage, at Jorden er flad og at vinklen skyldes Solens placering over den flade jord. Hvor stor skulle afstanden til Solen være i denne model?



1.4.2 Måneformørkelser og afstanden til Månen

Aristarchos og Hipparchos, der levede i det 3. og det 2. århundrede fvt., var nogle af de største astronomer i det gamle Grækenland med originale ideer om solsystemets indretning. De var overbeviste om, at Jorden er rund og at der er naturlige forklaringer på sol- og måneformørkelser. Under måneformørkelser kunne Aristarchos iagttage, at Månen kan være formørket i op til 3 timer.



Hvis Solen er et punkt uendeligt langt væk, er Jordens skygge 2 jordradier bred i Månens afstand. Solen er hverken et punkt eller uendelig langt væk, så skyggen er lidt smallere, men lad os regne med de 2 jordradier.

Forholdet mellem de 3 timer og Månens omløbstid, vil så være lig med forholdet mellem 2 gange Jordens radius og omkredsen af Månens bane. Sætter vi afstanden til Månen lig med R , er omkredsen $2\pi R$. Der gælder altså:

$$\frac{27 \text{ dage}}{3 \text{ timer}} = \frac{2\pi R}{2R_{\text{Jord}}}$$

På denne baggrund fandt de græske astronomer frem til, at afstanden til Månen var ca. 75 gange Jordens radius.

Øvelse 1.21

- Udfør beregningen.
- Beregn på dette grundlag og med brug af Erathostenes værdi for Jordens omkreds afstanden til Månen og sammenlign resultatet med den moderne værdi for Månens afstand, 384.400 km.

En anden metode er at måle *parallaksen* for Månen. To personer ser ikke Månen i præcis den samme retning, hvis de ikke står samme sted. Samme fænomen ser man, hvis man strækker sin arm, løfter tommelfingeren og ser på den med skiftevis det ene og det andet øje lukket. Den skiftende synsretning får det til at se ud som om fingeren flytter sig f.eks. i forhold til væggen i

baggrunden. Hvis man måler den vinkel, fingeren flytter sig, og kender afstanden mellem øjnene, kan afstanden til fingeren beregnes.

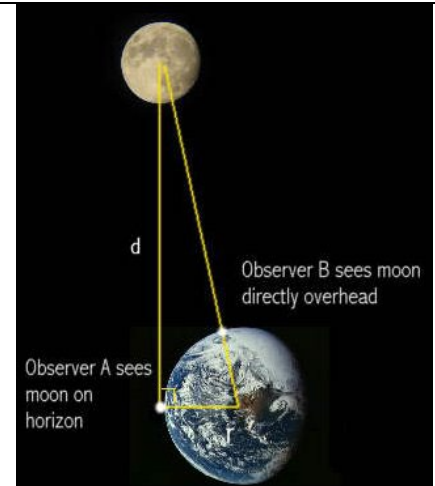
Dette er *parallakseprincippet*: Lad to personer bestemme sigtelinjen til Månen i forhold til baggrundsstjernerne og mål afstanden mellem dem.

Øvelse 1.22

På figuren forestiller vi os – ikke helt realistisk - at to personer er placeret, så den ene står lige under Månen (Månen er i zenit) mens den anden står, så Månens centrum lige akkurat kan ses i horisonten. Vinklen i Jordens centrum kan bestemmes som forskellen mellem personernes breddegrader. Overvej dette!

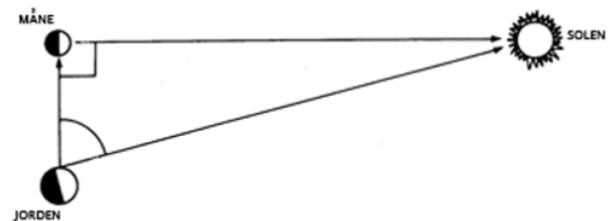
Med moderne udstyr kan vinklen bestemmes til $89,05^\circ$. Jordens radius er bestemt til 6371 km.

- Beregn afstanden til Månen.
- Månens vinkeldiameter (vinklen fra kant til kant) er $0,528^\circ$. Bestem Månens radius i km.



1.4.3 Afstanden til Solen

Aristarchos anvendte en lignende betragtning til at bestemme hvor mange gange længere der er til Solen end til Månen. Ved halvmåne er vinklen mellem Måne-Jord og Måne-Sol præcis 90° , og fra en placering hvor Månen er i Zenith måles vinklen mellem Jord-Måne og Jord-Sol.



Øvelse 1.23

Vinklen blev af Aristarchos vurderet til 87° .

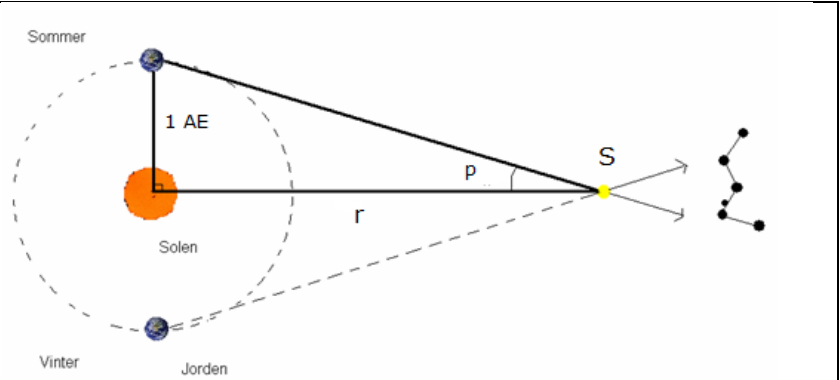
- Beregn afstanden til Solen ifølge Aristarchos. Anvend Eratosthenes værdi for Jordens radius.
- Find den moderne værdi, og beregn hvilken vinkel, han skulle have fået.
- Værdierne for denne vinkel er meget tæt på hinanden. Overvej hvorfor den lille forskel betyder så meget for afstanden til Solen.
- Solens vinkeldiameter er $0,536^\circ$. Beregn Solens radius.
- Hvor mange gange er Solens radius større end Jordens? Hvor mange gange er Solens rumfang større end Jordens?

1.4.4 Afstanden til stjernerne

Ligesom man kan bestemme en parallakse for Månen ved at lade to personer observere den samtidigt, kan man også bestemme en parallakse for stjernerne. *Se figuren*. Bestemmelsen af stjerners parallakse blev meget vigtig i debatten om Jordens eller Solens centrum for Solsystemet, men den diskussion udskyder vi til næste afsnit.

Da stjernerne er meget længere væk end Månen, er Jordens diameter alt for lille som basislinje. I stedet anvendes afstanden til Solen som basislinje. Denne afstand kaldes for en *astronomisk enhed*, 1 AE.

Man måler vinklerne mellem Jord-Sol og Jord-Stjerne med et halvt års mellemrum. Vi får så trekanten, hvor afstanden til Solen er den ene katete, og *parallaksen* er den vinkel som radius i Jordens bane ses under fra stjernen.



Bestemmelse af den årlige parallakse. En stjernes position på himlen observeres med et halvt års mellemrum, og vinklen p bestemmes. Stjernen befinder sig ved S , men fordi vi bevæger os, ser den tilsyneladende ud til at være lidt forskellige steder på Stjernehimlen "bagved".

Øvelse 1.24

Parallaksen for den nærmeste stjerne, Proxima Centauri er bestemt til 0,000214 grader.

a) Bestem afstanden til stjernen i km.

Et lysår er den afstand, lyset kan tilbagelægge på 1 år. Lysets fart er $3,00 \cdot 10^8$ m/s.

b) Bestem længden af 1 lysår, og bestem hvor mange lysår, der er til Proxima Centauri.

ESA (European Space Agency) opsendte i 2013 satellitten GAIA. Målet med missionen er at kortlægge ca. 1 % af alle stjerner i Mælkevejen. Den forventes at være aktiv indtil 2025. Du kan læse mere om den hos ESA og her: [Gaia \(spacecraft\) - Wikipedia](#)

Øvelse 1.25

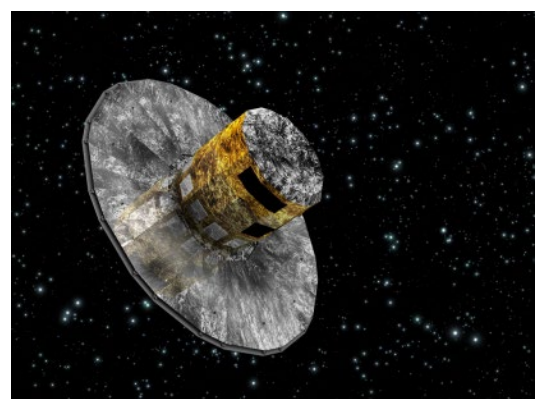
GAIA forventes at kunne måle stjernernes position med en nøjagtighed på $6,7 \cdot 10^{-9}$ grader.

a) Beregn den største afstand til en stjerne, man vil kunne bestemme med GAIA. Sammenlign med Mælkevejens udstrækning.

Den relative usikkerhed i bestemmelsen af en stjernes parallakse, $\frac{\Delta p}{p}$, er bestemt af forholdet mellem apparaturets nøjagtighed Δp (angivet ovenfor) og den målte parallaksevinkel p . Måler man f.eks. en stjernes parallakse til at være dobbelt så stor som satellittens målenøjagtighed, bliver usikkerheden altså 50 %. Den relative usikkerhed i parallaksen er med god tilnærmelse den samme som den relative usikkerhed på afstanden.

b) Hvad er den maximale afstand, hvis man vil kende den med 10% nøjagtighed?

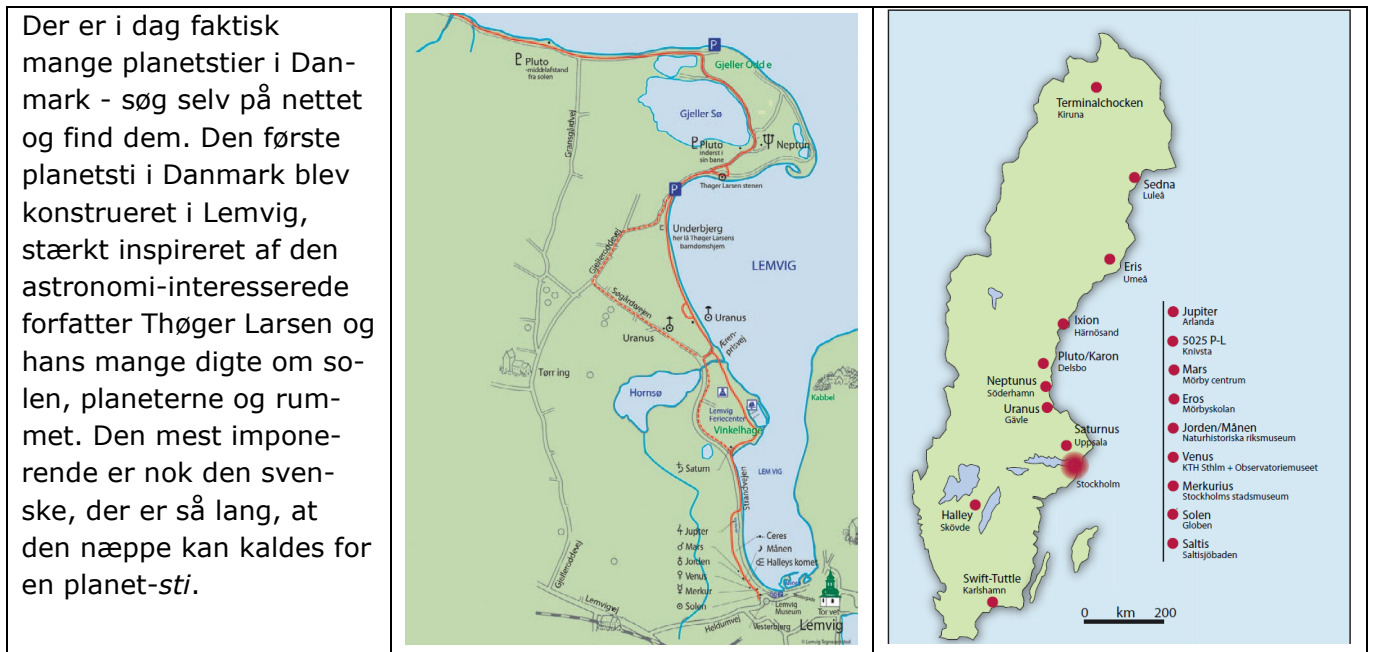
c) Hvor store/små ting vil man kunne se på Månen med denne satellit?



Bemærk at alle afstande i sidste ende kan føres tilbage til bestemmelsen af Jordens radius, og i anden omgang til afstanden til Solen (den astronomiske enhed).

1.5. Miniprojekt: Træk solsystemet ned på Jorden

En planetsti er en nedskaleret version af solsystemet, hvor de relative afstande er korrekte, og hvor de enkelte planeter er markeret på en sti således, at man kan gå fra det inderste, dvs. Solen og underveds passerer alle planterne ud til de yderste planeter – evt. ud til Oort-skyen eller til det område, hvor solsystemets indvirkning på det ydre rum er borte, det område, man kalder *heliopausen*.



Udarbejd et forslag til en planetsti med Solen placeret på **Vesterbro**.

(Hvor der i nedenstående er stedsangivelser som **Vesterbro** erstatter du det med et tilsvarende, hvor du bor, eller hvor du gerne vil konstruere en planetsti)

Projektet er meget velegnet til et samarbejde med faget dansk.

I skal udarbejde et forslag til en planetsti på **Vesterbro**. I bestemmer selv hvor den skal ligge. Det må godt være en ret linje som **Sønder Boulevard**, hvis I synes det er mest instruktivt. Men det behøver det ikke, planeterne ligger jo stort set aldrig på en ret linje. Så kravet er blot, at alle planeter, medregnet Pluto, og Jordens måne er med, og at de relative afstande til det sted, I placerer Solen er korrekt.

I skal både svare med en samlet præsentation af jeres forslag, hvor I begrundet, hvorfor det kunne være interessant, og med et kort, hvorpå I har markeret Solens og planeterne placering i byen. I skal vedlægge jeres talmæssige beregninger af de forskellige placeringer.

I centrum, hvor Solen er placeret, skal der være en kort introduktion til de geocentriske og heliocentriske modeller – gerne med brug af nogle taleksempler. I skal på kortet for nogle af planeterne tegne den cirkel planetbanen (stort set) følger.

Der, hvor I har markeret planeterne, skal der være en lille model eller skulptur, der angiver planetens størrelse ud fra det målestoksforhold, jeres model følger. I skal for de enkelte planeter skrive en kort "præsentation" af denne, herunder hvornår den blev opdaget. Men I vælger selv, hvilke oplysninger, I synes er interessante. Disse beskrivelser vedlægges som bilag til jeres forslag.

I skal udforme jeres besvarelse som et begrundet forslag stilet til en myndighed, fx en borgmester eller skolens rektor eller en tredje person.

I skal starte med at arbejde jer igennem de følgende opgaver. Besvarelsen af disse indgår sammen med jeres forslag til en planetsti som en matematik-aflevering.

1. Hvad er en planetsti? Giv nogle eksempler og forklar hvad ideen er.

	Middelradius (i km)	Middelfstand til Solen (i mio. km)	Omløbstid om Solen (døgn)
Solen	695000		
Merkur	2439	57,9	88
Venus	6051	108,2	225
Jorden	6378	149,6	365
Månen	1738	0,4*	27,3*
Mars	3397	227,9	687
Jupiter	71398	778	4333
Saturn	60000	1429	10753
Uranus	25400	2870	30660
Neptun	24300	4497	60225
Pluto	2900	5900	90520

* Afstand til Jorden, samt omløbstid om Jorden.

2. Udnyt tabellen her til at skalere solsystemet ned til en størrelse, hvor hovedparten af det kan ligge på **Vesterbro**. I kan fx starte med at vælge, hvad afstanden fra Solen til Pluto skal være og så skalere ned ud fra det.

3. Vælg det sted, hvor en model af Solen skal stå, og placer de forskellige planeter på et kort over **Vesterbro og omegn**, hvor I kender målestoksforholdet. Indtegn nogle af planetbanerne, så man kan se, hvilke andre placeringer, I kunne have valgt.

4. Afstanden til Månen: Laserlys, der sendes mod Månen, reflekteres af et spejl, der blev anbragt under en af Apollo-missionerne. Signalet modtages igen på Jorden 2,564 s senere. Lysets fart er $2,998 \cdot 10^8$ m/s. Beregn afstanden til Månen.

5. Hvis planetbanerne er cirkler med den radius, der er angivet i tabellen, hvor mange km bevæger planeterne sig da i løbet af en omdrejning om solen.

6. Beregn den hastighed, hvormed planeterne bevæger sig. Udregn det både i km/h og i km/s.

7. Se på Jordens daglige omdrejning. Beregn med hvilken hastighed en person ved Ækvator bevæger sig (km/t). Hvorfor kan han ikke mærke det?

8. A og B diskuterer, om det virkelig kan passe, at Jorden drejer sig om sin akse. De har udregnet hastigheden i den forrige opgave og finder det svært at acceptere, at en sådan fart ikke skulle kunne mærkes eller måles.

- 1) A påstår nu, at hvis Jorden drejer, og han hopper højt i vejret, må han lande lidt bagved, hvor han stod. Derfor må det kunne afprøves. Hvad mener du?
- 2) B foreslår et andet eksperiment: I stedet for at hoppe kravler hun op i et 100 m højt tårn og lader en kugle falde. Mens kuglen falder, drejer Jorden, så den vil lande bag ved tårnets fod, ifølge B. A tror, han får den i hovedet. Hvad mener du?

9. Vi regner på det geocentriske system, hvor Jorden er centrum i universet og alle planeter og stjerner bevæger sig om Jorden én gang hvert døgn.

- 1) Beregn den hastighed, hvormed Jupiter bevæger sig (i km/sek.),
- 2) Beregn den hastighed, hvormed den nærmeste stjerne bevæger sig (i km/sek.), idet dens afstand til Jorden er ca. 4 lysår, og 1 lysår er $9,46 \cdot 10^{12}$ km.

2. Verdensbilleder



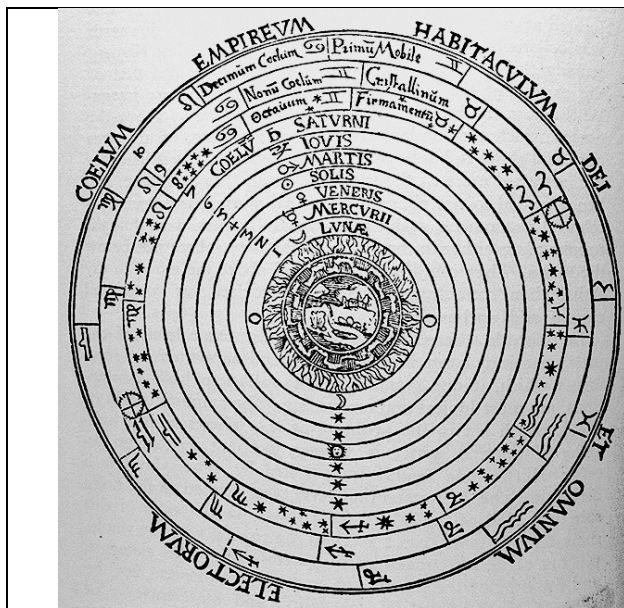
En astronaut på ISS eller på Månen kan se Jorden som en kugle, men kan ikke se solsystemet. Størrelsesforholdene er så enorme, at der ikke findes noget sted, hvorfra vi kan få et billede af det. Det kan kun begribes ved hjælp af en matematisk model. Så det er ikke så underligt, at det tog lang tid, før det moderne verdensbillede trængte oldtidens forestillinger tilbage. Og det skete gennem en fælles bestræbelse gennem ca 100 år, af Kopernikus med det *heliocentriske* system, Tycho Brahe med opdagelsen af *den nye stjerne*, Galilei med opdagelsen af *Jupitersystemet* og af at Venus har faser, som vist på illustrationen, og Kepler med hans beregning af Mars elliptiske bane. Disse videnskabelige gennembrud er temaet for kapitel 2.

2. Verdensbilleder

Kapitel 2 er et uddrag fra et af studieretningskapitlerne i HEM, 'Fagligt samarbejde Matematik-Fysik', C-niveau. Kapitlet, som du kan finde her: [Hvad er matematik - LRU.dk \(praxis.dk\)](http://Hvad%20er%20matematik%20-%20LRU.dk%20(praxis.dk)) er skrevet af Michael Olesen og Dorthe Agerkvist.

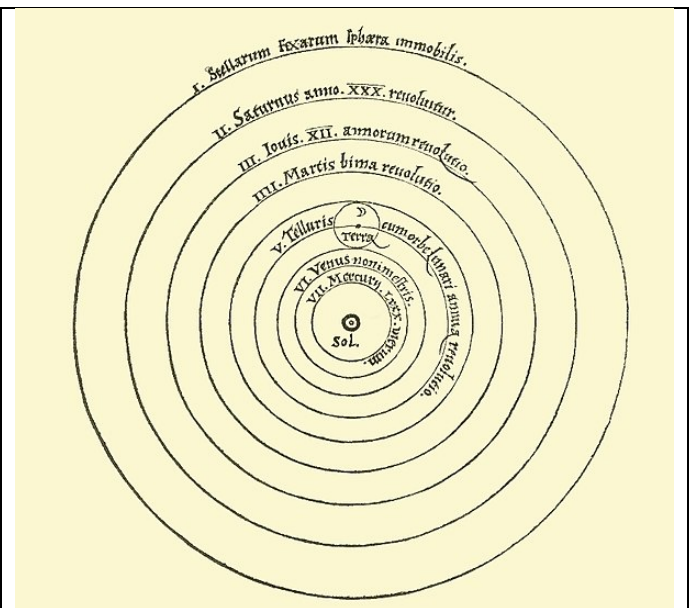
2.1 Geocentrisk contra heliocentrisk

Da Nikolaus Kopernikus (1473 - 1543) udgav sine tanker om, at Solen og ikke Jorden var centrum i Solsystemet, var det ikke første gang, det blev foreslået. Aristarchos fremsatte også ideen, men den vandt aldrig udbredelse i antikken. Argumenterne både for og imod modellen er mange, og vi vil her se på en række af dem. Vi skal huske, verdensbilledet dengang var noget anderledes end nu. De to yderste planeter Uranus og Neptun var endnu ikke blevet opdaget, og en afstand til stjernerne var ikke bestemt. Stjernehimlen var således i både det *geocentriske* (Jorden i centrum) og det *heliocentriske* (Solen i centrum) verdensbillede placeret som en skal rundt om Solsystemet.



Det geocentriske verdensbillede

Dette verdensbillede var fremherskende i Oldtidens og midaldralderens Europa. Fortæl hvad du ser på illustrationen. Få evt. en latinlærer til at hjælpe med at læse teksterne.



Det heliocentriske verdensbillede

Illustrationen viser Kopernikus egen tegning fra hans hovedværk, som udgives i 1543, samme år som han dør. Udgiveren indsatte et forord, hvor han forklarer, at det blot er en model, der letter beregningerne.

Den første sammenlignende fremstilling af de to systemer blev udgivet allerede i 1622. Forfatteren var den danske astronom Christen Sørensen Longomontanus, der var en af Tycho Brahes nærmeste medarbejdere. Værket *Astronomia Danica* fra 1622 indeholder en introduktion til trigonometri, samt et omfattende antal beregninger på de to systemer ud fra de data man havde. Det var kirken, der havde bedt Kopernikus om at foretage justeringer af det gamle verdensbillede. De havde brug for en beregningsteknisk model, der kunne give en mere præcis kalender for datoerne for påskedag – der er fastlagt ud fra astronomiske data. Kopernikus værk blev først sat på listen over forbudte bøger, da flere og flere opfattede modellen som en gengivelse af virkeligheden. Du kan finde en gengivelse af *Astronomia Danica* her: [1223.pdf \(lindahall.org\)](http://1223.pdf(lindahall.org))

Et af de første argumenter, man støder på, i debatten mellem de to systemer er, at hvis Jorden ikke står stille, men derimod kredser om Solen og yderligere roterer om sin egen akse, vil det være med så store hastigheder, at vi alle ville falde af.

Øvelse 2.1

- Beregn den hastighed, et punkt på ækvator bevæger sig med som følge af Jordens rotation.
- Beregn Jordens og Saturns hastigheder rundt om Solen. Du kan finde en oversigt over planeternes afstande og omløbstider i afsnit 1.5.

Men problemerne er på ingen måde løst blot ved at acceptere det geocentriske verdensbillede, hvad følgende opgave viser.

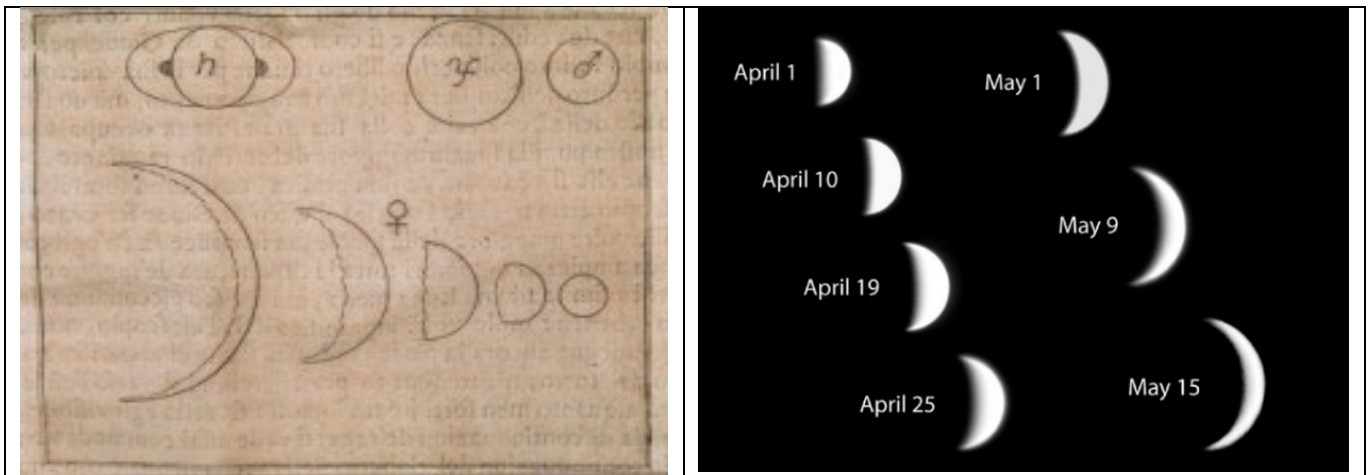
Øvelse 2.2

- Beregn den hastighed, Månen skal have i det geocentriske system, hvis den skal kredse omkring Jorden på et døgn.
- Gentag beregningen for Saturn.

Den italienske videnskabsmand Galileo Galilei (1564 – 1642) argumenterede senere smukt for, at det ikke var et problem, at Jorden bevægede sig. Så længe alt på Jorden fulgte med i bevægelsen, ville den ikke kunne mærkes. Hans analogi var en passager på et skib, der sejlede på stille vand med en jævn hastighed. Lader man en genstand falde på skibet, vil den se ud til at falde lodret ned, da genstanden har samme vandrette hastighed som skibet, og derfor følger med skibet i den retning, skibet sejler.

Det er værd at bemærke, at Galileis argument på ingen måde er et bevis for, at Jorden bevæger sig rundt om Solen. Det fik man først i 1838, hvor astronomen Friedrich Bessel (1784-1846) som den første målte en parallakse for en stjerne. Dette vender vi tilbage til senere.

Galilei var den første til at anvende kikkerten til at observere himlen. Han opdagede bl.a., at Venus havde faser ligesom Månen.



Galileis håndtegning af Venus' faser, sammen med moderne billeder af det samme, optaget i en serie. Bemærk, at der også kan optræde "fuld-Venus", ligesom vi kender fuldmåne. Hvornår vil det indtræffe?

Øvelse 2.3. Venus faser i det geocentriske verdensbillede.

- Marker Jorden på et stykke papir eller i et dynamisk geometriprogram. Tegn Venus bane som en cirkel rundt om Jorden, og Solens bane som endnu en cirkel med lidt større radius.
- Placer Solen i banen lige over Jorden.
- Venus observeres aldrig mere end $46,3^\circ$ fra Solen. I det geocentriske verdensbillede var man derfor nødt til at indføre en kunstig binding mellem Venus og Solen. Med Jorden og Solen i de indtegnede positioner kan Venus altså kun være indenfor en vinkelafstand på $46,3^\circ$ på hver side af retningen til Solen. Indtegn Venus i de to yderpositioner samt i midten som en lille cirkel.
- Marker på Venus cirkelskive hvor sollyset vil falde.
- Hvilke faser vil man kunne se fra Jorden?
- Stemmer det overens med Galileis observationer?

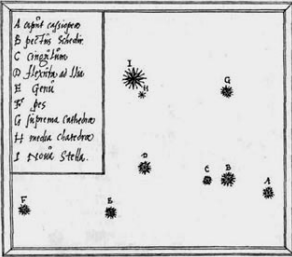
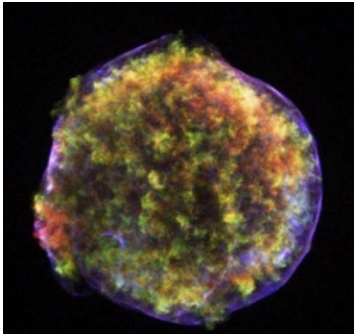
Øvelse 2.4. Venus faser i det heliocentriske verdensbillede.

- Marker Solen på et stykke papir eller i et dynamisk geometriprogram. Tegn Venus bane som en cirkel rundt om Solen, og Jordens bane som endnu en cirkel med en radius, der er 1,383 gange større.
- Placer Jorden i banen lige under Solen.
- I denne model er Venus ikke bundet men kan bevæge sig frit. Vis at vinklen mellem Solen og Venus aldrig vil overstige $46,3^\circ$.
- Indtegn en lille cirkel i Venus bane øverst, nederst, helt til venstre, helt til højre samt i de 4 positioner mellem disse.
- Marker på de 8 cirkelskiver hvor sollyset vil falde.
- Hvilke faser vil man kunne se fra Jorden?
- Stemmer det overens med Galileis observationer?

Som det ses af **øvelse 2.4**, er der en sammenhæng mellem de observerede vinkler og forholdet mellem planetbanernes radier. Det gør det muligt at beregne størrelsesforholdene i Solsystemet, og det var en af de ting, der for Kopernikus gjorde den heliocentriske model tiltrækkende. Ud fra andres observationer af såvel de indre som de ydre planeter, var han i stand til at beregne forholdet mellem radierne i planeterne baner. Han fik således beregnet størrelsesforholdene i Solsystemet, men ikke de absolutte afstande.

Øvelse 2.5

Udover Venus faser opdagede Galilei også Jupiters fire største måner, og han så landskaber på Månen. Diskuter, hvordan disse opdagelser harmonerer med det antikke verdensbillede.

<p>Allerede inden Galilei gjorde sine opdagelser med kikkerten var det antikke verdensbillede i alvorlige problemer. Tycho Brahe (1546-1601) observerede i år 1572 en ny stjerne på himlen. Det, han så, var i virkeligheden en supernova. Dengang kendte man ikke til begrebet supernova, men opdagelsen af en ny stjerne på himlen, på et sted hvor der ikke før havde været en, var stadigvæk epokegørende.</p>	 <p><i>Tycho Brahes egen tegning af "Stella Nova" fra hans skrift, hvis titel oversat fra latin lyder: Danskeren Tycho Brahes matematiske betragtning over den nye og aldrig nogensinde før sete stjerne, nylig for første gang observeret i november anno 1572 e. Kr.</i></p>	 <p>Resterne af stjernen med navnet Stella Nova 1572 er her optaget i 2009, 437 år efter eksplosionen.</p>
--	--	---

Ifølge Aristoteles var himlen over Månens bane uforanderlig, så Tychos observation var i direkte modstrid med antikkens lære, idet det lykkedes ham at bevise, at den måtte være længere væk end Månen.

Der var gennem historien af og til blevet observeret kometer. Eftersom man antog, at alt over Månens bane var evigt og uforanderligt, måtte man placere kometer i Jordens atmosfære. I 1577 observerede Tycho en komet på himlen, og også her fandt han en modstrid. Ikke bare var kometen længere væk end Månen; dens afstand varierede også, så den passerede gennem flere af de krystalsfærer, man mente planeterne sad på.

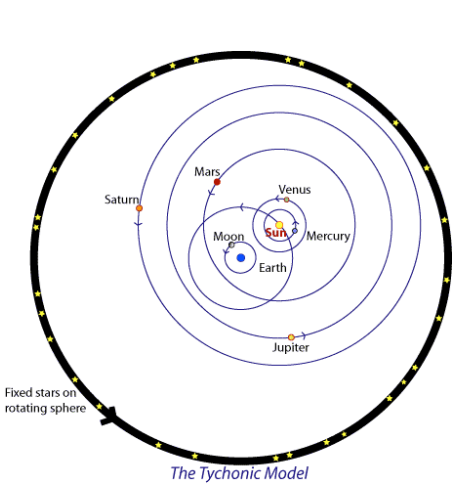
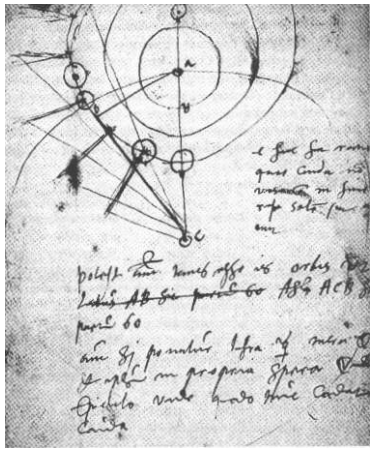
I afsnit 1.4 så vi, at man kunne bestemme afstanden til en stjerne ved at måle stjernens parallakse. Her var det egentlig den *årlige* parallakse vi målte. Der findes også en *daglig* parallakse, hvor man udnytter, at en observatør på Jorden, som følge af Jordens rotation, befinder sig forskellige steder

med f.eks. 6 eller 12 timers mellemrum. Et himmellegemes *daglige parallakse* er den vinkel, som *Jordens radius* ses under set fra det pågældende himmellegeme.

Øvelse 2.6

- Beregn Månens daglige parallakse. Undervejs gør I de antagelser, der er nødvendige.
- Tycho Brahe havde ikke en kikkert til rådighed. Den mindste vinkel, man kan se med det blotte øje, er ca. 0,5 bueminut. (1 grad svarer til 60 bueminutter, og et bueminut svarer til 60 buesekunder). Vurder hvor fjerne objekter, han var i stand til at bestemme afstanden til med denne metode.

2.1.1 Tycho Brahes verdensbillede

<p>Alle disse forskellige observationer bidrog til at underminere det geocentriske verdensbillede, men det var Galileis observation af Venus' forskellige faser, der endeligt falsificerede det. Det betød omvendt ikke, at man havde bevist, at Kopernikus' model var den rigtige. Faktisk opstillede Tycho Brahe en model, hvor Jorden var i centrum, Solen og Månen kredsede om Jorden, og de øvrige planeter kredsede om Solen.</p>	 <p style="text-align: center;"><i>The Tychonic Model</i></p>	 <p style="text-align: center;"><i>Tycho Brahes tegning af kometen, som han observerede i 1577. Bemærk kometens hale ift. Solen.</i></p>
---	--	--

Modellen kan synes unødigt kompliceret, men den er ikke urimelig. Planeterne kredser om Solen, og derved undgår man kunstigt at skulle binde Merkur og Venus til Solen. At Jorden står stille i midten af Tychos verdensbillede skyldtes bl.a. at han ikke var i stand til at observere en årlig parallakse for stjernerne.

Øvelse 2.7

- Beregn afstanden til det fjerneste objekt, man kan måle en årlig parallakse for med det blotte øje. (Øjet kan som sagt se vinkler ned til ca. 0,5 bueminut).
- Hvor mange gange længere ud end Saturns bane kan man se. (På Tycho Brahes tid var Saturn den yderste kendte planet).
- Sammenlign med afstanden til Alfa Centauri.

Så længe man kun har observationer indenfor Solsystemets grænser til rådighed, er det umuligt at skelne mellem Tycho Brahes og Kopernikus modeller, så selv om de fleste antog Kopernikus model, var det først med Friedrich Bessels målinger i 1838 af parallaksen for en stjerne, at det endeligt blev afgjort, hvilken model for Solsystemet, der var den rigtige.

2.1.2 Miniprojekt: Model af Solsystemet

I skal nu prøve at lave en model af Solsystemet, som man i dag mener, det ser ud. Ønsker man en helt tro kopi, skal alle afstande skaleres ned med den samme faktor. Det giver selvfølgelig det

bedste billede af vores solsystem, men ulempen er, at planeterne bliver meget små, medmindre man accepterer at have de yderste planeter liggende nogle kilometer væk. I bør derfor overveje, om skalaforholdet for afstandene i Solsystemet og skalaforholdet for planeters radier skal være det samme.

Et himmellegemes position på himlen er givet ved to koordinater, længde og bredde, der svarer til længde- og breddegrader målt langs ekliptika (dvs, Solens bane på himmelkuglen). Vi ser her bort fra bredden, idet alle planeter stort set ligger i samme plan som Jordens bane om Solen (ekliptika). Planeterne bevæger sig, og data i sådan en tabel er fra en bestemt dag.

Placer jeres model for Jorden et passende sted. Placer så de øvrige i den angivne retning og afstand.

	Længde	Afstand fra Jorden (AE)	Radius (km)
Solen	90°40'14"	1,02	695990
Merkur	101°48'58"	1,27	2439
Venus	75°38'09"	1,65	6052
Mars	60°56'15"	2,24	3397
Jupiter	33°27'10"	5,43	71492
Saturn	190°30'59"	9,41	60268
Uranus	4°26'26"	20,12	25559
Neptun	330°49'44"	29,49	24764
(Pluto)	276°20'45"	31,04	1151

1 AE (astronomisk enhed) svarer til 149,6 mio. km. Jordens radius er 6378 km. Data i tabellen er for 22. juni 2011 kl. 12 i København. Aktuelle data kan findes her: [Sky View Café \(skyviewcafe.com\)](http://skyviewcafe.com)

2.1.3 Eksperiment: Parallaxe-metoden

Sæt en tændt pære i en kendt afstand fra et rullebord (en afstand på ca. 3-4 meter er passende).

Rullebordet stilles, så kanten nærmest pæren står vinkelret på retningen til pæren, og så pæren er lige i midten.

Mål parallaxen fra begge siden (ϕ_1 og ϕ_2) samt halvdelen af bordets bredde b (det svarer til den astronomiske enhed). Mål til sidst afstanden fra bordets bagkant til pæren, d .

Beregn pærens afstand ud fra den målte parallaxe samt bordets bredde. Sammenlign med den målte afstand.

2.1.4 Klassediskussion: For og imod verdensbillederne

Opdel klassen i grupper på tre. Alle forbereder sig ved at sætter sig ind i de tre konkurrerende modeller, enten ved at søge på nettet eller ved at hente projekt 10.9 fra HEM1, hvor det hele er gennemgået og illustreret. Du kan hente projektet [her-link til 2](#).

På dagen, hvor grupperne skal arbejde med emnet, trækkes der lod mellem de tre om hvem der skal fremlægge hvad. Fremstillingerne skal være ledsaget af illustrationer.

Grupperne noterer deres tre vigtigste pointer og fremlægger dem i en fælles klasses Diskussion.

2.2 Med Kepler på vej mod det moderne verdensbillede

2.2.1 Historisk indledning

Efter reformationen voksede der i 1500-tallet i Europa en religiøs intolerance og fundamentalisme frem på begge sider af skellet mellem protestanter og katolikker. Det udløste religionskrige i 1500-tallet og spillede en betydelig rolle i trediveårskrigen i 1600-tallet. Og indenfor den nye religiøse bevægelse skete der en række udspaltninger i nye retninger, fraktioner og sekter, som også var indbyrdes intolerante. Kættere og vantro, som ens modstandere altid blev kaldt, blev jagtet og i denne periode ofte brændt på bålet.

I Centraleuropa var det svært at bevæge sig frit rundt, for hvem var ven og hvem fjende. Kepler blev født i 1571, og skulle egentlig læse teologi, men da han ikke ville han skrive under på hele *'Den Augsburger trosbekendelse'* – der var passager han fandt for langt ude, specielt lutheranernes opfattelse af nadveren – så kunne han ikke blive præst.

Godt for det, tænker vi nok idag, for Kepler viste så store evner indenfor matematik og astronomi, at han derfor blev opfordret til at tage en matematisk uddannelse. Midt i 1590'erne var han lærer i Graz i det nuværende Østrig. Det var dengang protestantisk, men skillelinjen mellem det protestantiske og det katolske Europa lå ikke klippefast, og da en ny kejser (Ferdinand II) kom til, startede han en modreformation. Kepler havde advokeret for Kopernikus heliocentriske model i både tale og skrift, og nu blev anklagerne mod ham så voldsomme og truende at han og familien flygter nordpå.

Kepler var meget interesseret i astronomi, han havde som barn set den samme komet, som Tycho Brahe beskriver i skriftet *'Kometen 1577'*, og nogle år senere oplevede han med få års mellemrum to totale måneformørkelser. Interessen havde han båret med sig, og han kendte godt Europas mest berømte videnskabsmand, Tycho Brahe, ville gerne møde ham og arbejde for ham – men Tycho Brahe sad på Hveen langt mod nord. Men nogenlunde samtidig med Keplers flugt flygter Tycho Brahe ud af Danmark! Der er kommet en ny ung konge (Christian d. 4.), som ikke er helt så begejstret for Tycho Brahe, som Faderen (Frederik d. 2) var. Og adelen er endnu mindre begejstret, de finder det uhørt at den danske stat skal yde Tycho Brahe så enorme summer – han modtager faktisk omkring 5% af den danske stats nationale budget! De leder efter et svagt punkt og de har nu en allieret i kongen, så de sætter ind der, hvor de selv finder han er mest sårbar – han respekterer ikke de skarpe grænser mellem stænderne.

Ikke nok med at Tycho Brahe foretrækker kloge og flittige bondesønner (som Longomontanus) fremfor dumme og dovne adelssønner, men han har også tilladt sig at gifte sig under sin stand, med en almindelig borgerlig kvinde. Det opfattes som et farligt bidrag til sædernes forfald, så han får forelagt et krav om at lade sig skille. Så er det han stikker af. I forvejen har han sendt mange af sine instrumenter, dog ikke alle, og sine værdifulde observationer har han også med sig.

Efter flere omskiftelser tager Kejseren i Prag ham til sig i 1598 – han er trods alt Europas mest berømte videnskabsmand. Den slags ansættelser ved hoffet blev brugt til at kaste glans over kejseren. Da Kepler får nys om det skriver han for at få foretræde og søge om en stilling hos ham. Det mislykkes i første omgang, men måske har Tycho Brahe taget oplysninger på ham og fundet ud af, at han er en sand regnekunstner. Sådan en har Tycho Brahe brug for til at gennemføre sin plan: At få beregnet Mars-banen, den bane planeten Mars følger om Solen, med det formål at bevise, at Det Tychonske system, og hverken det geocentriske eller det heliocentriske er den sande model for himmelrummet. Men det vil kræve uhyre mange og nøjagtige beregninger.

Så Kepler kommer med på holdet i Prag. Kepler er tilhænger af Kopernikus heliocentriske system. Men han er en hæderlig videnskabsmand, så han fifler ikke med data. Kepler er sikker på, at han er et redskab for Gud. Gud har en plan med ham, at det er ham, der skal vise menneskene, hvordan tingene hænger sammen i rummet.

2.2.2 Keplers konstruktion af Mars ellipsebane ud fra Tycho Brahes data

Forhistorien til Keplers beregninger er den at Tycho Brahe gennem omhyggeligt udførte studier af Mars position på nattehimmelen havde opbygget en unik liste af observationer, som Kepler kunne tage udgangspunkt i. Tycho Brahe noterede fra sit observatorium Uraniborg på Hven over mange år, hvor Mars stod på nattehimmelen langs Ekliptika, Solens bane, og samtidigt noterede han også, hvor Solen stod langs Ekliptika. Særligt interessante er de observationer, der adskiller sig med netop 687 dage, som er Mars omløbstid omkring Solen, for da vidste Kepler, at Mars var tilbage på præcis det samme sted i sin bane omkring Solen: Her er et typisk eksempel fra Tycho Brahes observationer:

Dato	Heliocentriske længdegrad for Jorden	Geocentriske længdegrad for Mars
1585 Feb. 17	$159^{\circ} 23' = 159.38^{\circ}$	$135^{\circ} 12' = 135.20^{\circ}$
1587 Jan. 5	$115^{\circ} 21' = 115.35^{\circ}$	$182^{\circ} 08' = 182.13^{\circ}$

Bemærk! Både det heliocentriske og det geocentriske koordinatsystem ligger i ekliptika-planen. I det heliocentriske er Solen i centrum og x-aksen går ud gennem forårsjævndøgnspunktet. I det geocentriske er Jorden centrum og x-aksen går ud gennem forårsjævndøgnspunktet. Vinkler måles herfra imod uret.

Øvelse 2.8. En geometriske version af Keplers beregning

Kepler kendte ikke Jordens afstand til Solen, men satte den til én astronomisk enhed. Ydermere antog han i første omgang at Jorden bevægede sig i en cirkel omkring Solen. De heliocentriske længdegrader gav da Jordens position de to datoer. Samtidigt gav de geocentriske længdegrader retningsvinklerne til Mars set fra Jorden. Vi kan altså nemt konstruere de to sigtelinjer til Mars og dermed finde Mars position.

Kepler er især interesseret i afstanden fra Solen til Mars og retningsvinklen fra Solen til Mars, dvs. den heliocentriske længdegrad for Mars. Vi konstruerer i stedet i et geometriprogram.

Først opretter vi Jordens bane omkring Solen som en cirkel med radius 1 astronomisk enhed. Så drejer vi enhedspunktet på Jordens bane (forårspunktet) med 159.38° henholdsvis 115.35° for at finde Jordens position de to dage, på figuren henh. J_2 og J_1 . Derefter drejer vi den vandrette sigtelinje med 135.20° henholdsvis 182.13° og forskyder de to sigtelinjer, så de udgår fra Jorden. Der hvor de to sigtelinjer skærer hinanden befandt Mars sig de to dage.

Tycho	Jorden	Mars
1585	159.38	135.2
1587	115.35	182.13

Vi kan nu aflæse (eller som Kepler bruge trigonometri kun med støtte af tabeller over sinus- og cosinusfunktioner) at afstanden til Mars var 1.6913 astronomiske enheder og at retningsvinklen til Mars, den såkaldte heliocentriske længdegrad, var 149.22° . Vi kender altså nu det første punkt på Mars bane. Fortsætter vi på denne måde kan vi finde fx fem udvalgte punkter på Mars bane ud fra Tycho Brahes observationer og omsætte dem til afstande og retningsvinkler for Mars.

Øvelse 2.9: Tycho Brahes Mars data fra Keplers Astronomia Nova

Kepler præsenterede resultaterne af sine beregninger i værket *Astronomia Nova, Den nye astronomi*. Heri giver hans også de data, som han anvendte, hvor vi her ser et udsnit:

Dato	Heliocentrisk længdegrad for Jorden	Geocentrisk længdegrad for Mars
1585 Feb. 17	159° 23'	135° 12'
1587 Jan. 5	115° 21'	182° 08'
1591 Sep. 19	5° 47'	284° 18'
1593 Aug. 6	323° 26'	346° 56'
1593 Dec. 7	85° 53'	3° 04'
1595 Oct. 25	41° 42'	49° 42'
1587 Mar. 28	196° 50'	168° 12'
1589 Feb. 12	153° 42'	218° 48'
1585 Mar. 10	179° 41'	131° 48'
1587 Jan. 26	136° 06'	184° 42'

a) Omsæt de fundne observationer til heliocentriske koordinater for Mars.

<p>Resultatet ses i det viste skema. Disse observationer udelukker selvfølgelig, at Mars følger en jævn cirkelbane omkring Solen med Solen i centrum, da afstanden til Solen jo i hvert fald varierer fra 1.38 ae til 1.69 ae, men det vidste Kepler sådan set godt. Allerede Ptolemæus havde foreslået at Solen lå <u>ex</u>centrisk (uden for centrum), dvs. et stykke væk fra centrum i cirkelbanen, hvorfor Solen sommetider lå tættere på Mars og somme tider længere væk fra Mars.</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Observation</th> <th>Mars afstand fra Solen</th> <th>Mars retningsvinkel</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1,2</td> <td>1.6913 ae</td> <td>149.22°</td> </tr> <tr> <td>3,4</td> <td>1.3789 ae</td> <td>330.12°</td> </tr> <tr> <td>5,6</td> <td>1.5027 ae</td> <td>44.39°</td> </tr> <tr> <td>7,8</td> <td>1.6390 ae</td> <td>185.20°</td> </tr> <tr> <td>9,10</td> <td>1.6747 ae</td> <td>158.09°</td> </tr> </tbody> </table>	Observation	Mars afstand fra Solen	Mars retningsvinkel	1,2	1.6913 ae	149.22°	3,4	1.3789 ae	330.12°	5,6	1.5027 ae	44.39°	7,8	1.6390 ae	185.20°	9,10	1.6747 ae	158.09°
	Observation	Mars afstand fra Solen	Mars retningsvinkel																
	1,2	1.6913 ae	149.22°																
	3,4	1.3789 ae	330.12°																
	5,6	1.5027 ae	44.39°																
	7,8	1.6390 ae	185.20°																
9,10	1.6747 ae	158.09°																	

Øvelse 2.10. Udfør selv observationer

Man kan selv 'udføre' observationen vha. et planetarieprogram, fx Stellarium. Anvend linket her: [Stellarium Astronomy Software](#). Planetarieprogrammet arbejder med den gregorianske kalender, mens Tycho Brahe brugte den julianske kalender, hvorfor der er 10-11 dages forskel på de to kalendere (alt eftersom observationen udføres før eller efter midnat). Den ovenstående dato indtastes derfor fx som den 27. februar 1585. Find først den præcise position for Uranienborg.

Spørgsmålet er altså blot om en excentrisk cirkelbane er forenelig med netop disse data? Kepler havde selvfølgelig flere data til sin rådighed, han var en fantastisk regnemester, og han var ikke tilfreds med cirklen som model. Han afsøgte derfor andre kurver, fx ovaler og æggeformede kurve. Og så slår det ned i ham: Et antal bøger fra den græske matematik storhedstid, forfattet af en vis Apollonius var blevet genfundet, bla. i arabiske lande, og var netop oversat eller ved at blive oversat til latin. Det var skrifter om abstrakt matematik, som indeholdt smukke figurer og sætninger, men som endnu ingen havde nogen anvendelse af. Skrifterne handlede om *keglesnit*, der er en fælles betegnelse for *ellipser*, *parabler* og *hyperbler*, og netop ellipsen kunne være løsningen på problemet. Han prøvede det af og dér fandt han løsningen. I dag kalder vi dette for Keplers første lov.

Du kan fortsætte i Keplers fodspor ved at hente projektet om *Keplers beregning af Marsbanen* [her-link til 3](#). Keplers 3. lov er behandlet i materialerne til **TICRA-filmen**, og Keplers 2. lov behandlet i et projekt du kan hente [her-link til 4](#). Hans mystiske forestillinger om solsystemets opbygning er behandlet i et projekt du kan hente [her-link til 5](#).

3.

Hvordan finder man vej – Navigation klassisk



I rummet kan man navigere ved hjælp af stjernekameraer, der bla. beregner vinkler mellem sigtelinjer til stjerner og som sammenligner de stjernebilleder, de får frem, med billeder i et arkiv. ”Var det ikke også sådan man navigerede i gamle dage, når man sejlede ud over havene”, spørger Nicoline. Og jo, det var principielt samme metode – at navigere efter sol, måne og stjerner og konferere med tabeller, man havde med. Men nøjagtigheden var naturligvis en helt anden. I dette kapitel præsenteres nogle af metoderne som bla. blev anvendt af opdagelsesrejsende som Columbus og Magellan.

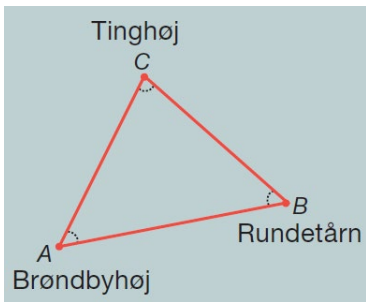
3. Hvordan finder man vej - Navigation klassisk

3.1 Et koordinatsystem på jordkloden

Hvordan finder man vej fra punkt A til punkt B, uden brug af GPS? Man bruger vel et kort over pågældende område, evt et helt atlas. Men hvor har vi kortet fra?

Gode kort er relativt nye fænomener. I sidste del af 1700-tallet begyndte man at opmåle de enkelte lande i Europa og tegne rimeligt præcise kort. Danmark var tidligt med i dette arbejde, hvor de første områder, der blev opmålt, var Holsten og Sjælland. Metoden, der blev anvendt dengang og lige siden, var *triangulering*, hvor man med stor nøjagtighed får fastlagt punkter i landskabet. For opmålingen af Sjælland var det første punkt Rundetårn, hvorfra man målte vinklerne mellem sigtelinjer til kirketårne og andre høje bygninger, og samtidig opmålte en af siderne med stor præcision. Fra de nye punkter opmålte man ligeledes vinkler mellem sigtelinjer, og med anvendelsen af trigonometri blev de resterende sider i trekanten beregnet. Disse danner så udgangspunkt for den næste trekant.

Billedet viser det primære triangulationsnet, som blev bestemt af Thomas Bugge og brødrene Ole og Caspar Wessel i perioden 1765-1777. Første opmåling var den røde trekant



Bemærk teksten i billedets øverste højre hjørne: "I øvrigt må man mærke, at ingen andre objekter på dette kort er anlagte end de som ved trigonometriske operationer er bestemte og beregnede".

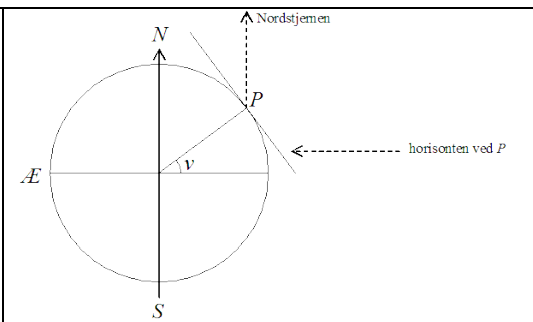
Trianguleringen giver os indbyrdes afstande og muligheden for at tegne gode kort. Men hvordan *kommunikerer* man, hvor et punkt A befinder sig? Det er ikke godt nok at tage et kort og pege! Men angiver man kun *afstanden* til et fælles referencepunkt som Rundetårn, så er der jo uendeligt mange muligheder – som findes på en cirkel med centrum i Rundetårn. Vi har brug for 2 oplysninger til at fastlægge, hvor vi er. Det er derfor naturligt at tænke i at lægge et grid, et koordinatsystem ud. Det begyndte man at gøre for 2-300 år siden, og i dag er dette et fælles system, alle på kloden benytter: Hvor man befinder sig, angives med 2 koordinater: *Breddegrad* og *Længdegrad*.

Først **Breddegraden**:

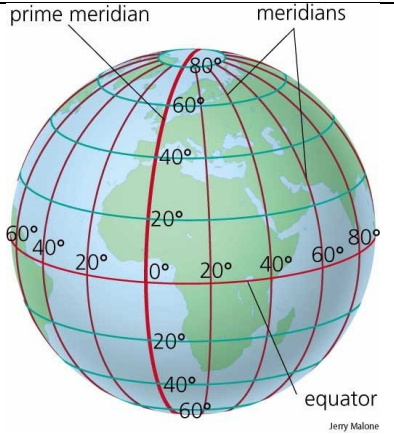

Breddegraden angiver den vinkel som en linje gennem centrum og punktet danner med ækvatorplanet. Det er v på illustrationen.

Øvelse 3.1

Argumenter ved hjælp af tegningen for, hvordan man en stjerneklar nat kan bestemme sin egen breddegrad.



For at definere **længdegraden**, har vi brug for følgende: En **storcirkel** på en kugle er den størst mulige cirkel, der kan lægges omkring kuglen. Ækvator er ét eksempel på en storcirkel. Cirklen der går gennem nord- og sydpolen er et andet. Men der kan lægges storcirkler på alle mulige måder.

<p>Meridianen for et punkt på Jorden er den halve storcirkel, som forbin-der nordpolen og sydpolen, og som går igennem det pågældende punkt.</p> <p>Længdegraden angiver den vinkel, som den lodrette plan gennem punk-tet og centrum, er drejet væk fra 0-meridianen gennem Greenwich i England. Drejes i Danmarks retning kaldes det østlig længde, drejes modsat kaldes det vestlig længde.</p>		 <p><i>0-meridianen i Greenwich</i></p>
--	--	--

Øvelse 3.2

- Breddegrad og længdegrad er ofte angivet i grader, minutter og sekunder i stedet for i decimaltal. Hvad er minutter og sekunder og hvordan omregnes de til decimaltal?
- Find fx via nettet Københavns længdegrad og breddegrad. Hvis de er angivet i minutter og sekunder, så omregn det til decimaltal

Øvelse 3.3

- Hvis Jordens omkreds er 40.000 km, hvor langt er der fra København til Nordpolen?
- Hvad er omkredsen af den breddecirkel København ligger på?
- To punkter A og B på Ækvator har længdegraderne henholdsvis 12° østlig længde og 87° vestlig længde. Hvor langt er der imellem de to punkter.

3.1.1 Projekt: Sfærisk geometri, trigonometri og korttegning

Du kan [her-link til 6](#) finde et projekt om sfærisk geometri, trigonometri og korttegning. I projektet når du frem til at forstå og beregne, at den korteste rute fra København til Los Angeles går over Grønland. Og du opnår indsigt i, hvilke kompromisser man må beslutte sig for, når man tegner kort. Skal det: Bevare afstandsforhold? Bevare vinkler? Bevare arealforhold?

Ikke alle krav kan nemlig opfyldes på samme tid. Den mest udbredte kortprojektion bliver Mercators projektion fra 1569, fordi denne bevarer vinkler, hvorved man let kan afsætte kompasskursen.

3.1.2 Case: Fastlæggelse af meteren som længeenhed

Afstande måles i bestemte længdeenheder. Men da man påbegyndte de mere præcise opmålinger til udarbejdelse af kort i perioden før og efter 1800, var situationen mht enheder rent kaos. Hvert land havde sine, og der var ingen simple omregninger mellem disse. Vi har en reminiscens heraf med de særprægede angelsaksiske mål. Blandt de mange reforminitiativer efter den franske revolution var også en fastlæggelse af et nyt længdemål. 10-talsystemet skulle anvendes overalt. Og det nye

længdemål, *en meter* blev fastlagt som præcis en ti-milliontedel af jordkvadranten, som er afstanden fra nordpolen til ækvator.

Nu er det jo håbløst at opmåle hele denne strækning. Men man fandt en løsning ved i stedet at måle et stort stykke af en meridian, og her er man heldig: Dunkirk og Barcelona ligger begge ved havet og på samme længdegrad. Og stykket mellem dem ligger ca midt på meridianen fra ækvator til Nordpolen. På dette tidspunkt diskuteredes om Jorden var kuglerund eller fladtrykt, og en fladtrykt jord vil ikke have samme krumning overalt. Afstanden mellem breddegraderne ville være lidt forskellig. Blev målingerne foretaget midtpå forestillede man sig, det ville give et tilpas gennemsnitligt mål.

Opmålingen blev yderst dramatisk, den startede i 1792 under de kaotiske forhold i årene efter revolutionen, hvor der nu også var udbrudt krig mellem Frankrig og Spanien. De to hovedansvarlige for opmålingen Delambre og Mechain startede i hver sin ende - Delambre fra Dunkirk og Mechain fra Barcelona i Spanien.

På kortet ses, at Mechain tilsyneladende havde en meget kortere rute, men den gik igennem Pyrenæerne. Man skal huske, at de skulle følge meridianen, selv om der måske var en lettere vej et andet sted.

Delambre ankommer efter 5 år, men først i efteråret 1798 når Mechain frem. Undervejs var de begge flere gange ved at blive henrettet, men de når frem med alle deres notater. De havde begge opmålt en trekants sider, hvor de startede, og undervejs alene målt vinkler. Så da de når frem starter de trigonometriske beregninger.



Den meter, som de beregnede sig frem til er 0,2 mm kortere end en ti milliontedel af jordkvadranten, målt i dag med satellitter!

Du kan [her-link til 7](#) finde materialer om denne fascinerende historie, der kunne være et oplæg til studieretningsprojekter med matematik og historie

3.2 Sekstanter, astrolabier og breddegrader

Ovenfor skrev vi blot, at man *målte vinklen mellem sigtelinjer*. Men hvordan gjorde man egentlig det? Hertil havde man udviklet en hel teknologi af værktøjer og metoder som målebørde, sekstanter, kvadranter, astrolabier, Jakobsstave og andet. *Målebordene* kunne blandt andet indstilles så man havde en vandret flade og dermed kunne måle vinkler ift horisonten. Vinkler blev ofte målt vha. *sekstanter*. Vi vil give nedenfor give en meget kort introduktion til, hvordan man kan udnytte sol, måne og stjerne til at navigere, og så i øvrigt henvise til websitet *geomat*. Her er der udførlige forklaringer om mange af disse instrumenters virkemåde. Og *geomat* har fået midler til at fremstille kopier af de *originale instrumenter*, som man kan låne til et skoleprojekt! Der ligger også oplæg til projekter mm - se her: [geomat](#).

Hvordan navigerer man på det åbne hav? Hvordan finder man i det hele taget ud af, hvor man er, når der kun er vand og bølger så langt øjet rækker? Det har mennesker gennem årtusinder udviklet mange forskellige metoder til, ofte med stor fantasi og byggende på en lang erfaring – men normalt også ret upræcise. Havde man muligheder for det, foretrak man at sejle, hvor der var landkending

af kyster eller af øer, man passerede. Til det havde man udviklet særlige typer af kort, kaldet *portolankort* og som netop var tegninger af kysternes profiler.

Men man lærte også tidligt at tage kending af stjernerne, og specielt stjernebillederne. Det kan man bl.a. læse ud af forskellige oldtidsskrifter. I *Odysseen*, der er skrevet for over 2500 år siden, har helten Odysseus svært ved at finde hjem, efter at krigen mod Troja er slut, og et sted hedder det, at han vidste, han skulle navigere, så han havde 'Bjørnen' på sin venstre side. Det er stjernebilledet, der indeholder den karakteristiske 'Karlsvognen', der her refereres til, og som er interessant for os på den nordlige halvkugle, fordi det ligger tæt på Nordstjernen, der tilnærmelsesvis befinder sig i den himmelske nordpol. Den samme viden om, at man forsøgte at navigere efter stjerner, sol og måne finder vi i Bibelen, i det skrift, der hedder *Apostlenes Gerninger*. Her hedder det om en af Paulus rejser - *I flere dage sås hverken sol eller stjerner, Til sidst svandt ethvert håb om vores redning*. De havde altså brug for sol eller stjerner for at kunne navigere.

Øvelse 3.4

Hvis der er klar himmel, hvor man kan følge solens gang, så kan det give det en god fornemmelse af verdenshjørnerne. Forklar dette!

Går vi ud fra, at man kender *datoen*, så har man langt tilbage i tiden haft tabeller over solens maksimale højde over horisonten ved forskellige breddegrader. Kan man bestemme solens højde, kan man derfor få et nogenlunde klart billede af hvilken breddegrad, man befinder sig på.

Et af redskaberne til at bestemme vinkler, fx solhøjden (B) var en sekstant som denne. I animationen, du kan se her, demonstreres hvordan man bruger en sekstant:

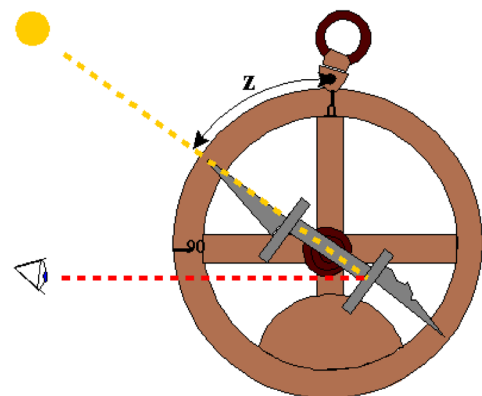
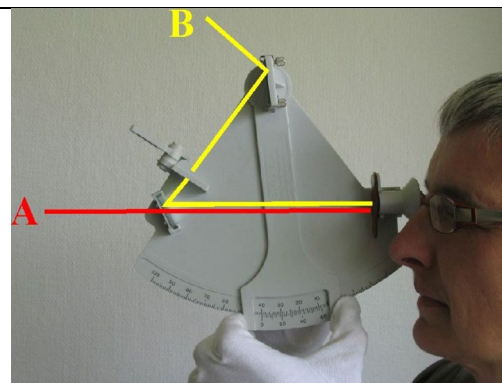
[How to use a sextant \(imgur.com\)](https://imgur.com)

Vi får et klart indtryk af vigtigheden af at holde sekstanten fast i forhold til horisonten (A).

Tilsvarende: Hvis der er stjerneklart, og hvis man kan bestemme vinklen til Nordstjernen, så kan man bestemme breddegraden, som vi så i øvelsen ovenfor.

Men skibe vipper, så det var ikke så let at bestemme rimeligt præcise vinkler ift horisonten.

Dette problem kunne man bedre løse med *sø-astrolabiet*. Her skal vi også indstille en viser, så solens stråler går gennem begge huller, og vi dermed har sigtelinjen. Et sø-astrolabium er ret tungt, så det hænger rimeligt stabilt i ophænget. Men til gengæld er aflæsningen ikke så præcis som med en sekstant.



3.3 Case: Kampen om længdegraden

Har vi glemt længdegraden? Indtil nu har vi udelukkende beskæftiget os med bestemmelse af breddegrad. Det er der en god grund til – at bestemme længdegraden var en meget vanskeligere opgave i tidligere tider, hvor man ikke havde pålidelige ure.

Øvelse 3.5

Antag, at du har et pålideligt ur, som viser den nøjagtige tid, da du sejler ud fra din hjemhavn. Hvordan kan du bruge uret til at finde ud af, hvilken længdegrad du er kommet til?

Opgaven er altså klar nok: Fremstil et pålideligt ur! Og et som man kan have med på en stormfuld sejlads. Der bliver flere gange udlovet en dusør til den som løser dette problem. Men det er først efter den engelske flådes frygtelige forlis ved Scilly-øerne ud for Englands kyst i 1707, at arbejdet med at fremstille et sådant ur tager fart. Forliset, der skyldtes en fejl navigering, kostede 2000 søfolk livet.

Det engelske parlament udlover en dusør på 20.000 pund – svarende til mange millioner i dag – for et ur, der ved en sørejse på 6 uger højst tabte eller vandt 2 minutter. Denne opgave, som Newton opfattede som umulig at løse klarede urmageren John Harrison. Første forsøg vejede 36 kg og var næsten 1 m høj. Det endelige mesterstykke, man ser her, havde en diameter på 13 cm og vejede 1,5 kg



Du kan finde en detaljeret gennemgang af Harrisons forskellige løsningsforsøg [her-link til 8](#).

Der var også andre forsøg på at løse længdegradsproblemet, hvor det mest seriøse var *månedistancemetoden*, som rummer ganske megen trigonometri. Du kan finde en gennemgang af metoden i et dokument fra *geomat* [her-link til 9](#).

Den fascinerende historie rummer godt materiale til et studieretningsprojekt

3.4 Projekt: Opdagelsesrejserne

Når man taler om opdagelsesrejser mener man stort set altid *europæiske* ekspeditioner for at opdage og evt erobre andre dele af verden. Men naturligvis har mennesker altid foretaget opdagelsesrejser – det er jo sådan vi har spredt os over alle kontinenter og ud over fx Stillehavets utallige øer. De store europæiske opdagelsesrejser til søs fandt sted i 14 og 1500-tallet: Columbus rejser vestpå over Atlanten i 1492, mens Vasco da Gama i 1497 rejser syd om Afrika og østpå. Begge har Indien som mål. Magellan rejser i 1519 vestpå for at finde en sejlroute gennem Sydamerika – og finder den i det allersydligste i 1520, hvorfra han når ud i og krydser det enorme Stillehav. Det var jo lang tid før problemet med længdegraderne blev løst, så de måtte navigere efter andre metoder.

På *geomat* ligger oplæg til at gennemføre projekter om opdagelsesrejser. Du kan hente oplægget til et projekt om Columbus rejse [her-link til 10](#).

4.

Moderne navigation med GPS



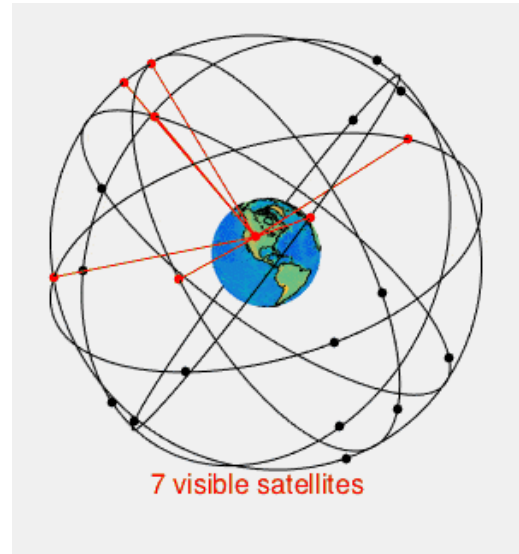
Termas virksomhed, hvor en stor del af udstyret til ASIM og til stjernekameraerne produceres, samles og afprøves, ligger i Lystrup nord for Århus. Casper lover at køre sin lillesøster dertil. Og hvordan finder han vej? Naturligvis ved hjælp af GPS. De fleste er nok klar over, at dette bygger på signaler fra særlige satellitter, der er placeret i baner, så de dækker hele kloden. Men hvordan fungerer det, hvad er det for en matematik, GPS-systemet bygger på. I dette kapitel præsenterer vi en lidt forsimplet udgave, der ikke inddrager relativitetsteorien, men som illustrerer princippet i et GPS-system.

4. Moderne navigation med GPS

I 1993 frigav det amerikanske forsvarsministerium GPS, som står for Global Positioning System, til ikke militært brug. Systemet består af 31 satellitter, hvor mindst 24 satellitter er aktive. Satellitterne flyver i 6 orbitale planer, der ligger i en højde på 20200 km over jorden, og hver satellit gennemflyver sin orbitale plan 2 gange i døgnet.

Se <https://www.gps.gov/systems/gps/space/>.

Illustrationen er lånt fra Wikipedia, hvor man kan se den som en lille film. Der er markeret et fast punkt på Jorden - Golden, Colorado, USA ([39.7469°N](#) [105.2108°W](#)) - hvorfra vi opfanger signaler fra satellitterne. Antallet af satellitter, der er synlige, varierer over døgnet. De udsender konstant signaler, som vi kan modtage de fleste steder på Jorden.



Vi forestiller os nu, at vi har en GPS-modtager, som kan være din mobiltelefon, og som modtager signaler fra GPS-systemet.

Signalet fra en satellit indeholder satellittens position (a_1, b_1, c_1) og tiden t_1 , som er den tid signalet er om at komme fra satellitten til GPS-modtageren. Da signalet har lysets hastighed c , så er afstanden fra satellitten til GPS-modtageren $c \cdot t_1$.

Vi kender ikke GPS-modtagerens position (x, y, z) , men den må opfylde følgende afstandsligning:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = c^2 \cdot t_1^2.$$

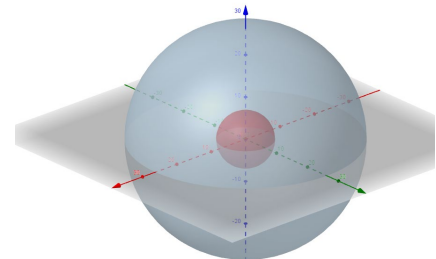
Øvelse 4.1

Tegn en skitse af situationen og argumenter for denne afstandsligning.

Øvelse 4.2

Bestem tiden t_1 , hvis afstanden mellem en satellit og GPS-modtager er 2300 km.

Vi kan prøve at modellere vores satellitters beliggenhed i forhold til jorden, hvor GPS-modtageren befinder sig. Vi har jordens radius til 6371 km og centrum i $(0, 0, 0)$, så GPS-modtageren er på en kugle med dette centrum og denne radius. Satellitterne er på en kugle med centrum i $(0, 0, 0)$ og radius $6371 + 20200 = 26571$ km. En illustration af dette kan se således ud (enheden på alle akser er i 1000 km):



Øvelse 4.3

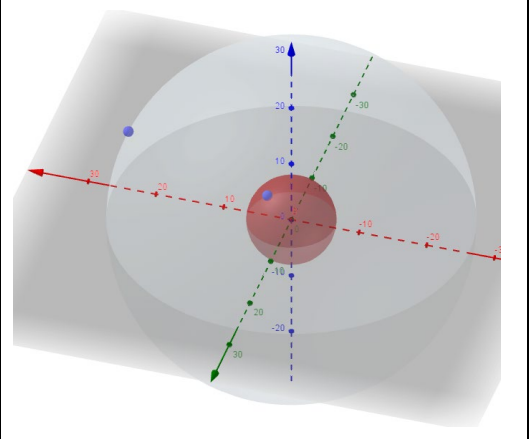
Konstruer en lignende model i et 3D geometriprogram.

Øvelse 4.4

Hvordan vil det være oplagt at vælge akserne i modellen af Jordens kugle og kuglen, hvor satellitterne bevæger sig?

Øvelse 4.4

Indtegn en satellit og en GPS modtager i 3D modellen.



Når vi skal bestemme koordinatsættet til punktet på jorden, som GPS-modtageren befinder sig i, så giver en satellit os en kugle af punkter, hvor GPS-modtageren kan befinde sig.

Eksempel

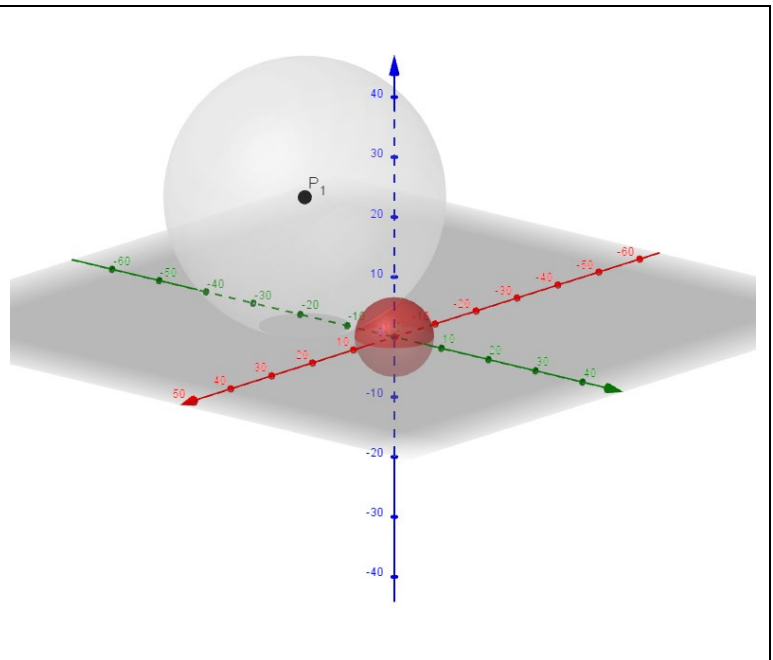
Vi har en satellit i punktet:

$$(a_1, b_1, c_1) = (4.4, -15.2, 21.4)$$

og afstanden til GPS-modtageren er $r_1 = 22,7$ i et koordinatsystem med enhederne 1000 km.

Vi kan i en 3D model indtegne den kugle, hvor GPS-modtageren må befinde sig.

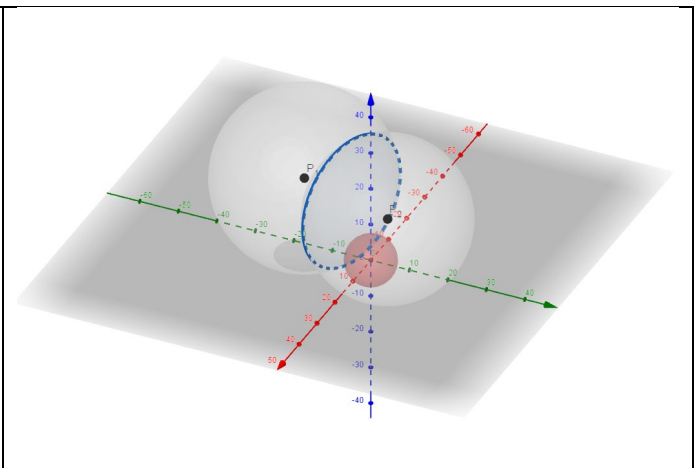
Vi ser, at der er uendeligt mange mulige positioner for GPS-modtageren (også selv om vi alene betragter skæringen mellem satellitkuglen og jordkuglen).



Vi får en satellitposition mere i punktet $(a_2, b_2, c_2) = (12.5, 10.2, 21.1)$ og afstanden til GPS-modtageren er $r_2 = 20,5$ i et koordinatsystem med enhederne 1000 km.

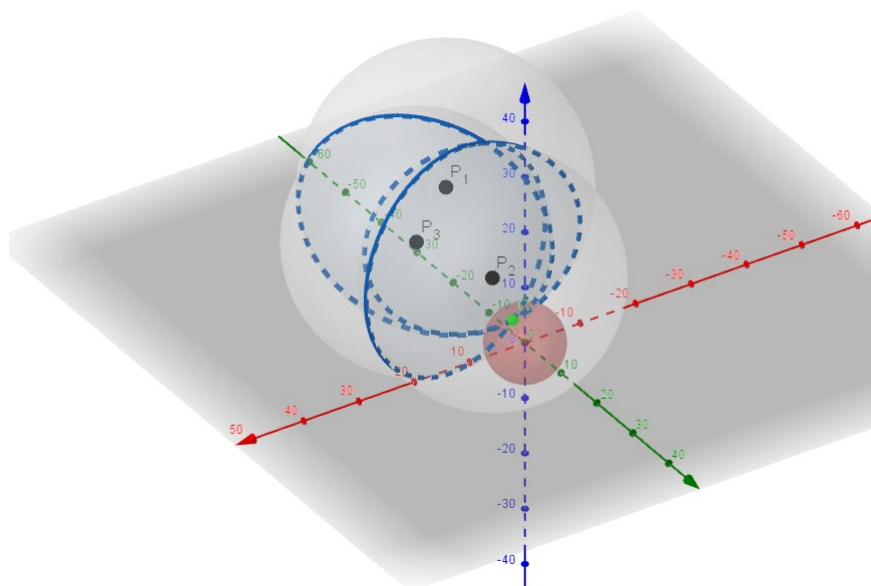
Vi kan nu tegne de to satellitkugler i samme koordinatsystem.

Fællesmængden mellem de to satellitkugler er en cirkel, som modellen viser. Dvs. GPS-modtageren må befinde sig i et punkt på denne cirkel.



Vi får en tredje satellitposition mere i punktet $(a_3, b_3, c_3) = (15.7, -6.0, 20.5)$ og afstanden til GPS-modtageren er $r_3 = 20,7$ i et koordinatsystem med enhederne 1000 km.

Vi kan nu tegne de tre satellitkugler i samme koordinatsystem.



De tre satellitkugler har parvis en cirkel som fællesmængde. Skæringspunktet mellem de tre cirkler og dermed satellitkugler giver os positionen af GPS-modtageren, som i modellen er $(x, y, z) = (3.0, 1.3, 5.9)$.

Øvelse 4.5

Konstruer en 3D model af de tre satellitkugler fra ovenstående eksempel, og bestem vha. 3D geometriværktøjet positionen af GPS-modtageren.

Øvelse 4.6

De tre satellitkugler har et punkt mere til fælles. Bestem koordinatsættet til dette punkt, og argumenter for, at GPS-modtageren ikke kan befinde sig i dette punkt.

Vi kan opfatte hver af ligningerne for satellitkuglerne som en ligning i tre ubekendte (x, y, z) , og dermed har vi 3 ligninger med tre ubekendte.

Eksempel:

Ligningssystemet fra eksemplet ovenfor bliver

$$(x - 4, 4)^2 + (y + 15, 2)^2 + (z - 21, 1)^2 = 22, 7^2$$

$$(x - 12, 5)^2 + (y - 10, 2)^2 + (z - 21, 7)^2 = 20, 5^2$$

$$(x - 15, 7)^2 + (y + 6)^2 + (z - 20, 5)^2 = 20, 7^2$$

Øvelse 4.7

Forklar ovenstående ligningssystem ud fra eksemplet med de tre satellitkugler.

Ovenstående ligningssystem er et kvadratisk ligningssystem i de tre variable x , y og z .

Øvelse 4.8

Løs ligningssystemet i et matematisk værktøjsprogram med CAS. Du skal få følgende løsninger:

with(Gym) :

Ligningssystem med satellitkugler.

$$\begin{aligned} & \text{solve}\left(\left[(x - 4.4)^2 + (y + 15.2)^2 + (z - 21.1)^2 = 22.7^2, (x - 12.5)^2 + (y - 10.2)^2 + (z - 21.7)^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. = 20.5^2, (x - 15.7)^2 + (y + 6)^2 + (z - 20.5)^2 = 20.7^2 \right], \{x, y, z\}, \text{allsolutions} = \text{true}\right) \\ & \{x = 3.335988477, y = 1.374330160, z = 5.625845444\}, \{x = 6.517248456, y = -0.4093820822, z \\ & \quad = 38.18932066\} \end{aligned} \quad (1)$$

Øvelse 4.9

Sammenlign disse løsninger den løsning, som vi konstruerede i ovenstående eksempel. Forklar dels analytisk ud fra ligningssystemet, dels geometrisk, hvorfor der er to løsninger.

I starten af kapitlet opstillede vi på symbolsk form ligningen for én satellit. Med tre satellitter får vi, at GPS-modtageren må opfylde følgende ligningssystem:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = c^2 \cdot t_1^2$$

$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = c^2 \cdot t_2^2$$

$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = c^2 \cdot t_3^2$$

Ligningssystemet er kvadratisk i sin opbygning, så vi kan løse det generelt ved at omskrive ligningerne.

Trin 1. Vi ganger kvadratparenteserne ud:

$$x^2 - 2a_1x + a_1^2 + y^2 - 2b_1y + b_1^2 + z^2 - 2c_1z + c_1^2 = c^2 \cdot t_1^2 \quad (1)$$

$$x^2 - 2a_2x + a_2^2 + y^2 - 2b_2y + b_2^2 + z^2 - 2c_2z + c_2^2 = c^2 \cdot t_2^2 \quad (2)$$

$$x^2 - 2a_3x + a_3^2 + y^2 - 2b_3y + b_3^2 + z^2 - 2c_3z + c_3^2 = c^2 \cdot t_3^2 \quad (3)$$

Trin 2. Vi subtraherer ligningerne (3) og (1) og ligningerne (3) og (2):

$$x^2 - 2a_3x + a_3^2 + y^2 - 2b_3y + b_3^2 + z^2 - 2c_3z + c_3^2 - (x^2 - 2a_1x + a_1^2 + y^2 - 2b_1y + b_1^2 + z^2 - 2c_1z + c_1^2) = c^2 \cdot t_3^2 - c^2 \cdot t_1^2 \quad (4)$$

$$x^2 - 2a_3x + a_3^2 + y^2 - 2b_3y + b_3^2 + z^2 - 2c_3z + c_3^2 - (x^2 - 2a_2x + a_2^2 + y^2 - 2b_2y + b_2^2 + z^2 - 2c_2z + c_2^2) = c^2 \cdot t_3^2 - c^2 \cdot t_2^2 \quad (5)$$

$$x^2 - 2a_3x + a_3^2 + y^2 - 2b_3y + b_3^2 + z^2 - 2c_3z + c_3^2 = c^2 \cdot t_3^2 \quad (6)$$

Trin 3. Vi reducerer ligningerne (4) og (5):

$$-2a_3x + a_3^2 - 2b_3y + b_3^2 - 2c_3z + c_3^2 + 2a_1x - a_1^2 + 2b_1y - b_1^2 + 2c_1z - c_1^2 = c^2 \cdot t_3^2 - c^2 \cdot t_1^2 \quad (7)$$

$$-2a_3x + a_3^2 - 2b_3y + b_3^2 - 2c_3z + c_3^2 + 2a_2x - a_2^2 + 2b_2y - b_2^2 + 2c_2z - c_2^2 = c^2 \cdot t_3^2 - c^2 \cdot t_2^2 \quad (8)$$

$$x^2 - 2a_3x + a_3^2 + y^2 - 2b_3y + b_3^2 + z^2 - 2c_3z + c_3^2 = c^2 \cdot t_3^2 \quad (9)$$

Trin 4: Ligningerne (7) og (8) er lineært ligningssystem. Vi løser det mht. de to variable x og y . Vi samler led med x og y på venstresiden. På højresiden samler vi led med z og konstanter.

$$(-2a_3 + 2a_1)x + (-2b_3 + 2b_1)y = c^2 \cdot t_3^2 - c^2 \cdot t_1^2 + a_1^2 - a_3^2 + b_1^2 - b_3^2 + c_1^2 - c_3^2 + 2c_3z - 2c_1z \quad (10)$$

$$(-2a_3 + 2a_2)x + (-2b_3 + 2b_2)y = c^2 \cdot t_3^2 - c^2 \cdot t_2^2 + a_2^2 - a_3^2 + b_2^2 - b_3^2 + c_2^2 - c_3^2 + 2c_3z - 2c_2z \quad (11)$$

$$x^2 - 2a_3x + a_3^2 + y^2 - 2b_3y + b_3^2 + z^2 - 2c_3z + c_3^2 = c^2 \cdot t_3^2 \quad (12)$$

Øvelse 4.10

Forklar trin 1, trin 2, trin 3 og trin 4 med omskrivningerne af ligningssystemet.

(Bemærk: Ligningerne (3), (6), (9) og (12) er ens. Her er endnu ikke sket omskrivninger)

Vi fokuserer nu på ligningerne (10) og (11), hvor vi kan anvende *determinantmetoden* til løsning af 2 ligningerne med 2 ubekendte. Du kan evt hente et materiale om denne metode [her-link til 11](#).

Vi simplificerer ligningerne (10) og (11) ved at sætte:

$$A_1 = c^2 \cdot t_3^2 - c^2 \cdot t_1^2 + a_1^2 - a_3^2 + b_1^2 - b_3^2 + c_1^2 - c_3^2 + 2c_3z - 2c_1z \text{ og}$$

$$A_2 = c^2 \cdot t_3^2 - c^2 \cdot t_2^2 + a_2^2 - a_3^2 + b_2^2 - b_3^2 + c_2^2 - c_3^2 + 2c_3z - 2c_2z .$$

Indsæt i ligningssystemet. Vi ser nu tydeligt, dette er "klassisk" to ligninger med to ubekendte:

$$(-2a_3 + 2a_1)x + (-2b_3 + 2b_1)y = A_1$$

$$(-2a_3 + 2a_2)x + (-2b_3 + 2b_2)y = A_2$$

Løsningerne med hensyn til x og y bliver med determinantmetoden.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & 2(b_1 - b_3) \\ A_2 & 2(b_2 - b_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_1 - a_3) & 2(b_1 - b_3) \\ 2(a_2 - a_3) & 2(b_2 - b_3) \end{vmatrix}} \text{ og } y = \frac{\begin{vmatrix} 2(a_1 - a_3) & A_1 \\ 2(a_2 - a_3) & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_1 - a_3) & 2(b_1 - b_3) \\ 2(a_2 - a_3) & 2(b_2 - b_3) \end{vmatrix}}$$

Øvelse 4.11

Forklar dette ud fra determinantmetoden.

Nu kommer tredje ligning i spil!

Indsæt de to løsninger for x og y i den tredje ligning:

$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = c^2 \cdot t_3^2$$

Hvilken ligningstype i z giver dette?

Der kommer ikke noget smukt ud af at opstille et udtryk for z på symbolsk form.

Vi afprøver i stedet metoden på konkrete talsæt.

Øvelse 4.12. Beregning af en position ud fra determinantmetoden

Vi har positionerne for de tre satellitter.

Satellit 1: $(a_1, b_1, c_1) = (4.4, -15.2, 21.4)$ og afstanden til GPS-modtageren er $r_1 = 22,7$.

Satellit 2: $(a_2, b_2, c_2) = (12.5, 10.2, 21.1)$ og afstanden til GPS-modtageren er $r_2 = 20,5$.

Satellit 3: $(a_3, b_3, c_3) = (15.7, -6.0, 20.5)$ og afstanden til GPS-modtageren er $r_3 = 20,7$.

Bestem koordinatsættet til GPS-modtageren ved først at anvende determinantmetoden for x og y . Og derefter bestemme z ud fra andengradsligningen ovenfor.

Går det altid godt? Nej, ikke altid - ikke alle ligningssystemer har jo løsninger.

Vi må kræve, at determinanten $\begin{vmatrix} 2(a_1 - a_3) & 2(b_1 - b_3) \\ 2(a_2 - a_3) & 2(b_2 - b_3) \end{vmatrix}$ er forskellig fra 0.

Determinanten kan omskrives

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2(a_1 - a_3) & 2(b_1 - b_3) \\ 2(a_2 - a_3) & 2(b_2 - b_3) \end{vmatrix} \\ &= 2(a_1 - a_3) \cdot 2(b_2 - b_3) - 2(a_2 - a_3) \cdot 2(b_1 - b_3) \\ &= 4a_1b_2 - 4a_1b_3 - 4a_3b_2 + 4a_3b_3 - 4a_2b_1 + 4a_2b_3 + 4a_3b_1 - 4a_3b_3 \\ &= 4a_1b_2 - 4a_1b_3 - 4a_3b_2 - 4a_2b_1 + 4a_2b_3 + 4a_3b_1 \\ &= 4a_1b_2 - 4a_2b_1 + 4a_2b_3 - 4a_3b_2 + 4a_3b_1 - 4a_1b_3 \\ &= 4 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Så vi får tre determinanter, der ikke alle må være lig med 0.

Øvelse 4.13

Forklar omskrivningerne af determinanterne.

Hvis vi havde situationen:

$$\begin{vmatrix} 2(a_1 - a_3) & 2(b_1 - b_3) \\ 2(a_2 - a_3) & 2(b_2 - b_3) \end{vmatrix} = 0.$$

kunne vi have isoleret med hensyn til x og z eller med hensyn til y og z .

I disse to tilfælde får vi determinanterne:

$$\begin{vmatrix} 2(a_1 - a_3) & 2(c_1 - c_3) \\ 2(a_2 - a_3) & 2(c_2 - c_3) \end{vmatrix} \quad \text{henholdsvis} \quad \begin{vmatrix} 2(b_1 - b_3) & 2(c_1 - c_3) \\ 2(b_2 - b_3) & 2(c_2 - c_3) \end{vmatrix}$$

Øvelse 4.14

Forklar, at determinanterne bliver således.

Øvelse 4.15

a) Udregn krydsproduktet $\begin{pmatrix} a_1 - a_3 \\ b_1 - b_3 \\ c_1 - c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 - a_3 \\ b_2 - b_3 \\ c_2 - c_3 \end{pmatrix}$.

b) Sammenlign koordinaterne med de tre determinanter

$$\begin{vmatrix} 2(a_1 - a_3) & 2(b_1 - b_3) \\ 2(a_2 - a_3) & 2(b_2 - b_3) \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2(a_1 - a_3) & 2(c_1 - c_3) \\ 2(a_2 - a_3) & 2(c_2 - c_3) \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2(b_1 - b_3) & 2(c_1 - c_3) \\ 2(b_2 - b_3) & 2(c_2 - c_3) \end{vmatrix}.$$

Øvelse 4.16

Hvilken geometrisk betydning har de to vektorer, som indgår i krydsproduktet $\begin{pmatrix} a_1 - a_3 \\ b_1 - b_3 \\ c_1 - c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 - a_3 \\ b_2 - b_3 \\ c_2 - c_3 \end{pmatrix}$?

Øvelse 4.17

Hvordan ligger de tre centre for satellitkuglerne, hvis $\begin{pmatrix} a_1 - a_3 \\ b_1 - b_3 \\ c_1 - c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 - a_3 \\ b_2 - b_3 \\ c_2 - c_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$?

Øvelse 4.18

Denne model vil holde i en perfekt verden med meget præcise atomure både i satellitterne og GPS-modtagerne. Satellitterne har flere atomure - se <https://www.gps.gov/applications/timing/>, men uret i en standard GPS-modtager er ikke af en så høj standard, så vi har tre fiktive tider T_1 , T_2 og T_3 ud fra klokkeslættene, når GPS-modtageren får et signal og klokkeslættene for afsendelse af et signal fra en satellit.

Øvelse 4.19

Forklar hvilke af ovennævnte klokkeslæt, der er præcise.

Da alle tre satellitter er synkroniserede, så vil fejlen i de tre tidsmålinger T_1 , T_2 og T_3 være ens. Vi kan kalde denne fejl for k , og det vil sige, at $T_1 = k + t_1$, $T_2 = k + t_2$ og $T_3 = k + t_3$.

Vi har nu fire ubekendte x , y , z og k .

Øvelse 4.20

Opstil et ligningssystem med fire af satellitterne i forhold til GPS-modtageren.

Øvelse 4.21

Vi har positionerne for fire satellitter.

Satellit 1: $(a_1, b_1, c_1) = (4.4, -15.2, 21.4)$ og afstanden til GPS-modtageren er $r_1 = 22,7$.

Satellit 2: $(a_2, b_2, c_2) = (12.5, 10.2, 21.1)$ og afstanden til GPS-modtageren er $r_2 = 20,5$.

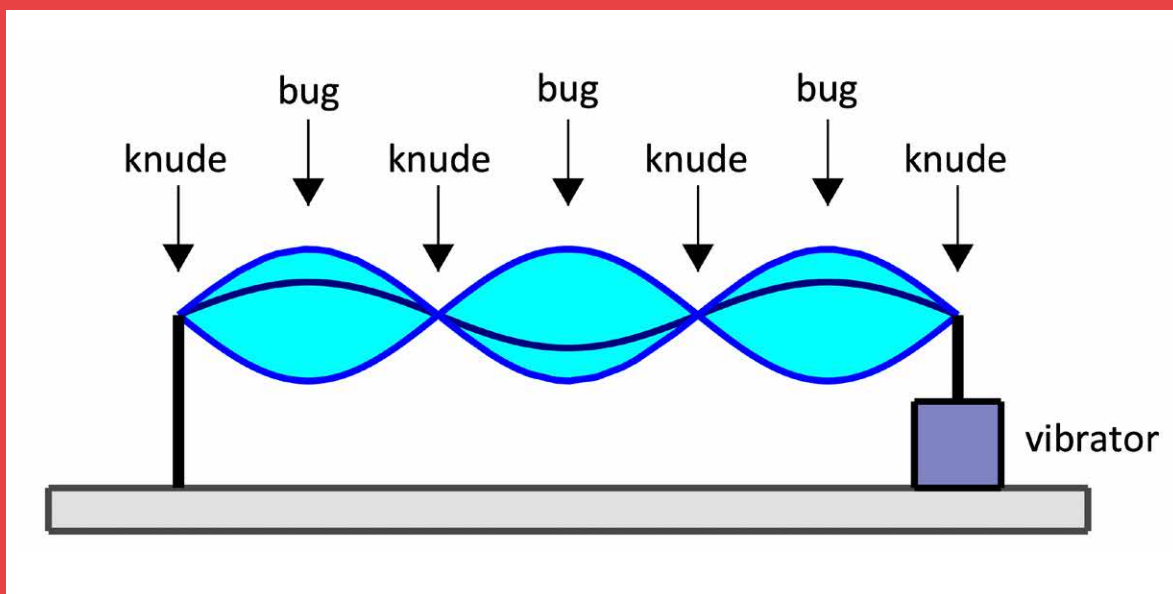
Satellit 3: $(a_3, b_3, c_3) = (15.7, -6.0, 20.5)$ og afstanden til GPS-modtageren er $r_3 = 20,7$.

Satellit 4: $(a_4, b_4, c_4) = (25.2, -7.4, 4.1)$ og afstanden til GPS-modtageren er $r_4 = 23,2$.

- Udregn T_1 , T_2 , T_3 og T_4 .
- Opstil et ligningssystem i de fire ubekendte x , y , z og k .
- Løs ligningssystemet i et matematisk værktøjsprogram med CAS.

5.

Matematisk modellering af bølgefænomener



Bølgefænomener er gode eksempler på, at vidt forskellige ting i naturen, der slet ikke "ligner" hinanden, kan beskrives med den samme matematik. Bølger i vand, lyden af musik, elektrisk strøm, jordskælv, data over en epidemis udvikling og meget mere. I dette kapitel vil vi undersøge disse fælles træk og indføre begreber, der gør det enklere at beskrive og sammenligne bølgefænomener. I dette kapitel er matematikken på et forholdsvis enkelt niveau – vi indfører først de trigonometriske funktioner, sinus og cosinus i undersøgelsen i de følgende kapitler.

5. Matematisk modellering af bølgefænomener

(Kapitel 5 rummer en behandling af bølgefænomener uden anvendelse af formalismen fra de trigonometriske funktioner. Kapitlet er således velegnet til 9. klasse / 1.g niveau, men elever på højere trin kan også have glæde af at få en indføring i emnet uden at gå i stå i den analyse af emnet, der omhandler anden ordens differentiaalligninger, og som præsenteres i de følgende kapitler.)

I dette afsnit skal vi kort forklare, hvad en svingning eller bølge egentlig er. Det viser sig, at svingninger egentlig bare er et specialtilfælde af vores definition af bølger, så vi starter med at spørge:

Hvad er en bølge?

De fleste kan genkende en bølge, når de ser den f.eks. på en vandoverflade, på en guitarstreng eller de kan høre lydbølgerne til en koncert eller fra en kirkeklokke, der ringer solen ned. Men hvad har disse ret forskellige fænomener egentlig til fælles, som gør, at vi kalder dem bølger?

De har faktisk en række fælles kendetegn, bla.

- 1) Bølgen har et materiale den "svinger i" og derved bevæger sig igennem. Dette kaldes bølgens medium.
- 2) Bølgerne fungerer ved, at de forstyrrer mediet et sted, og denne forstyrrelse udbreder sig så som tiden går.

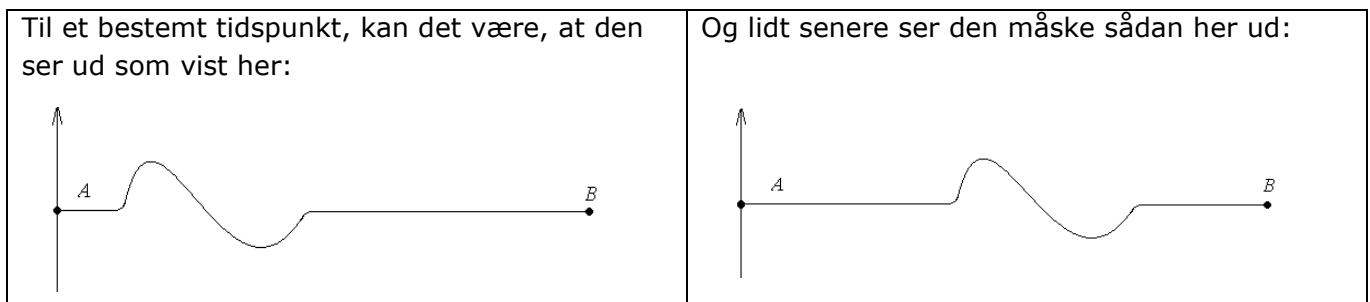
En meget bred definition på hvad en bølge er, kunne så være:

En bølge er en tidsafhængig forstyrrelse af et fysisk medium!

I eksemplerne ovenfor er medierne altså hhv. vandoverfladen, guitarstrengen, luften i koncertsalen og kirkeklokken. At forstyrrelsen af disse medier er tidsafhængig, betyder bare, at forstyrrelsen ikke står stille, men at den flytter sig med tiden. Det betyder så også, at man aldrig vil kunne tegne et billede af en bølge, fordi den jo hele tiden flytter sig. Man kan tage et *øjebliksbillede* af bølgen (hvis man ikke vil vise en hel film) – altså vise hvordan den ser ud til et ganske bestemt tidspunkt.

5.1 Bølger på en snor

Lad os prøve at illustrere bølgebegrebet ved at betragte bølger på en lang udspændt snor, der f.eks. kan frembringes ved at vi står og hiver op og ned i den ene ende af snoren.



Vi foretager nu en række overvejelser for snorbølgerne. Det viser sig at disse overvejelser gælder for bølger i al almindelighed.

- 1) Når bølgen bevæger sig, transporteres dens *form* af sted langs med snoren. Men selve snoren flytter sig ikke med bevægelsen, den svinger bare omkring den stilling, hvor den var, før den blev forstyrret. Vi konkluderer:

I) Når en bølge flytter sig, transporteres bølgens form

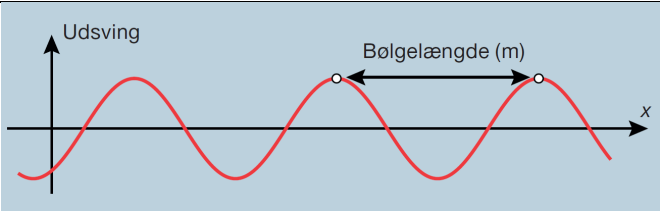
Hvis man har aftalt et eller andet morsesystem ud fra bølgens form (f.eks. prik = kort bølge, streg = lang bølge) kan man altså ved hjælp af bølgens form sende information af sted og derved kommunikere med en, der står ved den anden ende af snoren.

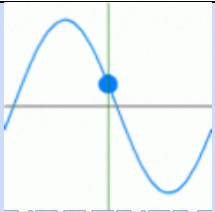
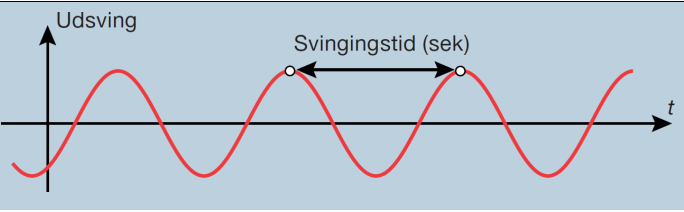
2) Hvis snoren i den anden ende var forbundet med en lille klods, ville vi kunne få denne til at bevæge sig ved at sende bølgen af sted. Når klodsen bevæger sig må den have kinetisk energi. Denne energi er blevet overført til klodsen via bølgen. Vi konkluderer:

II) En bølge kan transportere energi fra et sted til et andet.

5.2 Harmoniske bølger

Hvis bølgens udslag har den pæne symmetriske form, der er vist på figuren, kaldes bølgen for en **harmonisk bølge**. For sådanne bølger indføres nogle begreber, til at beskrive bølgen:

<p>Afstanden fra en bølgetop til den næste kaldes bølgens bølgelængde. Som symbol for bølgelængde bruges det græske λ (lambda = græsk l). Bølgelængden måles i meter.</p>	
---	--

 <p>Hvis man betragter et fast punkt på bølgen, vil man opdage, at det står og svinger op og ned. Den tid det tager fra punktet er helt i top, til det er tilbage i topstillingen igen, kaldes bølgens svingningstid. (Illustrationen er lånt fra KU)</p>	 <p>Afbilder vi udsvinget som funktion af tiden, får vi en graf som denne. Svingningstiden betegnes med T og måles i sekunder.</p>
--	--

Øvelse 5.1

- De to grafer ser ved første blik helt ens ud, men kig nøjere efter og forklar forskellen.
- Hvis det fx er bølger i vand, hvilken af de to grafer repræsenterer så et grafisk billede af det vi ser.

Grafer som de vi ser ovenfor, kaldes for sinuskurver.

Definition.

Ved bølgens **frekvens**, f forstår vi: Det antal hele svingninger, der forløber pr sekund.

Hvis der på 1 sekund er f svingninger, der hver varer et tidsrum på T sekunder, så får vi ligningen:

$$f \cdot T \text{ (sek)} = 1 \text{ (sek)}$$

der giver os følgende sammenhæng mellem svingningstid og frekvens:

$$f = \frac{1}{T} . \text{ Frekvensen måles i enheden Hertz (Hz) og } 1\text{Hz} = 1\text{sek}^{-1}.$$

Betragter vi stadig det faste punkt fra før, vil der i løbet af én svingningstid være "passeret en bølgelængde" igennem det. Bølgens form har med andre ord bevæget sig en bølgelængde på en svingningstid. Vi kan derfor beregne bølgens udbredelsesfart, v ved:

$$v = \frac{\text{bølgelængde}}{\text{tid}} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \frac{1}{T} = \lambda \cdot f$$

og vi får derved en af de vigtigste formler for bølgelæren:

For en bølge med udbredelsesfart v , bølgelængde λ , svingningstid T og frekvens f har vi følgende sammenhæng:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$$

Øvelse 5.2

Argumenter omhyggeligt for de ovenstående formler.

Øvelse 5.3

Lydens fart er ca. 340 m/s.

- Beregn bølgelængden for en tone med frekvensen 440 Hz
- Hvilken frekvens har en tone, hvis bølgelængden er 2,0 meter?

Mennesker kan generelt høre frekvenser mellem 20Hz og 20.000 Hz.

- Beregn længden af de korteste og længste bølgelængder, mennesker kan høre
- Find på nettet, hvilke frekvenser en hund kan høre og beregn tilsvarende den maksimale og minimale bølgelængde, en hund kan høre

Øvelse 5.4

En bølge har udbredelsesfarten $v = 2,5\text{m/s}$ og bølgelængden $\lambda = 0,65\text{m}$

- Hvor langt bevæger bølgen sig på 15 sekunder?
- Beregn bølgens frekvens.
- Beregn bølgens svingningstid.

Øvelse 5.5

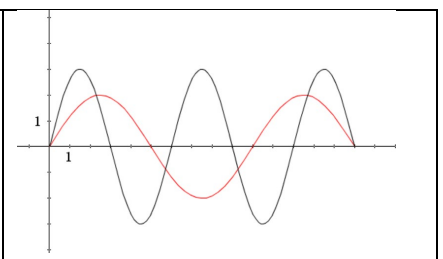
Radiobølger er ligesom lys elektromagnetisk stråling. En bestemt radiobølge har bølgelængden $\lambda = 25,0\text{ km}$ og en frekvens på $f = 12000\text{ Hz}$

- Beregn udbredelsesfarten af bølgen.
- Bestem bølgens svingningstid.
- Hvilken bølgelængde får bølgen hvis frekvensen ændres til $f = 20000\text{ Hz}$?

5.3 Interferens

Hvad sker der hvis to bølger støder sammen? Det kan man undersøge ved at sende bølger mod hinanden på en snor eller i et vandbassin. Det viser sig, at bølgernes udslag bliver lagt sammen som funktionsgrafer. Det er skitseret på figurerne her:

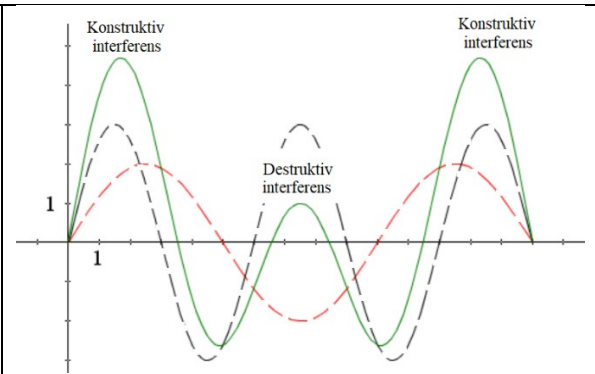
Først tegner vi bølgerne hver for sig som om den anden bølge ikke eksisterede.



Så lægger vi bølgenes udslag sammen som funktioner og finder derved den bølge (vist med grønt) vi observerer i virkeligheden:

De steder hvor de to oprindelige bølger har udslag til samme side vil de derfor **forstærke** hinanden og give et samlet højere udslag i den bølge vi rent faktisk ser. Det kalder vi **konstruktiv interferens**.

Omvendt vil de to bølger **svække** hinanden så den resulterende bølges udslag bliver mindre, når de to oprindelige bølger har udslag i modsat retning. Dette kalder vi **destruktiv interferens**.



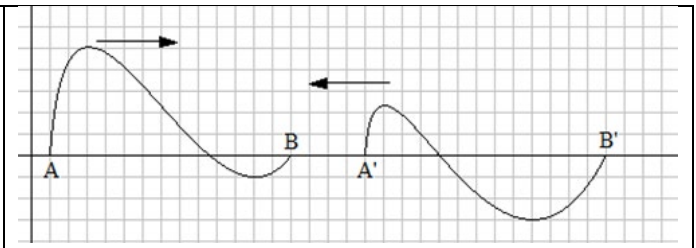
Dette vigtige princip, at den bølge, man observerer, fremkommer ved at lægge alle bølgeudslagene sammen, giver anledning til at indføre følgende betegnelse:

Superpositionsprincippet: Når en eller flere bølger støder sammen bliver det totale udslag i mediet i hvert punkt lig med summen på det pågældende sted af de enkelte bølgers udslag. Når bølgerne på denne måde påvirker hinanden og skaber en "sumbølge" siger man, at der er interferens.

Øvelse 5.6

På figuren er vist to bølger, der møder hinanden på en snor. På et tidspunkt vil de to bølger "være inde i hinanden" så A' ligger oven i A og B' ligger oven i B.

- Find ved hjælp af superpositionsprincippet det resulterende udslag af snoren i forskellige punkter i denne situation og tegn den bølge der fremkommer.
- I hvilke punkter er der hhv. konstruktiv og/eller destruktiv interferens?

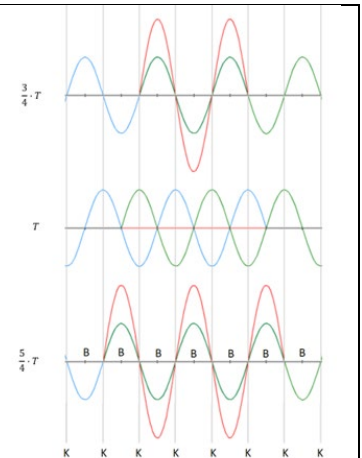
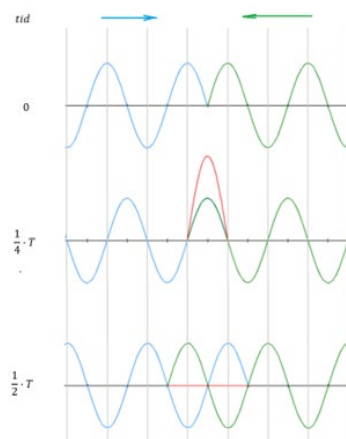


5.4 Stående bølger

Hvad sker der, hvis vi sender to bølger med samme bølgelængde og samme amplitude imod hinanden, f.eks. på vores tøjsnor? Vi kan prøve at analysere situationen ved hjælp af vores superpositionsprincip. Interferensen er her vist til forskellige tidspunkter.

De to udsendte bølger er vist med grønt og blå og den resulterende bølge er vist med rødt

Begge bølger har perioden T og bølgelængden λ .

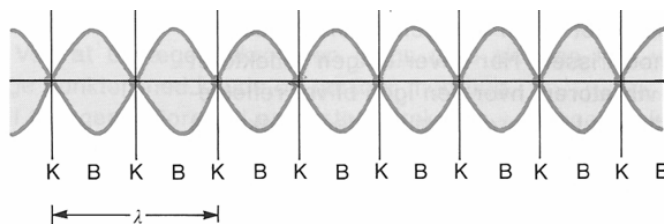


Punkterne markeret med K og med B er forklaret nedenfor.

Den resulterende bølge er det, vi kalder en stående bølge (eller svingning), der nærmest har form som en "fletning" af bølger:

Vi ser, at i punkter markeret med K, vil det totale udsving hele tiden være 0. Disse punkter kaldes *knudepunkter* og bevæger sig altså slet ikke. I punkter markeret med B vil der være maksimalt udsving. Vi siger, at der her er *bug*. Resultatet af de to bølgers interferens kaldes en *stående bølge*, fordi knuderne og bugene ikke flytter sig, men bliver på samme sted hele tiden.

Afstanden mellem to på hinanden følgende punkter med bug er den samme som afstanden mellem to knudepunkter.



Af figuren ses, at denne afstand er det samme som en halv bølgelængde: $BB = KK = \frac{1}{2} \lambda$

Øvelse 5.7

På en guitar er længden af en streng $l = 65,3$ cm, og strengens grundfrekvens er $f_0 = 300$ Hz

- Bestem bølgehastigheden v på strengen
- Bestem bølgelængderne λ_n af de mulige stående bølger på denne streng

Nu trykkes strengen ned, så længden af den svingende del af strengen kun er 42,7 cm

- Beregn frekvensen af grundtonen på den forkortede streng

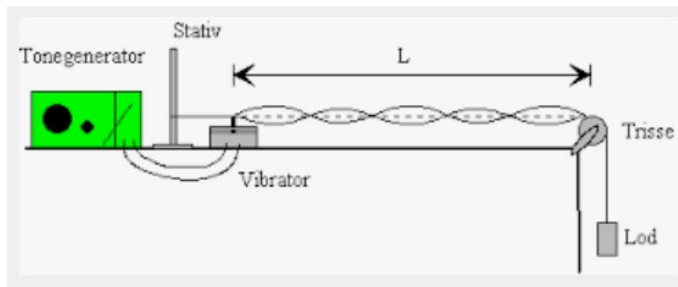
5.5 Eksperiment: Refleksion og resonans

Når en bølge når til en forhindring eller grænse for sit medium, vil en del af energien fra bølgen reflekteres tilbage som en ny bølge i mediet, den kom fra. Det ser vi f.eks., når elektromagnetiske bølger (lys) rammer en genstand som lyset ikke kan gå igennem, men det sker også når f.eks. vibrationer på en stang (som jo bare er bølger) eller vores snorbølger når til enden af stangen eller snoren. Eller når svingninger på en plade når til pladens rand og reflekteres tilbage i pladen, hvor den kom fra.

I sådan nogle situationer vil der være mulighed for, at den reflekterede bølge kan danne en stående bølge med den bølge, der stadig er på vej hen mod den ende, hvor refleksionen skete. Og hvis der nu sker refleksioner fra begge ender af snoren, vil der være mulighed for, at bølgen kan løbe frem og tilbage og forstærkes mange gange. Vi kalder dette fænomen for resonans. Resonans kan resultere i, at bølgen på et tidspunkt bliver så kraftig, at snoren eller pladen går i stykker. Men det sker heldigvis ikke altid. Det er fænomener som disse, man undersøger med Termas rystemaskine, for at sikre sig, at de enkelte dele ikke går i stykker.

Vi skal i det følgende lille eksperiment se nærmere på, hvordan fænomenet kan opstå, når vi udsender bølger på en snor, der er fastspændt i begge ender. Fra et fast startsted sendes vedblivende harmoniske bølger fra venstre mod højre. Når de når snorens endepunkt, reflekteres de tilbage mod de indkommende bølger. Man har således to bølger med samme frekvens og bølgelængde der sendes mod hinanden – se figuren:

Når den reflekterede bølge kommer tilbage til sit startsted, vil den igen reflekteres og gå mod højre. Hvis bølgens frekvens lige præcis er afpasset, så den nu svinger i takt med den bølge, der hele tiden udsendes fra startstedet, så vil alle de reflekterede bølger svinge i takt. Ved at anvende superpositionsprincippet indser man, at man får en kraftig forstærkning af den stående bølge.



De særligt tilpassede frekvenser, hvor den stående bølge forstærkes på denne måde, kaldes **resonansfrekvenser**, og forstærkningsfænomenet som helhed kaldes **resonans**. Den fremkomne stående bølge vil have knude både ved startstedet og ved snorens endepunkt. Snoren vil være opdelt i en række knudepunkter og afstanden mellem disse er halvdelen af en bølgelængde. Betingelsen for resonansfænomenet er altså, at snorens længde er et helt antal gange den halve bølgelængde:

$$L = n \cdot \frac{\lambda_n}{2} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

hvor λ_n er resonansbølgelængden. Da bølgens fart ifølge formlen vid udledte ovenfor (s. 52) er frekvens gange bølgelængde, kan denne beregnes ud fra resonanserne ved:

$$v = \lambda_n \cdot f_n$$

Formål med forsøget:

Vi vil prøve at finde resonansfrekvenserne for de stående bølger på snoren, samt at beregne hastigheden for snorbølgerne.

Udførsel:

Forsøget opstilles, og længden L af den svingende del af snoren måles. I praksis finder man resonansfrekvenserne ved langsomt at øge frekvensen på tonegeneratoren, indtil bølgen begynder at svinge voldsomt. Når man har fundet en given resonansfrekvens, tæller man antallet af knuder fra vibratoren over til snorens endepunkt. Ud fra dette kan længden af resonansbølgelængden beregnes. Herefter kan bølgens hastighed beregnes. Udfyld et skema som følgende:

Snorens længde: $L = \underline{\hspace{2cm}}$ m

Resonansfrekvens/ Hz	Antal halve bølgelængder	Resonansbølgelængde/ m	Bølgens fart (m/s) $v = \lambda_n f_n$
	1		
	2		
	...		

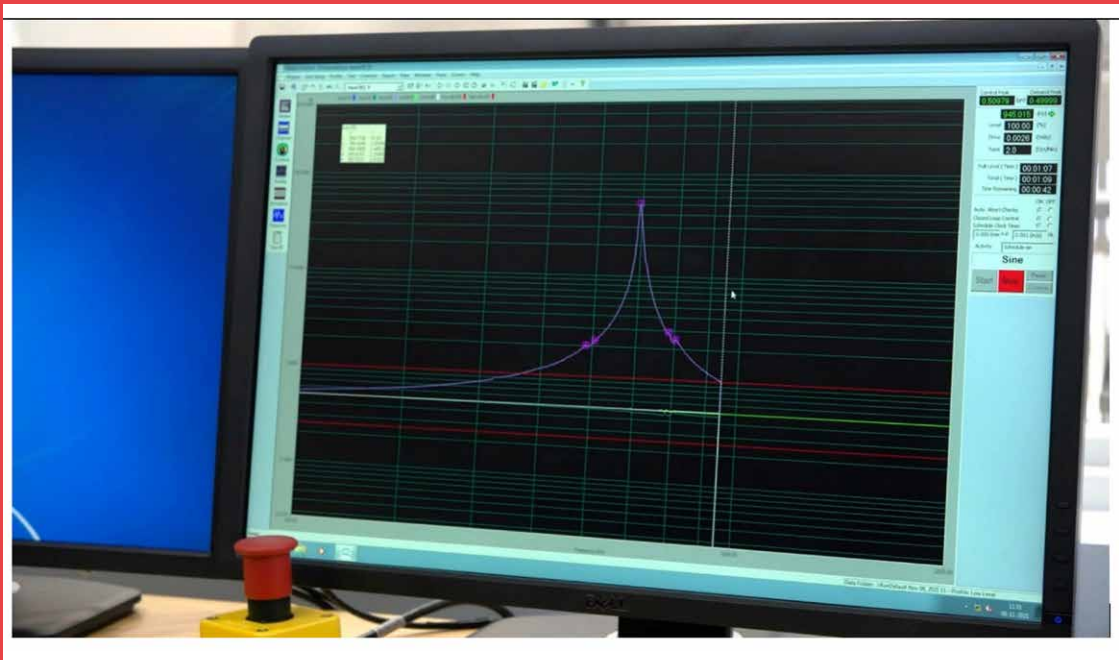
Spørgsmål:

- Afhænger bølgens fart af frekvensen?
- Hvad vil du gætte på bølgens fart afhænger af?
- Afprøv det eksperimentelt! Passede din formodning?

Resonansfænomener er helt centrale i både de teoretiske og praktiske undersøgelser på Terma. Det ser vi i filmen, og teorien behandles i det kommende kapitel.

6.

Modellering af svingninger med sinusfunktioner – 1



I filmen overværer vi afprøvning af, om et stjernekamera kan klare de ekstreme rystelser, det bliver udsat for under en raketopsendelse. Undersøgelsen resulterer i en stor mængde data, som Jan derefter henter ind i sin computer og analyserer. Forud har Termas ingeniører regnet teoretisk på, hvordan emnet – her stjerne-kameraet – vil reagere, når der skrues op for rystemaskinens frekvens. I dette kapitel sammenligner vi den teoretiske model, der kommer via løsning af en anden ordens differentiaalligning, med de empiriske data.

6. Modellering af svingninger med sinusfunktioner – 1

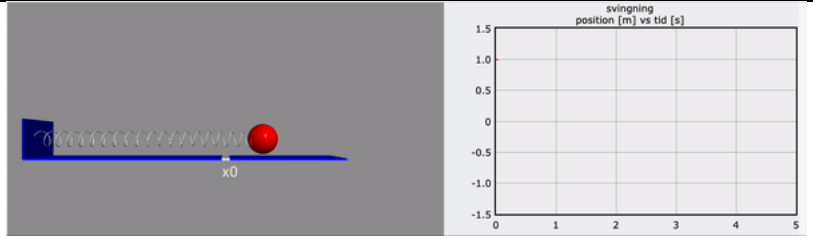
6.1 Termas rystemaskine

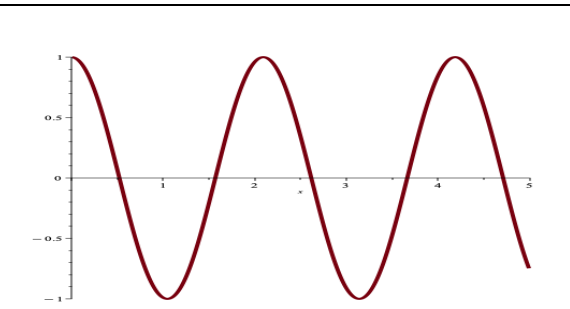
En raketopsendelse er bogstaveligt talt en rystende oplevelse for mennesker og maskiner. For at teste om Termas udstyr kan klare en opsendelse bruger de en rystemaskine. Formålet er at undersøge egenfrekvenser for de komponenter de vil sende i rummet. Egenfrekvensen er den frekvens et objekt svinger med hvis man evt. slår på det. Mange musikinstrumenter bruger det dette, en stemmegaffel eller en guitarstreng svinger med en egenfrekvens når den bliver anslået. Andre instrumenter som et bækket eller en tromme har ikke lige så tydelige egenfrekvenser, men hvis man påvirker dem med den rigtige frekvens (den rigtige tone) kan man høre at de ringer med. Hvis man påvirker et system med samme frekvens som egenfrekvensen kan systemet begynde at svinge, nogle gange voldsommere og voldsommere. Et simpelt eksempel er en gyngesving hvor man kan få den til at svinge hvis man skubber til den med det rigtige interval, altså med den rigtige frekvens.

Rigtigt mange ting vil vi ikke have til at svinge eller stå og ryste. Det gælder derfor om ikke at påvirke dem med egenfrekvensen. Det er også muligt at systemet af sig selv selv dæmper svingningerne. Hvis der er meget friktion i systemet vil det ofte ikke være muligt at sætte det i svingninger, du kan prøve at lave svingninger i sirup eller for din pude.

6.2 Opstilling af en matematisk model

Vi skal prøve at lave ovenstående betragtninger til en matematisk model. For at gøre det konkret vil vi se på et lod og en fjeder. Selvom vi bruger dette eksempel, vil resultaterne være helt generelle og de kan bruges på næsten alt som vibrerer.

<p>Animationen i figuren viser et lod og en fjeder, hvor loddet som udgangspunkt er trukket væk fra ligevægspositionen, x_0, slippes til tiden 0, og derefter svinger omkring x_0.</p> <p>Til højre er den tilhørende (tid, position)-graf.</p>	 <p>The diagram shows a red mass on a blue spring on a horizontal surface. A vertical line marks the equilibrium position x_0. To the right is a graph titled "svingning position [m] vs tid [s]". The y-axis ranges from -1.5 to 1.5 with increments of 0.5. The x-axis ranges from 0 to 5 with increments of 1. The graph shows a cosine wave starting at (0, 1.5).</p> <p>Animationen kan hentes her (link til 12), hvorfra den kan afspilles</p>
---	---

<p>Trigonometriske funktioner er meget anvendelige, når man ønsker at modellere noget, der svinger omkring en ligevægsposition. Det gør sig gældende her, hvor man kan se, at funktionen $f(x) = \cos(3 \cdot x)$ giver en graf, som ligner den fra simuleringen.</p> <p>Systemet med et lod og en fjeder er tilstrækkeligt simpelt til, at vi kan redegøre for alle de kræfter, der er på spil. Vi kan derved vise, at cosinusfunktionen faktisk kan beskrive bevægelsen.</p>	 <p>The graph shows a red cosine wave oscillating between y = 1 and y = -1. The x-axis is labeled from 0 to 5 with increments of 1. The y-axis is labeled from -1 to 1 with increments of 0.5.</p> <p>Grafen for funktionen $f(x) = \cos(3 \cdot x)$</p>
---	---

Vi opstiller nu en model for loddets bevægelse. Hvis vi forsøger at strække en fjeder eller at presse den sammen, siger erfaringen, at vi vil møde en modstand. Denne kraft F , er ifølge Hooke's lov proportional med hvor langt fjederen er strakt eller presset stykket x væk fra ligevægspositionen:

$$F = -k \cdot x$$

hvor k kaldes fjederkonstanten. Den er bestemt af, hvor stiv fjederen er.

Fortegnet skyldes at kraften virker modsat den retning, vi prøver at tvinge fjederen i.

Ifølge Newtons 2. lov er kraften proportional med massen m og accelerationen, a :

$$F = m \cdot a.$$

De to ligninger giver nu første version af bevægelsesligningen for et lod, der svinger op og ned:

$$m \cdot a = -k \cdot x \quad (*)$$

Accelerationen er ændringen i hastigheden, v og hastigheden er ændringen i positionen x .

Ændringer er matematisk set differentialkvotienter, så det kan formaliseres med differentialregning:

$$a = v' \text{ og } v = x' \text{ giver:}$$

$$a = x''$$

Vi indsætter i bevægelsesligningen (*):

$$m \cdot x'' = -k \cdot x, \text{ og omskriver:}$$

$$x'' = -\frac{k}{m} \cdot x \quad (**)$$

Dette er en 2. ordens differentiaalligning, og vi bruger intuitionen fra simuleringen til at gætte en løsning.

Øvelse 6.1

Vi betragter positionen som værende en funktion af tiden så $f(t) = x$. Vi gætter på, at løsningen til differentiaalligningen er en funktion af formen: $f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t)$, hvor ω , der svarer til tallet 3 i eksempler ovenfor, kaldes for vinkelfrekvensen.

- Differentier funktionen og indsæt i 2. ordens differentiaalligningen.
- Vis, at $f(t)$ er en løsning, netop hvis $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
- Beskriv, hvad der sker med vinkelfrekvensen når hhv. fjederkonstanten bliver større / mindre og når loddets masse bliver større / mindre. Husk variabelkontrol!

Perioden T defineres som den tid, det tager før loddet kommer tilbage til udgangspunktet.

- Vis, at $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$. (Hint: Tænk på, hvad perioden er for cosinusfunktionen)
- Undersøg, hvordan perioden afhænger af fjederkonstanten og loddets masse.

Øvelse 6.2

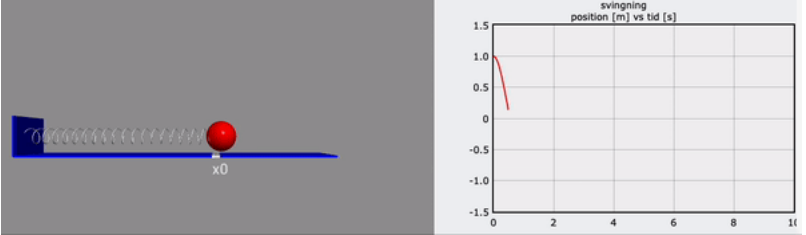
I Øvelsen ovenfor så vi ved at gøre prøve, at funktionen $f(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t)$ er en løsning til differentiaalligningen (**). Men det er klart, at det ikke kan være hele historien: Disse løsninger har alle startværdi a til tiden $t = 0$. Men tidsmålingen kan jo være fastsat af andre elementer i et forsøg, så vi må have muligheden for andre værdier til $t = 0$.

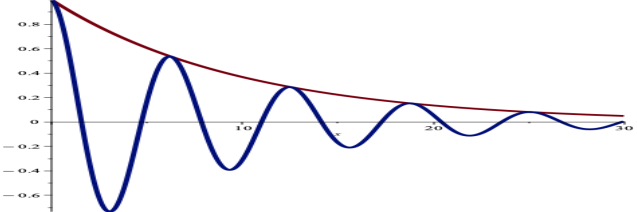
- Vis, at funktionen $g(t) = b \cdot \sin(\omega \cdot t)$ også er en løsning, igen hvis $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
- Vis helt generelt, at hvis to funktioner, $h_1(t)$ og $h_2(t)$ begge er løsninger til differentiaalligningen: $y'' = -k \cdot y$, så er også $h(t) = a \cdot h_1(t) + b \cdot h_2(t)$ en løsning (Hint: Opskriv de to ligninger, der udtrykker, at $h_1(t)$ og $h_2(t)$ hver for sig er en løsning, og adder dem).
 $h(t) = a \cdot h_1(t) + b \cdot h_2(t)$ kaldes en *linearkombination* af de to funktioner.

Vi har altså nu vist, at alle funktioner af formen $h(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)$ er løsninger til differentialligningen (**). Man kan vise, at hermed har vi også alle de mulige løsninger, dvs. dette er *den fuldstændige løsning*. Du kan finde beviset for dette [her-link til 13](#).

6.2.1 Friktion

Som vi så af animationen i starten af afsnit 6, bliver loddet ved med at svinge, når det er sat igang. Men sådan er virkeligheden jo ikke.

<p>Hvis vi introducerer noget <i>friktion</i> i systemet, vil bevægelsen blive mindre og mindre og til sidst stoppe. Vi kalder dette for en <i>dæmpet svingning</i>. Animationen her viser et lod som svinger med dæmpning. Til højre er den tilhørende (tid, position)-graf.</p>	 <p>Animationen kan hentes her (link til 14), hvorfra den kan afspilles</p>
---	---

<p>Det ses at systemet bevæger sig mod ligevægt når vi introducerer dæmpning. Vi opstiller igen differentialligningen, der beskriver loddets bevægelse. Alt efter det fysiske system er der mange former for dæmpning. Her antager vi at dæmpningen er proportional med hastigheden.</p>	 <p>Grafen for funktionen $f(x) = e^{-x} \cdot \cos(x)$</p>
--	---

Udgangspunktet er differentialligningen, der kombinerer Newtons anden lov med Hookes lov:

$$m \cdot x'' = -k \cdot x$$

Vi introducerer nu et led $d \cdot x'$, der repræsenterer gnidningskraften, i differentialligningen.

Den samlede model bliver:

$$m \cdot x'' = -k \cdot x - d \cdot x',$$

hvor fortegnet skyldes at gnidningskraften virker modsat den retning, vi prøver at tvinge fjederen i.

En lille omskrivning giver nu differentialligningen

$$x'' + \frac{d}{m} \cdot x' + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

Øvelse 6.3

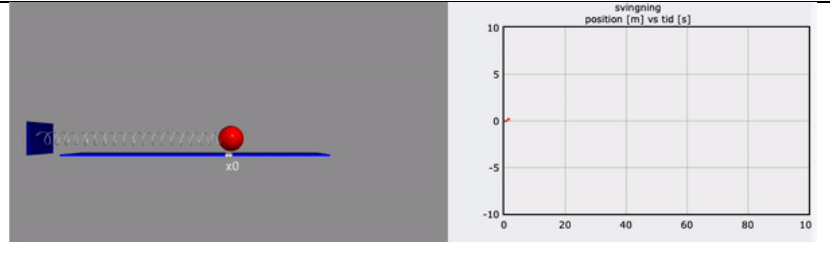
- Find løsningen til 2. ordens differentialligningen med brug af dit værktøjsprogram.
- Undersøg, hvad konstanterne skal være, for at løsningen ligner simuleringen.

Du kan [her-link til 15](#) finde en udledning af den fuldstændige løsning til denne homogene lineære 2. ordens differentialligning. *Homogen* betyder, at alle led indeholder den ubekendte funktion.

6.2.2 Tvungen svingning

Hvis svingende systemer påvirkes af en ekstern kraft, giver dette anledning til såkaldte *tvungne svingninger*. Hvis denne kraft er periodisk, vil den ofte kunne modelleres med en cosinusfunktion.

Animationen viser samme system som ovenfor med et lod og en fjeder, men pladen fjederen sidder fast på bevæger sig nu frem og tilbage. Det er et eksempel på at lodet påvirkes af periodisk kraft.



Den matematiske model for en tvungen svingning, hvor den eksterne kraft er periodisk, er:

$$m \cdot x'' + d \cdot x' + k \cdot x = F \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Det nye er leddet til højre for lighedstegnet som nu driver systemet med en frekvens ν , der er bestemt af parameteren ω ud fra formlen: $2\pi \cdot \nu = \omega$. Dette kaldes en *inhomogen* lineær 2. ordens differentiaalligning, og den er betydeligt sværere at løse end den homogene.

Øvelse 6.4

Før vi kaster os ud i at bestemme løsningen til denne differentiaalligning, skal vi opbygge lidt intuition om systemet. Det gør vi ved at eksperimentere med de tre animationer. Du kan finde dem på denne hjemmeside: <https://github.com/mpsteenstrup/Simulieringer>. Er der problemer med at få dette til at virke, kan du gå vis dette dokument: [link til 16](#).

I den tredje af dem kan du styre frekvensen og dæmpningen i systemet.

- Undersøg, hvad der sker med systemet, når frekvensen ændres. Du skal vente til systemet har fundet en ny ligevægt, hvor amplituden ikke ændrer sig mere.
- Prøv, om du kan finde resonansfrekvensen, når dæmpningen sættes til nul.

Hvis du ikke rammer resonansfrekvensen, vil du få en opførsel, hvor udsvingene vokser og aftager periodisk.

- Undersøg opførslen ved resonans ved at bruge knappen "resonans og ingen dæmpning".
- Undersøg, hvad dæmpning selv gør ved resonans.

6.2.3 Projekt: Den fuldstændige løsning til den inhomogene lineære 2. ordens differentiaalligning

Analysen af datamaterialet i afsnit 6.3 kan godt gennemføres, uden at man har bevist løsningsformlen i dette afsnit

Den inhomogene lineære andenordens differentiaalligning kan løses med en ret kompliceret formel. Det er gennemgået i et projekt i HEM, du kan finde [her-link til 17](#).

Men der findes en metode, som i første omgang måske virker lidt obskur, fordi den bygger på at gætte sig frem, men som normalt er mere effektiv og mindre tidkrævende.

Gættemetoden

Lad os betragte en inhomogen lineær differentiaalligning (1) og den tilsvarende homogene (2):

$$y'' + by' + cy = f(t) \quad (1) \qquad y'' + by' + cy = 0 \quad (2)$$

Ideen er, at vi *gætter* én løsning til (1) og bestemmer *den fuldstændige løsning* til (2), og så argumenterer for, at kombinationen af disse to vil give os *den fuldstændige løsning* til (1)!

Når vi taler om at »gætte« er der selvfølgelig ikke tale om vilde gæt, men kvalificerede gæt som umiddelbart afprøves.

Men hvordan kan vi være sikre på at finde alle løsninger, når vi bare gætter? Kunne der ikke være flere, som vi bare overser?

Metodens anvendelighed bygger på følgende iagttagelser:

Øvelse 6.5

- Vis, at hvis y og z er løsninger til den inhomogene ligning (1), så er funktionen $y - z$ en løsning til den tilsvarende homogene ligning (2).
- Vis, at hvis $h(t)$ er en løsning til den inhomogene ligning (1), og y er en løsning til den tilsvarende homogene ligning (2), så er funktionen $y + h(t)$ også en løsning til den inhomogene.
- Sammenfat a) og b) i følgende:

Sætning 1

Lad $h(t)$ være en vilkårlig løsning til den inhomogene ligning, så består den fuldstændige løsning hertil af samtlige funktioner $h(t) + y$, hvor y gennemløber den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning.

Så i al korthed er teknikken følgende: Gæt én løsning $h(t)$ til den inhomogene ligning, og find den fuldstændige løsning til den homogene ligning. Den fuldstændige løsning til den inhomogene består da af samtlige funktioner, der kan skrives som summen af $h(t)$ og én fra den fuldstændige løsning til den homogene. Dette er demonstreret samtidig med, at der gennemføres en detaljeret analyse af et bestemt svingningsfænomen, nemlig det faretruende brokollaps af den såkaldte Millennium-bridge i London, en analyse, du kan finde [her-link til 18](#)

6.3 Projekt: Databehandling med inddragelse af regression

Det maksimale udsving, der også betegnes **amplituden**, er i normale situationer en konstant. Men tvungne svingninger er ikke normale svingningssituationer, og i sådanne tilfælde er amplituden en *funktion* af den påtrykte ydre frekvens. Hvis differentiaalligningen er:

$$m \cdot x'' + d \cdot x' + k \cdot x = F \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

så er *amplitudefunktionen*:

$$f(\omega) = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{d}{m}\right)^2 \cdot \omega^2}}$$

Dette kan du finde en redegørelse for [her-link til 18](#). Her vil vi undersøge, hvad udtrykket for $f(\omega)$ kan fortælle om svingningerne, om hvor der er maksimalt udsving, og hvor stort dette vil være.

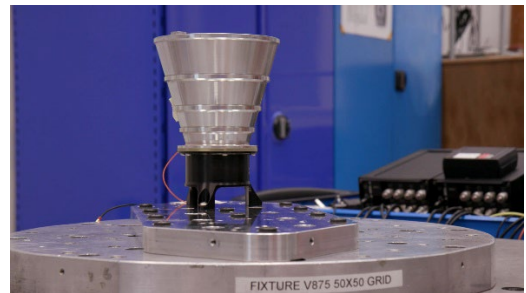
Når Terma undersøger deres apparater i rystemaskinen, sker det ved at skrue på rystemaskinens *frekvens* ν , og samtidig måle på størrelsen af den tilsvarende *amplitude* for de svingninger, der sættes igang i apparatet. Når der skrues på frekvensen, skrues der også på parameteren ω , idet de to er forbundet via formlen: $2\pi \cdot \nu = \omega$.

Målet er dels at bestemme *resonansværdien* for ω og *resonansfrekvensen* for apparatet, og dels at undersøge, om denne ligger inden for, hvad der kan forekomme ved raketopsendelsen.

Før forsøget har Terma foretaget en teoretisk beregning af, hvilken resonansfrekvens, de forventer. Resultatet af forsøget skal gerne vise, at *den teoretiske beregning* og *den eksperimentelle bestemmelse* af resonansfrekvensen stemmer overens.

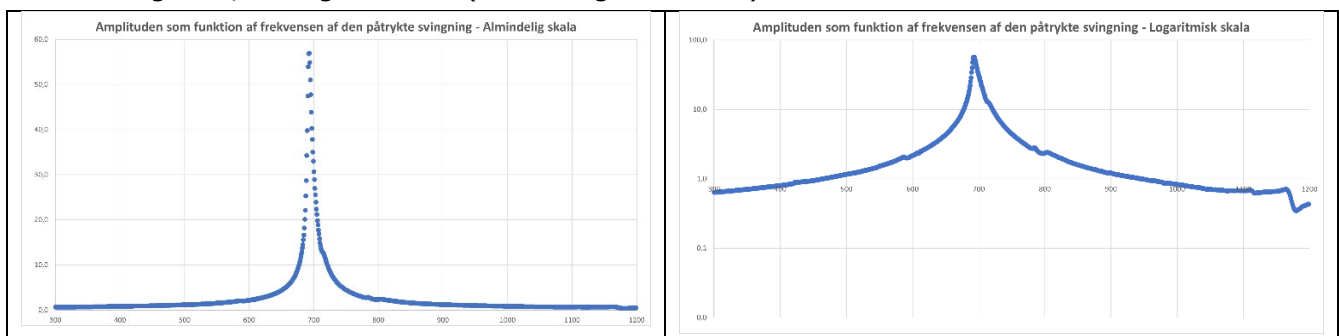
Vi vil nu gå i deres fodspor: Hent [her-link til 19](#) data fra det forsøg, vi ser demonstreret i filmen, hvor Termas rystebord blev anvendt til at undersøge, hvordan et bestemt emne klarer belastningen.

Data ligger i et excel-ark. Du kan arbejde videre her eller lægge data ind i dit eget værktøjsprogram. Fremstil nu et grafisk billede af data, først i almindeligt koordinatsystem, så i et logaritmisk.



Termas rystemaskine parat til at teste et kamera

Du skal få grafer, der ligner disse (der er tegnet i Excel):



Sammenlign med den graf, der blev tegnet på skærmen i filmen, og som er gengivet s. 56.

Øvelse 6.6

- Bestem resonansfrekvensen grafisk.
- Bestem den tilsvarende resonansværdi for ω .

Vi vil gerne bestemme de parametre for amplitudefunktionen som passer bedst med de indsamlede data. Det gøres som altid med regression, men først omskriver funktionen til,

$$f(\omega) = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{d}{m}\right)^2 \cdot \omega^2}} = \frac{A}{\sqrt{(B - \omega^2)^2 + C \cdot \omega^2}},$$

hvor $A = \frac{F}{m}$, $B = \frac{k}{m}$ og $C = \left(\frac{d}{m}\right)^2$.

For at få en fornemmelse af parameterværdierne er det en fordel at plote grafen for funktionen i et interaktivt værktøj. Det kan gøres med følgende kode i Maple

$$\text{Explore} \left(\text{plot} \left(\frac{A}{\sqrt{(B - \omega^2)^2 + C \cdot \omega^2}}, \omega = 0..4 \right), A = 0..10, B = 0..10, C = 0..10, \text{placement} = \text{right} \right)$$

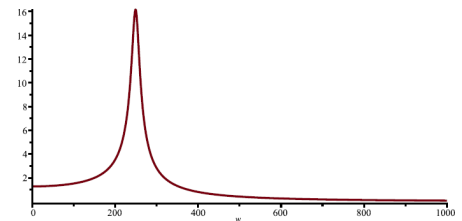
I Geogebra gøres det bare ved at skrive funktionen ind med x i stedet for omega.

Øvelse 6.7

- a) Start din undersøgelse med parameterverdier af nævnte størrelsesorden. Giv en første beskrivelse med ord af betydningen af parameterverdierne for grafens udseende.

Vi så i Termas undersøgelse, at frekvensen langsomt blev skruet op i hundrederne, dvs ω kommer op i tusinderne.

- b) Lad nu ω løbe op til 1000 og skru op for parameterverdierne, fx som angivet nedenfor. Kan du frembringe en graf der ligner denne?
- c) Lad ω løbe op til 5000. Kan du finde værdier af A og B , så maksimum bliver i nærheden af 60?



$$\text{Explore} \left(\text{plot} \left(\frac{A}{\sqrt{(B - w^2)^2 + C \cdot w^2}}, w = 0 .. 1000 \right), A = 0 .. 100000, B = 0 .. 100000, C = 0 .. 1000 \right)$$

Vi skal nu estimere parametrene A , B og C . Dette er en ikke-lineær funktion, og der er forskellige metode til at lave regressionen. Fælles for dem alle er, at de minimerer summen af kvadratafstanden mellem modellens forudsigelser og data:

$$S = \sum_{n=1}^N (y_n - \bar{y})^2, \text{ hvor } y_n \text{ er det } n\text{'te datapunkt, og } \bar{y} \text{ er modelforudsigelsen.}$$

Ved ikke-lineære modeller er det ofte nødvendigt at give gode startværdier for parametrene for at algoritmerne kan finde de optimale parameterverdier.

Øvelse 6.7 fortæller, at med $A=300\ 000$, $B=500\ 000$ og $C = 50$ har vi et godt udgangspunkt for at lave regression.

Øvelse 6.8

- a) Lav regression med disse startværdier. I Maple gøres det sådan, *with(statistics)* :

$$f := \text{NonlinearFit} \left(\frac{A}{\sqrt{(B - k^2)^2 + C \cdot k^2}}, \text{data}, k, \text{initialvalues} = [A = 300000, B = 500000, C = 50] \right)$$

- b) Plot modellen og data i samme koordinatsystem.
- c) Antag, at massen er $m = 1\text{ kg}$, og bestem F , k , d .
- d) Argumenter for, at systemet er meget stift og har en høj grad af dæmpning.
- e) Argumenter for, hvad det betyder for systemet ved en opsendelse.

Det kan virke voldsomt at ryste sit udstyr sådan, men det er selvfølgelig meget vigtigt at finde fejl og svagheder, før udstyr bliver sendt i rummet.

7.

Modellering af svingninger med sinusfunktioner – 2



Bølgefænomener optræder overalt omkring os, i det nære med tidevandets rytme, i det fjerne solsystem med fx månens bevægelse omkring deres moderplanet og i de dramatiske jordskælv, der kan få alt til at ryste. Og alle fænomener modelleres ved hjælp af sinusfunktionen. I dette kapitel lægges der op til at gå i Galileis fodspor i undersøgelsen af månens Callistos bevægelse om Jupiter ud fra Galileis data. Og der er muligheder for at fordybe sig i den matematiske beskrivelse af jordskælv, eller dykke ned i den særlige analyse af tidevandsbevægelserne i det britiske imperiums havne rundt om på kloden, som lord Kelvin gennemførte.

7. Modellering af svingninger med sinusfunktioner - 2

7.1 Case: Callistos omløbstid bestemt ved sinus regression

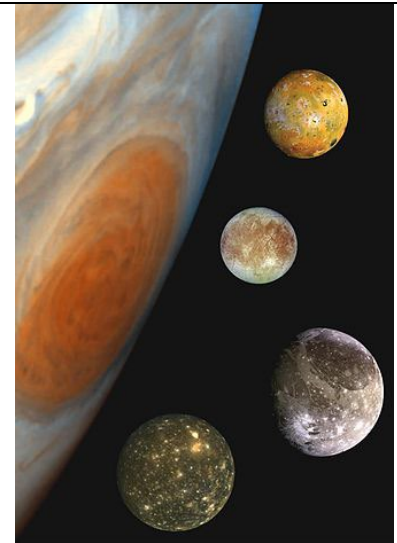
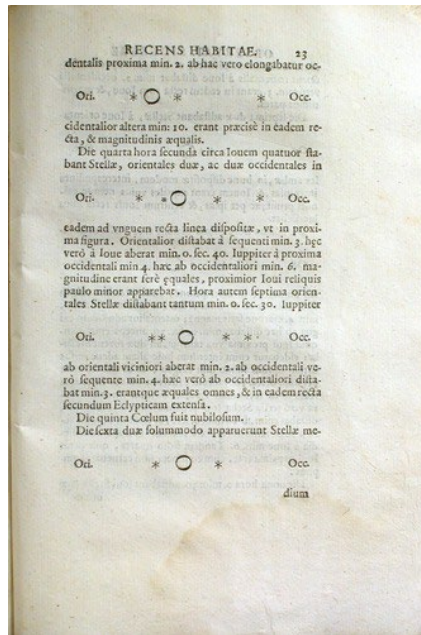
Det følgende er hentet fra HEM3, hvor det er projekt 1.7. I projekt 10.5, Galileis opdagelse af Jupitersystemet, er der en mere omfattende gennemgang af Galileis metoder, hvor der læses et stort uddrag af den danske oversættelse af det kildeskrift, *Budskabet om stjernerne (Siderius Nuncius)* hvor Galilei for første gang fortæller verden om, at han har set himmellegemer, der ikke kredser om Solen

Planeternes og deres måners bevægelser i solsystemet foregår stort set i samme plan, det man kalder ekliptika. Alle bevægelser foregår i ellipser, men de fleste er tæt på at være cirkulære. Når vi betragter en måne, der bevæger sig om en planet, som fx Jupiter, så ser vi altså ikke bevægelsen som en cirkel – i så fald skulle vi befinde os lodret over Jupiters nordpol. Vi ser den fra siden.

Men hvordan kan vi så være sikre på, at det er cirkelbevægelser?

Galilei var den første, der så Jupiters måner, som han kaldte "Medici stjernerne" opkaldte efter den ledende slægt i Firenze. Kikkerten var netop blevet opfundet, og han kunne se 4 af de mange måner.

Han præsenterer sine opdagelser i et værk, han kalder *Budskabet fra Stjernerne*, og heri kan vi se den omfattende registrering af månernes bevægelser, han foretog.



Jupiter og de 4 måner, som Galilei opdagede. De relative størrelser er korrekte, placeringen er fiktiv. Fra oven er det: Io, Europa, Ganymedes og Callisto,

Han tegnede deres positioner ind hver dag, og i værket ser det fx således ud:

7-1- 1610	Ori. * * ○ * Occ.
8-1-1610	Ori. ○ * * * Occ.
9-1-1610	Overskyet!
10-1-1610	Ori. * * ○ Occ.

(Betegnelserne Ori. og Occ. står for vest og øst)

Du kan [her-link til 20](#) få adgang til hele værket i en engelsk oversættelse.

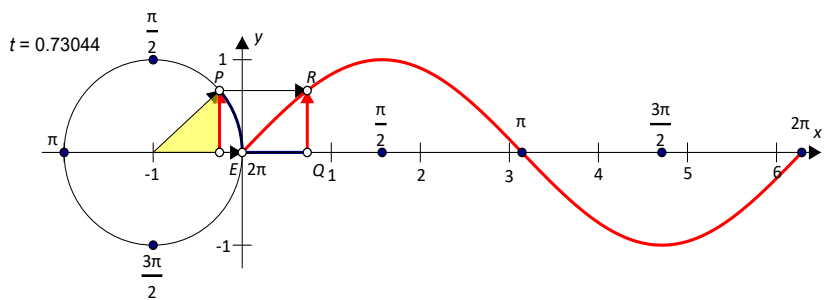
Du kan [her-link til 21](#) få adgang et uddrag af værket i en dansk oversættelse.

Han ser altså bevægelserne fra kanten.

For at forstå, hvordan en cirkelbevægelse set fra kanten ser ud, kan vi betragte følgende illustration.

Det Galilei ser, er det lodrette røde linjestykke i cirklen.

Forestil dig, du står langt ude på x-aksens positive del, og ser tilbage på cirklen. Når månen bevæger sig rundt, vil det røde linjestykke vokse op til sit maksimale udsving, og derefter blive mindre, indtil det vokser op til den modsatte side.



Antag radius er 1. Så er længden af det røde linjestykke præcis lig med sinus til vinklen. Fører vi det røde linjestykke ind på x-aksen og lader det bevæge sig jævnt fremad som tiden går, så vil spidsen af det tegne en sinuskurve. Men her har vi måske også et værktøj til at undersøge disse månens bevægelser nærmere.

Der findes websites, hvor man selv kan generere data, men man kan også anvende denne tabel med data over månens Callistos bevægelser. Tabellen kan hentes [her-link til 22](#). Callisto er den yderste af de 4, en stor måne på størrelse med planeten Merkur.

Tid (dage)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Callistos udsving	99	182	239	262	248	199	123	28	-27	-157	-224	-260	-260	-223	-155	-65	35	129

(Udsvinget måles i en enhed der er uden betydning for opgaven).

Øvelse 7.1

- Udfør et punktplot af data over Callistos udsving. Det ligner en sinusvigning!
- Prøv at aflæse cirkatal for det maksimale og minimale udsving
- Prøv at aflæse cirkatal for perioden, dvs omløbstiden. Hvis du ikke kan se en hel svigning, kan du måske aflæse en halv svigning.
- Slå op på nettet og find det korrekte tal for Callistos omløbstid
- Udfør sinusregression på data. Resultat skal have formen:

$$y = 262.292 \cdot \sin(0.376662 \cdot x - 0.003536) + 1.58025$$

- Har du et bud på, hvad tallene 262,292 og 1,58 betyder rent grafisk?

7.2 Projekt: Jordskælv er sinusvigninger

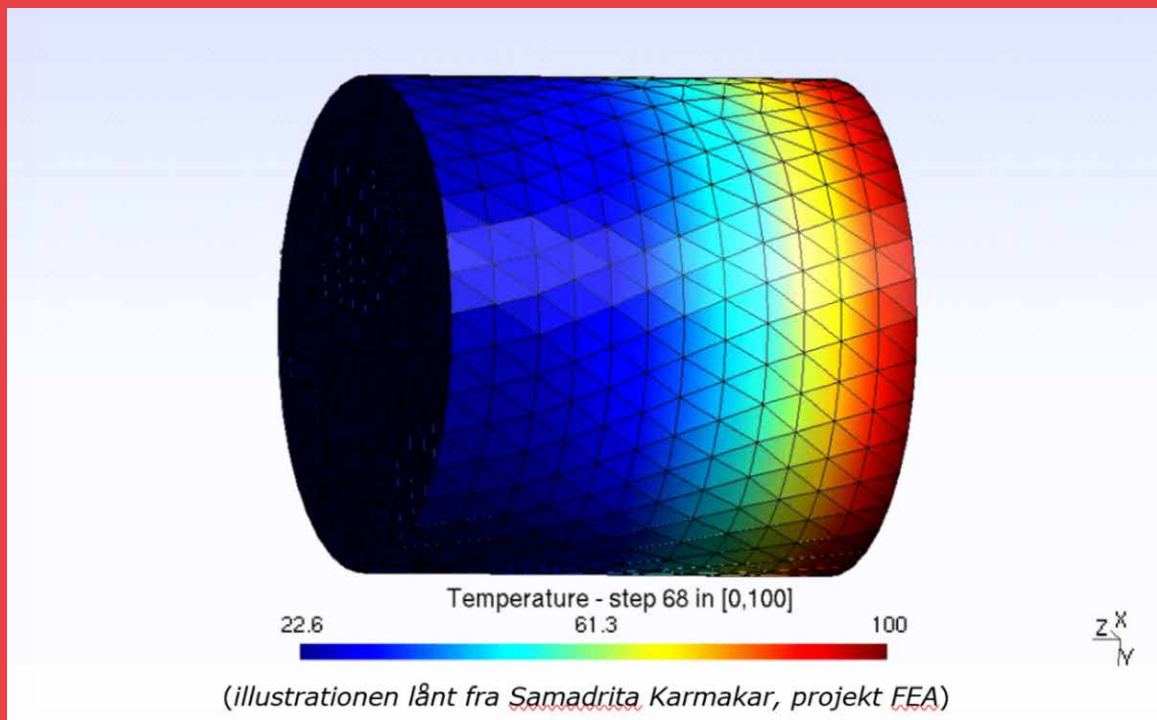
Jordskælv er komplicerede fænomener at modellere, men grundlæggende er det svigninger i undergrunden, sat i værk af pladetektonik. Derfor er det igen trigonometriske funktioner, der anvendes i modelleringen. Her er det livsnødvendigt at få styr på resonansfrekvenserne i bygninger placeret i jordskælvsområder. Det er behandlet i et projekt, lånt fra DTU, som du kan hente [her-link til 23](#)

7.3 Case: Tidevandets musik

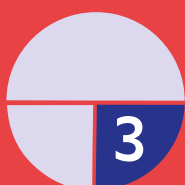
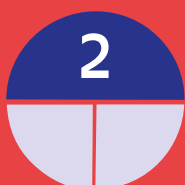
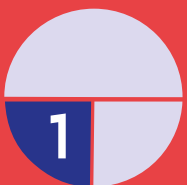
I 1800-tallet satte det engelske imperium sig for at udarbejde tabeller over tidevandsbevægelserne i alle de havne, hvor deres flåde kunne få brug for at søge tilflugt. De havde besiddelser over hele kloden, så det var et globalt projekt. Lord Kelvin blev sat i spidsen for dette storstilede projekt, og han udviklede mageløse maskiner til at analysere data og beskrive tidevandsbølgerne som en sum af sinusvigninger! Du kan hente et materiale om matematikken bag dette projekt [her-link til 24](#) – og høre tidevandssvigningerne gengivet som musik: Hver havn sin melodi! Se [her-link til 25](#)

8.

Termiske modeller – 1



I filmen forklarer Dan Bhanderi, hvorledes det tomme rum giver helt særlige udfordringer mht. opvarmning af computere og andre temperaturfølsomme instrumenter. Overskudsvarmen kan ikke transporteres væk med en blæser, men må ledes til særlige metalplader, der kaldes radiatorer, hvorfra varmen fjernes som strålevarme. Men hvordan bevæger varmeenergien sig gennem forskellige genstande? Og hvordan sikrer man, at der stråler nok varme væk fra fx ASIM? Det undersøges i dette kapitel, bla. med brug af den metode, der kaldes *finite element metoden*.



8. Termiske modeller - 1

I afsnit 8.1 anvendes udelukkende elementære energibetragtninger.

8.1 Indledende varmeberegninger for ASIM

Opvarmning: (Utsigtet opvarmning af satellitten)

Hvis effekten af computer + øvrig elektronik er 300W og det hele er tændt i en time, tilføres der:

$$\Delta E = P \cdot \Delta t = 300 \cdot 3600 J = 1080000 J = 1080 kJ$$

dvs. godt 1 MegaJoule i energi til satellitten pr. time. Det svarer til energien i en halv Rittersport i timen, så det lyder jo ikke så slemt, men hvis vi antager, at varmekapaciteten af hele satellitten er

$$250 kJ / ^\circ C \text{ giver det en temperaturstigning på: } \Delta t = \frac{1000 kJ}{250 kJ / ^\circ C} = 4^\circ C$$

Dvs. satellittens temperatur stiger altså med ca. 4°C i timen!

Varmekapaciteten har vi estimeret ud fra en vurdering af, at satellitten er en blanding af Aluminium, kobber og jern med en samlet masse lig med ASIMS. Det er ikke så afgørende, at vi kender den med stor nøjagtighed, det vi har brug for er et overslag til en vurdering af, om vi kan håndtere varmen. Det bliver altså ca. 100 grader på et døgn, så hvis vi ikke gør noget, begynder hele satellitten at smelte efter en uge!

Afkøling: (Varmen skal transporteres bort)

Normalt ville man bare sætte en ventilator ind i computeren der kunne udskifte den varme luft med ny kold luft, ligesom på gaming computeren derhjemme eller din bærbare. Men oppe i det tomme rum er der jo ingen luft at skifte ud med, så hvad gør man?

Heldigvis har vi Stefan-Boltzmanns lov der siger, at den udstrålede effekt P (ved varmestråling) fra en (radiator)flade med areal A og absolut temperatur T er

$$P = A \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot T^4 \frac{W}{m^2 K^4},$$

A står for overfladearealet af radiatoren, og den numeriske faktor er Stefan Boltzmanns konstant. Så hvis vi vil holde energitilførslen fra computeren til satellitten på 300W i skak og bevare en temperatur på omkring 300 K (ca. stuetemperatur) får vi ligningen

$$A \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (300K)^4 \frac{W}{m^2 K^4} = 300W$$

Øvelse 8.1

Isoler A i ligningen. (Du skal få $A = 0,6532 m^2$)

Her er kun regnet på udstrålingen fra satellitten, den modtager selvfølgelig også noget fra mikrobølgebaggrunden, men det er ikke ret meget ($T = 2-3 K$)

Øvelse 8.2

Hvis satellitten har et radiatorareal på $1,5 m^2$, hvor høj en computereffekt kan den så holde "i skak" ved en temperatur på 300K?

Øvelse 8.3

Hvis computereffekten er 300 W og arealet af radiatoren kun er $0,5 m^2$, hvad bliver ligevægtstemperaturen så? Dvs. hvor høj bliver temperaturen, før den udstrålede effekt også bliver 300W?

Øvelse 8.4

Hvis satellitten har et radiatorareal på $0,75 m^2$ og computeren højst kan tåle en temperatur på $75^\circ C$, hvor høj en effekt må computeren så højst have for ikke at gå i stykker?

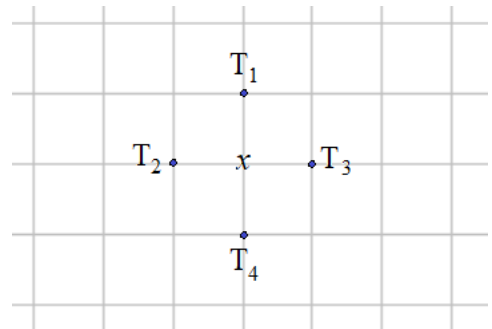
8.2 Temperaturfordelingen i en metalplade – finite element-metoden

Når man skal finde den stationære temperaturfordeling af en plade med en bestemt geometri hvor temperaturfeltet er kendt på randen, benytter man ofte idéerne i det følgende.

Øvelse 8.5

Vi betragter en plade hvor vi har indlagt et tænkt kvadratnet. I hvert af nettets skæringspunkter er der en bestemt temperatur.

Vi antager nu, at temperaturen vokser jævnt (lineært) langs alle de grå linjer i kvadratnettet – se figuren. Dvs. at temperaturen vokser med temperaturstigningen a for hvert vandret skridt, og med temperaturstigningen b for hvert lodret skridt.



- Opstil 4 ligninger, der udtrykker temperaturen x i midtpunktet ved hjælp af de 4 temperaturer T_1, T_2, T_3 og T_4 og de to temperaturgradienter a og b .
- Vis, at temperaturen x er gennemsnittet af de 4 temperaturer, uanset værdierne af a og b .

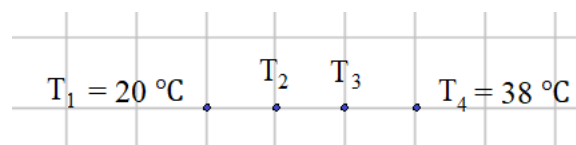
Øvelse 8.6

Vis tilsvarende resultater for 1 og 3 dimensioner

I de følgende opgaver antages det, at modellen fra opgaven ovenfor holder, altså at man under stationære temperaturforhold kan beregne temperaturen i et punkt som gennemsnittet af nabopunkternes temperaturer. I én dimension som f.eks. ved en stang eller en wire er situationen særlig simpel, da ethvert punkt kun to nabopunkter.

Øvelse 8.7

Beregn de to mellemliggende temperaturer T_2, T_3 på en stang med 4 punkter



Finite Element-metoden

Når situationen er mere kompliceret, dvs. når både randen og det indre indeholder mange flere punkter, bruger man ofte finite element-metoden. Denne kan groft beskrives således:

- 1) Først inddeler man pladen i et tænkt kvadratnet, hvor skæringspunkterne tildeles en række startværdier for temperaturen. Vi starter med at *gætte* på nogle værdier.
- 2) Temperaturerne på randen er kendt og holdes fast under hele proceduren.

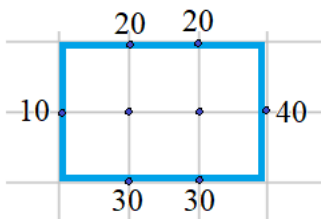
Hvis temperaturfeltet skal være stationært, må temperaturen i ethvert indre punkt på pladen være gennemsnittet af nabopunkternes temperaturer.

- 3) Beregn for hvert indre punkt gennemsnittet af nabopunkternes temperaturer.
- 4) De beregnede gennemsnitstemperaturer indsættes nu som nye startværdier.
- 5) Man fortsætter nu på denne måde, indtil alle temperaturer har stabiliseret sig.

At temperaturerne på denne måde af sig selv finder hen til stationære værdier og at proceduren ovenikøbet går hurtigt, er lidt af et mirakel. Men man kan vise matematisk (se SRP-projekt) at det faktisk er tilfældet.

Metoden kan let indarbejdes i et Excelregneark:

- 1) Først udvælger man et celleområde der har samme form som den plade man vil regne på. Det kan være en god ide at farve cellerne. I cellerne, der omkranser det orange område, indtaster man randtemperaturerne. Man kan evt. også farve disse randceller, så man får et tydeligere billede af pladen. Det kunne f.eks. se sådan her ud:



	20	20	
10			40
	30	30	

Overvej selv nøje, hvordan korrespondancen er: *Knudepunkterne* på den plade, vi undersøger korresponderer med *felder* i regnearket.

- 2) Indtast nu startværdierne, dvs dit gæt på temperaturerne, i de orange felter.
- 3) Opret derefter et område med samme form som det orange (f.eks. farvet gult), hvor man beregner de næste temperaturer ved hjælp af "gennemsnit af nabotemperaturer"-metoden.

Dette skal ske med *formler* der refererer til de orange og grønne områder, så beregningen sker automatisk. F.eks. sådan her:

Her man kan se, at cellen G12 er beregnet ud fra de nabocellerne F9, G8, H9 (der indeholder startgættet "0") og G10. Cellen H12 er udregnet på samme måde ud fra naboværdierne i cellerne H8, G9, I9 og H10. De nye temperaturer i G9 og H9 skal altså være hhv. 15 og 22,5

	<i>f_x</i>	=(F9+G8+H9+G10)/4			
	E	F	G	H	I
5					
6					
7					
8			20	20	
9		10	0	0	40
10			30	30	
11					
12		calc.	15	22,5	
13					

- 4) Nu kører proceduren: Indtast de beregnede temperaturer som nye startværdier og man får straks beregnet de næste temperaturer i de gule celler. Faktisk får man beregnet to nye temperaturer, så snart man har indtastet bare én ny, så man skal gå systematisk frem med sine indtastninger, f.eks. ved hele tiden at indtaste nye temperaturer i samme rækkefølge.

5) Efter ca. 10 indtastninger af nye temperaturer indstiller temperaturerne sig som vist her:
 Det kan godt være, at tallene ikke bliver helt så pæne, men det man skal se efter er, om de orange temperaturer *nærmer sig* nogle bestemte værdier.

		20	20	
	10	22	28	40
		30	30	
calc.		22	28	

Øvelse 8.8

Brug finite element-metoden til at finde ligevægtstemperaturerne i de orange felter

a)

		20	40	
	10	0	0	40
		10	30	

b)

		50	50	
	30	0	0	40
		-10	-10	

c)

		20	20	
	10	0	0	35
	15	0	0	40
		30	30	

d)

		10		
	25	0	25	
	45	0	0	40
		60	50	

Øvelse 8.9

Byg nu et lidt større og mere realistisk celleområde, hvor der er et eller flere varme punkter i midten og køligere på randen som f.eks.

De røde celler skal forestille varme komponenter på pladen og deres temperatur holdes også konstant. Fungerer metoden stadigvæk?

		20	30	30	20	
	20	0	0	0	0	20
	20	0	180	0	0	20
	20	0	0	0	0	20
	20	0	0	190	0	30
	20	0	0	210	0	30
	20	0	0	0	0	30
		30	40	50	40	

Sammenlign hastigheden af konvergensen her med de simple eksempler ovenfor. Et mål for hastigheden kan fx være, hvor mange gennemløb med justering af alle orange celler, de to situationer kræver hver især, før alle cifre foran kommaet har stabiliseret sig.

Øvelse 8.10

Kan du designe et simpelt fysikforsøg hvor du kan afprøve om metoden virker i praksis?

8.3 SRP ideer

Det matematiske indhold i de følgende ideer er: finite element-metoden - Lineære ligningssystemer - matrixregning - differensligninger.

Forudsætning: Man sætter sig først (måske ikke i alle detaljer) ind i regning med vektorer i \mathbf{R}^n , multiplikation af vektor med matrix, hvad er en invers matrix og hvordan kan den bruges til at løse lineære ligningssystemer (når den er defineret).

Eksempel til generalisering

I opgave a) ovenfor ser området således ud

		20	20	
	10	0	0	40
		30	30	
calc.		15	22,5	

Vores ukendte temperaturvektor er 2-dimensional og beskriver de to temperaturer t_1, t_2 i det orange område i midten efter det n 'te gennemløb: $\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} t_{1,n} \\ t_{2,n} \end{pmatrix}$. I næste trin i finite element-metoden bliver de nye temperaturer beregnet som gennemsnittet af temperaturerne i nabocellerne:

$$t_{1,n+1} = \frac{(20 + 10 + t_{2,n} + 30)}{4} = 15 + \frac{1}{4}t_{2,n} \quad \text{og} \quad t_{2,n+1} = \frac{(20 + 30 + t_{1,n} + 40)}{4} = 22,5 + \frac{1}{4}t_{1,n}$$

Men dette kan jo skrives på matrix-vektorform som:

$$\begin{pmatrix} t_{1,n+1} \\ t_{2,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 22,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{1,n} \\ t_{2,n} \end{pmatrix}$$

Så finite element-metoden kan altså skrives kompakt op som en matrix-vektor **differensligning**:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{b} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_n$$

Øvelse 8.11

Forklar, at finite element-metoden for et vilkårligt område kan beskrives rekursivt ved (matrix-vektor) differensligningen:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{b} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_n$$

hvor $\mathbf{x}_n = (x_1, x_2, \dots, x_k)_n$ er en vektor, der indeholder alle de ukendte temperaturer, \mathbf{b} er en konstant n -dimensional vektor, der er tæt knyttet til randbetingelserne (dvs. temperaturerne på randen af pladen) og \mathbf{A} er en kvadratisk $k \times k$ matrix, der er relateret til gennemsnitsberegningen af de indre temperaturer.

Øvelsen ovenover viser, at finite element-metoden kan beskrives ved en generalisering (til n dimensioner) af en lineær førsteordens differensligning:

$$x_{n+1} = ax_n + b$$

Øvelse 8.12

Vis, at hvis matricen $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ er invertibel (hvor \mathbf{I} er $k \times k$ enhedsmatricen) så har det stationære problem:

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

(altså situationen hvor temperaturerne har nået deres stationære værdier) den entydige løsning:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

Øvelse 8.13

Vis, at ligningen kun er lineær, hvis $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ (dvs. at hvis \mathbf{x}_n og \mathbf{y}_n er to temperaturvektorer der opfylder differensligningen, så vil summen $\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n$ også opfylde differensligningen og hvis k er et vilkårligt tal, så vil også $k \cdot \mathbf{x}_n$ være løsning til differensligningen).

Øvelse 8.14

Vis, at hvis matricen $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ ikke er invertibel (hvor \mathbf{I} er $k \times k$ enhedsmatricen) så har det stationære problem: $\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ uendeligt mange løsninger.

Øvelse 8.15

Find i litteraturen (f.eks. i forberedelsesmaterialet til STX-eksamen 2020) beviset for følgende sætning, og redegør for beviset:

Sætning 1

Hvis konstanten a opfylder $a \neq 0$ og $a \neq 1$, så kan løsningen til den lineære differensligning:

$$y_{n+1} = a \cdot y_n + b, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

skrives på formen:

$$y_n = a^n \cdot y_0 + b \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Øvelse 8.16

- Generaliser dette bevis til at beskrive temperaturvektoren \mathbf{x}_n for $n = 1, 2, 3, \dots$ i finite element-metoden.
- Hvad må man kræve om matricen $\mathbf{A} - \mathbf{I}$, for at få en lige så elegant løsning som vist herover?

Øvelse 8.17

Vis nu, at hvis vi antager $\mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{0}$ for $n \rightarrow \infty$ hvor $\mathbf{0}$ er $k \times k$ 0-matricen, så vil temperaturvektoren beregnet ved finite element-metoden konvergere mod den entydigt bestemte stationære løsning:

$$\mathbf{x}_n \rightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{b} \quad \text{for } n \rightarrow \infty$$

9.

Termiske modeller – 2: Varmeledningsligningen



I det område af matematisk fysik, der kaldes for termodynamik, er varmeledningsligningen helt central. Den beskriver helt generelt, hvorledes en tilført varme breder sig ud over en flade, igennem et legeme, eller gennem en stang, alt afhængig af om dimensionen er 2, 3 eller 1. I kapitel 8 undersøger vi det samme fænomen, men med en *diskret model*, der ikke kræver kendskab til differentialligninger. I dette kapitel betragter vi varmeledning som et kontinuert fænomen, og ændringen i temperaturen beskrives med differentialligninger. I vakuumkammeret, vi ser her, gennemføres en eksperimentel undersøgelse, og data sammenlignes med det, som den teoretiske analyse forudsiger.

9. Termiske modeller – 2. Varmeledningsligningen

Varmeledningsligningen beskriver, hvorledes en tilført varme breder sig i en genstand som funktion af tiden. Det er en partiel differentialligning, der er givet ved

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right),$$

hvor $T(x, y, z, t)$ er den funktion der beskriver temperaturen i ethvert punkt til ethvert tidspunkt og konstanten k er en materialekonstant, hvis størrelse afhænger af varmekapaciteten, densiteten og varmeledningsevnen for materialet.

Øvelse 9.1

Vi kigger nu på en stationær situation, dvs. en situation hvor temperaturen i ethvert punkt er konstant. Bemærk: dette betyder ikke, at der er termisk ligevægt, men blot at ethvert punkt til ethvert tidspunkt får tilført præcis lige så meget varmeenergi som det afgiver. Vi indskrænker os yderligere til at kigge på varmeledningsligningen i det én dimensionale tilfælde

- Hvad må $\frac{\partial T}{\partial t}$ være i ethvert punkt?
- Opskriv varmeledningsligningen i én dimension, så den beskriver en stationær tilstand i en stang eller wire.

Da alle temperaturerne i alle punkter på stangen er konstant må $T(x, t) = T(x)$ dvs. temperaturfunktionen er udelukkende en funktion af stedet x på stangen.

- Hvilken type funktion må $T(x)$ være?

Temperaturen i den ene ende af en 2,0 meter lang stang er 20°C og denne temperatur holdes konstant med rindende vand. Den anden ende af stangen er opvarmet til temperaturen 300°C .

- Opstil den lineære funktion der beskriver stangens temperatur som funktion af afstanden fra den ende der har temperaturen 20°C

Nu skruer vi på opvarmningen. Efter temperaturligevægt er indtrådt er temperaturen af den ende der overhældes med vand stadig 20°C , men nu er stangens temperatur steget til 110°C allerede efter de første 70 cm.

- Opstil den lineære funktion der beskriver stangens temperatur som funktion af afstanden fra den ende, der har temperaturen 20°C og beregn temperaturen i den anden ende

Øvelse 9.2

En 60 cm lang stang er placeret så den ene ende er i berøring med et isbad der har temperaturen 0°C mens den anden ende rører ved kogende vand, der har temperaturen 100°C .

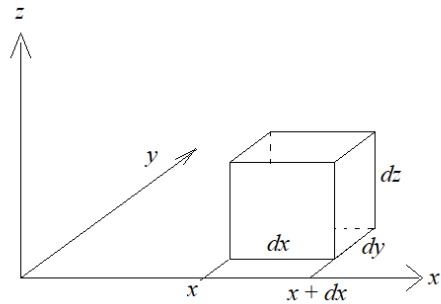
- Hvad er temperaturen i midten af stangen?
- Beregn stangens temperatur 20 cm fra isbadet
- Beregn stangens temperatur 15 cm fra den varme ende

9.1 Udledning af varmeledning ligningen

Betragt en infinitesimal kasse med kantlængder dx, dy og dz se figuren:

Temperaturen på $dy - dz$ -fladen i positionen x betegnes T . Temperaturen i position $x + dx$ kan så skrives $T(x) + \frac{\partial T}{\partial x} dx$ (argumenter for dette).

Vi undersøger varmestrømmen gennem denne flade.



Vi tager udgangspunkt i *Fouriers erfaringsætning*, der siger, at den varmemængde Q , der pr. tidsenhed passerer gennem en flade, er *proportional med fladens areal og med temperaturgradienten*:

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx}, \text{ hvor } \lambda > 0 \text{ er proportionalitetskonstanten.}$$

λ udtrykker hvor hurtigt, materialet kan transportere varmen, og betegnes varmeledningsevnen.

Overvej betydningen af minustegnet: hvis temperaturgradienten $\frac{dT}{dx}$ er positiv, hvilken retning har varmestrømmen så? Vi regner altså varmestrømmen positiv i x -aksens retning!

Vi udleder nu varmeledning ligningen gennem flere trin:

1) Brug Fouriers erfaringsætning til at udlede udtrykkene for, hvor meget varme der passerer $dy - dz$ -fladerne både ved x og ved $x + dx$:

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_x = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} = -\lambda \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{dT}{dx}$$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{x+dx} = -\lambda \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{d\left(T + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot x\right)}{dx} = -\lambda \cdot dy \cdot dz \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)$$

2) Opskriv nu udtrykket for hvor meget varme volumenelementet får tilført netto pr. tidsenhed:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_x - \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{x+dx} = \dots$$

3) Reducer højresiden. Du skal få: $\lambda \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

4) Den tilførte varme ΔQ afhænger af varmekapaciteten c , massen m og temperaturstigningen ΔT :

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T$$

Udled her ud fra formlen:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \text{ hvor } \rho \text{ massefylden af stoffet}$$

Formlen udtrykker hvilket bidrag til temperaturstigningen i et punkt, som varmestrømmen i x -aksens retning bidrager med. Overvej dette og giv en forklaring!

5) Argumenter for, at der er tilsvarende bidrag til temperaturstigningen i et punkt fra varmestrømmen i hhv. y og z retning og konkluder, at den endelige varmeledning ligning har formen:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

Øvelse 9.3 Spørgsmål til overvejelse

a) Overvej situationen hvor der er stationære temperaturforhold:

$$\left(\frac{dQ}{dt} \right)_x = \left(\frac{dQ}{dt} \right)_{x+dx}$$

- b) Hvordan ser situationen ud i det 1-dimensionelle tilfælde? Hvilken funktionstype bliver temperaturfunktionen af x
- c) Hvordan ser situationen ud i det 2-dimensionelle tilfælde? Kan du finde en funktion der opfylder den stationære ligning (det kan man forholdsvis let så længe der ikke er påtrykt nogle randbetingelser)
- d) Hvilken betydning har randbetingelserne?
- e) Er udledningen matematisk korrekt? Hvor er den lige lovlig "fysikeragtig" (husk at fysikerudledninger, der fører til en ligning, der virker og kan bruges i praksis, ikke nødvendigvis behøver at være helt matematisk velfunderede).
- f) Kan du finde på et eksperiment der kan teste varmeledningsligningen?

9.2 Projekt: Løsning af varmeledningsligningen

Projektet bygger på kendskab til: Funktioner af to variable og partielle afledte. Første og andenordensdifferentialligninger. Løsningsmetoden: Separation af de variable.

Vi betragter varmeledningsligningen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

hvor $u(x, y, z, t)$ er den funktion der beskriver temperaturen i ethvert punkt og til ethvert tidspunkt, og konstanten $k > 0$ er en materialekonstant der afhænger af varmekapaciteten, densiteten og varmeledningsevnen for materialet.

Vi skal straks indskrænke os til at kigge på det endimensionelle tilfælde, der svarer til en isoleret stang, hvor enderne enten også er isoleret eller er holdt fast ved to bestemte temperaturer. Ligningen ser i denne situation således ud:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1a}$$

Randbetingelser og begyndelsesværdier

Den funktion, vi leder efter, skal også opfylde nogle bestemte *randbetingelser*. Det betyder, at funktionsværdierne eller værdien af de afledte skal have nogle bestemte forud definerede værdier i endepunkterne af det interval, funktionen er defineret på. Og vi skal også kende en *begyndelsesværdi*, dvs løsningsfunktionens værdi til f.eks. tiden $t = 0$

Hvis vi leder efter løsninger til (1a) på intervallet $[0; L]$ kunne randbetingelserne f.eks. være

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (1b) \quad \text{og} \quad u(x, 0) = f(x) \quad (1c)$$

Disse ligninger udtrykker, at funktionen hele tiden har værdien 0 i endepunkterne af intervallet og at funktionen til starttiden $t = 0$ har forskriften $f(x)$.

Definition: Linearitet

Differentialligningen (1a) er *lineær* dvs: hvis $u(x, t)$ og $v(x, t)$ er to løsninger til (1a) og hvis c_1, c_2 er to vilkårlige konstanter, så er funktionen $c_1 \cdot u(x, t) + c_2 \cdot v(x, t)$ også løsning til (1a).

Øvelse 9.4. Vis lineariteten

Vis, at ligningen (1a) er lineær.

Bemærkning: Du skal også vise, at løsningen opfylder de randbetingelser, vi har opstillet i (1b).

Idéen i at løse (1a) er nu at udnytte denne linearitet. Vi vil først finde en række løsninger af en særlig simpel art og så bruge dem som byggeklodser eller atomer til at opbygge mere avancerede eller måske endda helt generelle løsninger til (1a). Disse "løsningsatomer" finder vi ved metoden:

Separation af de variable

Vi vil undersøge om der findes løsninger til (1a) af typen

$$u(x, t) = h(x) \cdot g(t) \quad (2)$$

Altså løsninger hvor de variable er separeret i hver sin flere gange differentiable funktion: $h(x)$, der kun er en funktion af x og $g(t)$, der kun er en funktion af t . Det er klart, at vi skal være meget heldige, hvis den løsning vi egentlig leder efter (dvs. den der **også** opfylder randbetingelserne) er af denne type, men igen er idéen, at vi kan opbygge den ønskede løsning af disse simple produktfunktioner. Vi sætter vores funktionstype (2) ind i ligning (1a) og finder

$$\frac{\partial (h(x) \cdot g(t))}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 (h(x) \cdot g(t))}{\partial x^2}$$

Øvelse 9.5 Separation i en rumligning og en tidsligning

a) Vis at differentiationen fører til ligningen:

$$h(x) \cdot g'(t) = k \cdot h''(x) \cdot g(t)$$

b) Funktionerne h og g er klart ikke nulfunktionerne. Argumenter for, at der findes et område af planen, hvor de begge er forskellig fra 0. (*hint:* begge funktioner er kontinuerte).

Vi regner i dette område og dividerer med $k \cdot h(x) \cdot g(t)$.

c) Vis, vi får:
$$\frac{g'(t)}{k \cdot g(t)} = \frac{h''(x)}{h(x)} \quad (3)$$

Bemærk nu, at venstre side kun afhænger af t og højre side kun afhænger af x . Men samtidig gælder identiteten (3) i hele det område, hvor vi regner.

d) Argumenter for, at så må begge sider være *konstant*. Kald konstanten for $-\lambda$

e) Omskriv (3) til to ordinære lineære homogene differentialligninger:

1. $g'(t) + \lambda k \cdot g(t) = 0$ (tidsligningen)

2. $h''(x) + \lambda \cdot h(x) = 0$ (rumligningen)

Vi ser, at hver differentialligning kun indeholder én variabel x eller t og den oprindeligt partielle differentialligning, der indeholdt begge variable, er altså i denne forstand "separeret". Tallet λ , der er indblandet i begge ligningerne, kaldes også for **egenværdien** for ligningerne, og som vi skal se, kan den kun antage ganske bestemte værdier, der er karakteristiske for lige præcis dét problem vi løser.

Vi løser nu de to differentialligninger uafhængigt af hinanden og multiplicerer derefter løsningerne sammen, så vi har vores **byggekloDSLøsninger** af typen (2).

9.2.1 Løsning af rumligningen

Sæt dig først (via din lærebog, eller via [dette link-15](#) til et afsnit i HEM3) ind i løsningsformlerne for homogene, lineære andenordens differentialligninger og løs så følgende:

Øvelse 9.6

- Find den generelle løsning til tidsligningen for $\lambda = 0$.
- Find den generelle løsning til rumligningen for $\lambda = 0$.

Øvelse 9.7

Vis, at når vi leder efter løsninger til (1a), der ikke bare er 0-funktionen $u(x, t) = 0$ så fører randbetingelserne (1b) til følgende randbetingelse for $h(x)$:

$$h(0) = h(L) = 0 \quad (1b')$$

Øvelse 9.8 Tilfældet $\lambda < 0$

Vis, at for $\lambda < 0$ findes der ingen løsninger til rumligningen, der samtidig opfylder (1b').

Øvelse 9.9 Tilfældet $\lambda > 0$

- Vis, at for $\lambda > 0$ er løsningerne til rumligningen givet ved:

$$h(x) = A \cdot \cos(\sqrt{\lambda} \cdot x) + B \cdot \sin(\sqrt{\lambda} \cdot x)$$

- Vis, at hvis løsningerne skal opfylde (1b'), er

$$A = 0 \quad \text{og} \quad \lambda \text{ opfylder: } \sqrt{\lambda} \cdot L = n \cdot \pi, \text{ hvor } n = 1, 2, 3, \dots$$

- Konkluder, at løsningerne til rumligningen kan skrives på formen

$$h_n(x) = c_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ (hvor } B \text{ er omdøbt til } c_n)$$

samt at de mulige værdier af konstanten λ ("systemets egen værdi") er:

$$\lambda_n = \left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Øvelse 9.10 Delkonklusion for rumligningen

Vis, at for $\lambda > 0$ er enhver endelig *superposition* af løsningerne til rumligningen

$$H(x) = \sum_{n=1}^m c_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right)$$

en løsning til rumligningen der opfylder (1b')

9.2.2 Løsning af tidsligningen

For at løse tidsligningen indsætter vi de eneste mulige egenværdier: $\lambda_n = \left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$

i tidsligningen og løser denne.

Øvelse 9.11 Løsning af tidsligningen

Vis, at følgende funktioner er løsninger til *tidsligningen*

$$g_n(t) = e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} kt}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Øvelse 9.12 Byggeklodsløsningerne til ligning (1a)

Konkluder nu, at de søgte *byggeklodsløsninger* til ligningen (1a) er funktionerne

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} kt}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

9.2.3 Den samlede løsning

Vis, at enhver endelig **linearkombination** af byggeklodsfunctionerne:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^m c_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} kt}$$

er løsning til ligningen (1a) med randbetingelser (1b).

9.2.4 Den søgte løsning - ved hjælp af Fourieranalyse

Omkring 1820 kom den franske fysiker og matematiker Joseph Fourier (1768 – 1830) - i et studium af varmeledning - frem til, at enhver passende "pæn" funktion $f(x)$ der er defineret på et interval $[-L; L]$, kan skrives som en uendelig sum af sinusfunktioner og cosinusfunktioner. Helt præcist:

Sætning: Fourierrækken for en funktion

Givet en funktion $f(x)$, der er defineret på et lukket interval $[-L; L]$, og som er integrabel her. Hvis der om $f(x)$ gælder, at funktionen har højst endeligt mange lokale ekstrema, og højst endeligt mange diskontinuitetspunkter, så findes der koefficienter a_n og b_n , så $f(x)$ kan skrives:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right)$$

Koefficienterne beregnes således:

$$a_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(t) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{L} \cdot n \cdot t\right) dt, \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} \cdot n \cdot t\right) dt, \quad \text{for } n = 1, 2, \dots$$

Bemærk: Er funktionen ikke givet på et *symmetrisk* interval som $[-L; L]$, men fx på $[0; L]$, så udvider vi den, i første omgang til et symmetrisk interval, og dernæst periodisk til $[L; 3L]$, $[3L; 5L]$... ved blot at gentage det grafiske billede. Udvidelserne kan ske på flere måder, som vi vil se.

Den matematiske disciplin, hvor vi udregner og opstiller *Fourierrækken* for en given funktion, kaldes for *Fourieranalyse*. Amplituderne for de enkelte svingninger a_n og b_n kaldes for *Fourierkoefficienterne*. Som det fremgår er sætningen kun korrekt, hvis vi summerer til *uendelig*.

Sætningen er meget generel og vi er kun interesseret i at bruge den til at finde en løsning på formen som i 9.2.3, der kan give os den rigtige temperaturprofil $f(x)$ til tiden $t = 0$. Sætter vi $t = 0$ i funktionsudtrykket i 9.2.3, får vi en funktion der kun afhænger af x :

$$U(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{L} \cdot x\right)$$

Vi ønsker nu ved hjælp af Fouriers metode at bestemme koefficienterne, så $U(x, 0) = f(x)$.

Når vi indsætter denne funktion i beregningen af Fourierkoefficienter kan det nogenlunde let vises, at alle $a_n = 0$. Så vi har kun b_n - koefficienterne.

Da alle sinusfunktionerne i integrationen er ulige vil integralet fra $-L$ til 0 give det samme som integralet fra 0 til L og vi har derfor

$$b_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Når disse er beregnet, siger Fouriers sætning, at:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \quad (4)$$

Dette er så også udtrykket for $U(x, 0)$, dvs temperaturprofilen til tiden 0.

For at finde udviklingen af løsningen til tiden $t > 0$ ganger vi endelig tidsfaktoren på hvert led til en samlet linearkombination:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} kt}, \quad (5)$$

der så er den endelige løsning til problemet (1a) med randbetingelserne (1b) og (1c)

Øvelse 9.13

Vis, at funktionen (5) opfylder randbetingelserne (1b) og (1c) og argumenter for, at den samtidig løser problemet (1a)

I praksis vil man kun beregne et endeligt afsnit af summen (5). Man medtager "tilstrækkeligt mange led" indtil det grafiske billede af delsummen i (4) passer tilfredsstillende til grafen for $f(x)$:

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{n_{\max}} b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \quad (4b)$$

Øvelse 9.14

Vi betragter en stang med længden $L = 1$ m, der til at begynde med er varm i midten og kold i enderne. Vi kan f.eks. sætte konstanten til $k = 0,003$ så vores varmeledningsligning er:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,003 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

og startbetingelserne kunne f.eks. være

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad (1b)$$

$$u(x,0) = 50x \cdot (L - x) \quad (1c)$$

Så starttemperaturfunktionen er en "sur parabel". Vi skal nu løse varmeledning ligningen for denne stang. Første punkt er at finde n_{\max} i (4b) så summen ligner funktionen $f(x)$ "godt nok".

- Tegn temperaturprofilen for $t = 0$. Hvad er starttemperaturen i midten af stangen?
- Vis, gerne med hjælp fra et CAS-program, at Fourierkoefficienter b_n i dette tilfælde kan beregnes med følgende simple formler (*bemærk*: funktionen er her udvidet ved at gentage det grafiske billede i $[-L;0]$ - det skal du anvende i beregningen her:)

$$b_n = \frac{400}{(n \cdot \pi)^3} \quad \text{for } n \text{ ulige}$$

$$b_n = 0 \quad \text{for } n \text{ lige}$$

- Plot funktionstilnærmelserne (4b) til $f(x)$ for $n_{\max} = 1, 3, 5, \dots$ og sammenlign med grafen for $f(x)$. Bestem dig for en værdi af n_{\max} der får grafen for (4b) til at ligne "godt nok"

Brug nu den valgte værdi:

- Opskriv og tegn den tilnærmede løsning - opret en skyder for t :

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{n_{\max}} b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} kt}$$

- Hvad sker der med $U(x,t)$ for $t \rightarrow \infty$? Svarer det til den virkelige verden?

Eksperiment

Overvej hvordan man kunne designe et eksperiment, der beskrives af ovenstående beregning. Overvej bl.a.

- Hvordan skal vi måle temperaturprofilen til $t = 0$ og hvordan kan vi "lokke stangen til" at have en profil, der minder om vores sure parabel?
- Tænk over, hvordan man kan bestemme konstanten k for en konkret metalstang i eksperimentet.

10.

Raketligningen



Den ultimative test på om ASIM kunne stå distancen og klare de ekstreme rystelser under opsendelsen var naturligvis at afprøve det. Billedet viser ESA's raket stige til vejrs med ASIM placeret helt oppe i spidsen. Det er fotos optaget af Dan Bhanderi, der overværede opsendelsen. ASIM klarede det hele, blev placeret på ISS og viste sig at fungere helt perfekt. Men hvordan kan det i det hele taget lykkes at få løftet noget ud i en bane som ISS følger – eller helt til månen? Svaret gives i *raketligningen*, som er emnet for dette kapitel.

10. Raketligningen

En raket accelererer ved at skyde brændstof ud med stor hastighed. Vi vil i dette afsnit udlede Raketligningen, som beskriver denne proces.

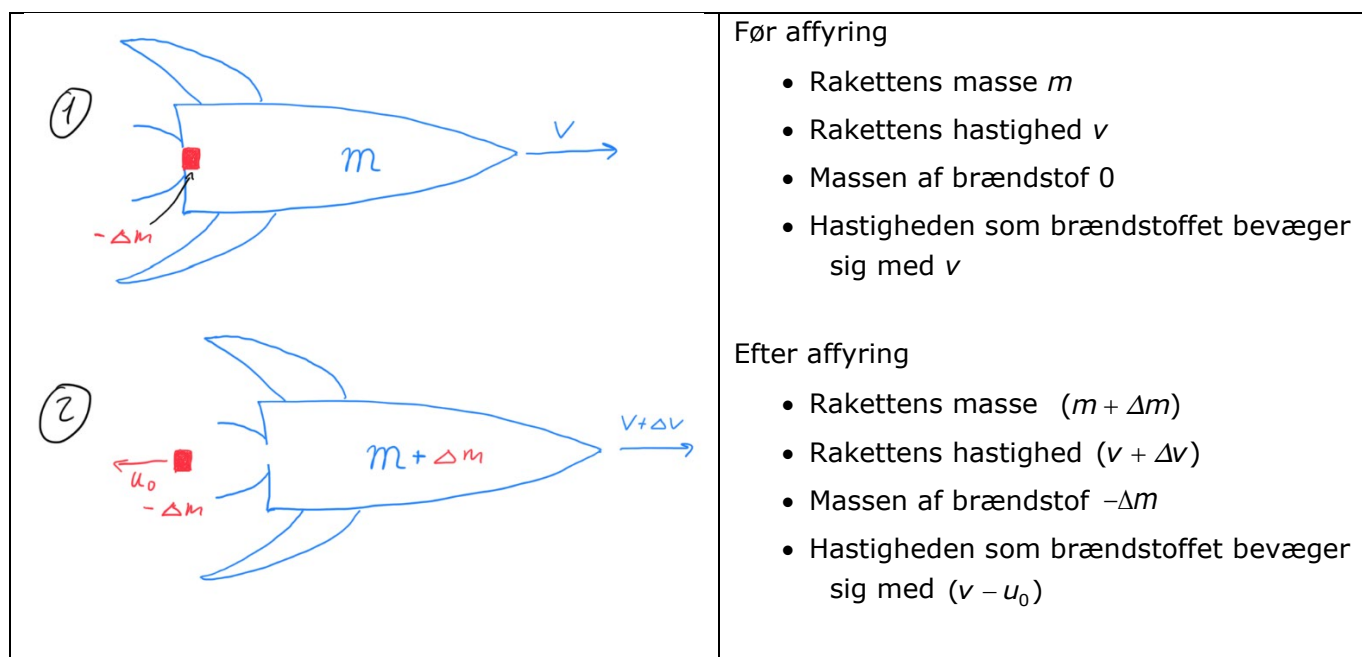
10.1 Raketligningen uden hensyn til tyngdekraft

Vi starter med at se bort fra tyngdekraft og luftmodstand. Det svarer til en raket, som ændrer hastighed, når den allerede er i rummet.

Figuren viser en raket før og efter, den har skudt brændstof ud. Brændstoffet bliver skudt ud ved at brænde det, da partiklerne derved opnår en høj fart. Situationen er følgende:

- Før afbrændingen (1) har raketten massen m , som indeholder massen af al det brændstof, der skal sendes bagud.
- Raketten flyver med hastigheden v .
- Brændstoffet forlader raketten, og det reducerer raketts masse og giver en ekstra hastighed, Δv .
- Brændstoffet bliver skudt ud med hastigheden u_0 , og har nu den samlede hastighed $(v - u_0)$.
- Ændringen i raketts masse er $\Delta m = m_{\text{efter}} - m_{\text{før}} < 0$.

Den masse som skydes ud er derfor $-\Delta m > 0$



Bevægelsesmængde og kraft

Bevægelsesmængden er defineret som massen gange hastighed og har bogstavet p

$$p = m \cdot v .$$

Ifølge Newtons mekanik giver en ydre kraftpåvirkning en ændring i bevægelsesmængden,

$$\frac{dp}{dt} = F .$$

I den første situation, vi ser på, er den ydre kraft på raketten lig nul, hvorfor

$$\frac{dp}{dt} = 0 \Leftrightarrow p_{\text{efter}} = p_{\text{før}} \Leftrightarrow p_{\text{efter}} - p_{\text{før}} = 0$$

Raketten ændrer altså hastighed ved at skyde brændstof ud i modsat retning, så bevægelsesmængden er bevaret.

Øvelse 10.1

Bevægelsesmængden før og efter er

$$p_{\text{før}} = m \cdot v$$

$$p_{\text{efter}} = (m + \Delta m) \cdot (v + \Delta v) - \Delta m \cdot (v - u_0)$$

- Diskuter ved brug af figuren, hvor de forskellige led kommer fra.
- Argumenter for, at ændringen i bevægelsesmængden kan skrives som

$$\Delta p = p_{\text{efter}} - p_{\text{før}} \approx m \cdot \Delta v + u_0 \cdot \Delta m.$$

(se på størrelsen af leddet $\Delta v \cdot \Delta m$)

Vi vil nu betragte ændringerne i hastighed og masse som funktioner af tiden og skrive

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} + u_0 \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

Udnytter vi, at bevægelsesmængden er bevaret må $\frac{\Delta p}{\Delta t} = 0$.

Øvelse 10.2

Brug bevarelse af bevægelsesmængden til at vise, at $\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{u_0}{m} \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t}$.

Hvis hastigheden og massen kan beskrives med differentiable funktioner, får vi:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \frac{dv}{dt} = v' \quad \text{og} \quad \frac{\Delta m}{\Delta t} \rightarrow \frac{dm}{dt} = m', \quad \text{når } \Delta t \rightarrow 0$$

Det giver: $v' = -\frac{u_0}{m} \cdot m'$ (*)

Vi vil nu udlede raketligningen, ud fra denne sammenhæng mellem hastighed og masse.

Det sker meget kort fortalt, ved at vi integrerer ligningen (*). Til dette får vi brug for følgende:

Sætning. Integration ved substitution

Lad f og g være to funktioner, hvor f er kontinuert, og g er differentiabel med kontinuert afledet.

Så er: $\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx$

Øvelse 10.3

Find beviset for sætningen i din lærebog, og find et eller flere eksempler, hvor metoden demonstreres. Gennemgå det, så du kan præsentere det i din gruppe eller for hele klassen.

Lad os nu omskrive (*), så vi kan anvende sætningen:

$$v' = -\frac{u_0}{m} \cdot m' \Leftrightarrow v'(t) = -u_0 \cdot \frac{1}{m(t)} \cdot m'(t)$$

$m(t)$ spiller rollen som $g(t)$, og $m'(t)$ svarer derfor til $g'(t)$

$\frac{1}{m(t)}$ er en sammensat funktion, hvor den indre er $m(t)$ og den ydre er $\frac{1}{(\dots)}$

Dvs $f(x)$ svarer til funktionen $\frac{1}{x}$

Nu kan vi integrere (*) over intervallet t_0 til t_1 :

$$\text{Venstre side: } \int_{t_0}^{t_1} v' dt = v(t_1) - v(t_0) = v_1 - v_0 = \Delta v$$

$$\text{Højre side: } \int_{t_0}^{t_1} -u_0 \cdot \frac{1}{m(t)} \cdot m'(t) d(t) = -u_0 \cdot \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{m(t)} \cdot m'(t) d(t) \quad (**)$$

substituer: $x = m(t)$, $dx = m'(t) dt$,
grænserne: $t = t_0 \Rightarrow x = m(t_0)$, $t = t_1 \Rightarrow x = m(t_1)$

$$\text{Indsæt i (**): } -u_0 \cdot \int_{m(t_0)}^{m(t_1)} \frac{1}{x} \cdot dx = -u_0 \cdot [\ln(x)]_{m(t_0)}^{m(t_1)} = -u_0 \cdot (\ln(m(t_1)) - \ln(m(t_0)))$$

Ved at anvende en logaritme-regneregler kan vi nu konkludere, at højre side bliver

$$-u_0 \cdot (\ln(m_1) - \ln(m_0)) = -u_0 \cdot \ln\left(\frac{m_1}{m_0}\right)$$

Konklusion – Raketligningen:

Når brændstoffet affyres med en konstant udstødelsesfart på u_0 i et tidsrum fra t_0 til t_1 , hvor raketens masse derfor samtidig falder fra m_0 til m_1 , vil raketten opnå en hastighedstilvækst på:

$$v_1 - v_0 = \Delta v = -u_0 \cdot \ln\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = u_0 \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right)$$

Hvis starthastigheden v_0 er 0, fortæller raketligningen, hvad raketens hastighed er til tiden t_1

Øvelse 10.4

Gør omhyggeligt rede for hvert trin i ovenstående omskrivninger.

Øvelse 10.5

Vi vil undersøge raketligningen grafisk. Brændstoffet affyres med en konstant masse pr tidsenhed.

- Giv en sproglig beskrivelse af grafen for $m(t)$, og skitser denne graf.
- Giv en sproglig beskrivelse af grafen for $\frac{m(t)}{m_0}$, og skitser denne graf.
- Argumenter for monotoniforhold samt krumningsforhold for funktionen $\ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right)$.
- Argumenter for, at $v(t) = -u_0 \cdot \ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right)$ er voksende og at grafen har positiv krumning
- Giv en fortolkning af disse resultater.

Øvelse 10.6

Hvor meget kan hastigheden forøges, hvis halvdelen er brændstof? Og hvor meget, hvis det er 90%?

Via dette link: [The Rocket Equation: Mathematician vs Astronaut - YouTube](#), kan du se en udledning og diskussion af raketligningen på Kennedy Space Center!

10.2 Raketligningen under hensyn til tyngdekraft

Hvis vi skal sende raketter op fra Jorden, har vi desværre tyngdekraften at kæmpe med.

Tyngdekraften nær jordoverfladen er $F = m \cdot g$, hvor $g = 9,82 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ er tyngdeaccelerationen og m er

rakettens masse. Vi kan bruge ligningen for ændringen i bevægelsesmængden, $\frac{\Delta p}{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} + u_0 \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t} = -F = -m \cdot g$$

hvor vi bruger $-F$, da den virker modsat bevægelsesretningen.

Vi isolerer $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ igen, og lader $\Delta t \rightarrow 0$, hvilket giver

$$v' = -\frac{u_0}{m} \cdot m' - g$$

Dette kan igen integreres

$$v(t) = \int_0^t v' dt = -u_0 \cdot \int_{m_0}^{m_1} \frac{1}{m} dm - \int_0^t g dt = -u_0 \cdot (\ln(m_1) - \ln(m_0)) - g \cdot t = -u_0 \cdot \ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right) - g \cdot t$$

Vi sammenfatter resultatet:

$$v(t) = -u_0 \cdot \ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right) - g \cdot t$$

Her skal vi huske at hastigheden $v(t)$ og massen $m(t)$ er funktioner af tiden.

Nu er sluthastigheden både en funktion af ændringen i massen og tiden. Det er derfor ikke så let at bruge den uden yderligere antagelser. Hvis vi antager at afbrændingen er konstant, kan vi regne videre. Matematisk skriver vi:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = k < 0, \text{ da raketten bliver lettere.}$$

Indsætter i ligningen,

$$m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} + u_0 \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t} = -m \cdot g \Leftrightarrow m \cdot \Delta v = -u_0 \cdot \Delta m - m \cdot g \cdot \Delta t$$

Vi kan nu bruge at $\Delta t = \frac{1}{k} \cdot \Delta m$, så ligningen bliver

$$m \cdot \Delta v = -u_0 \cdot \Delta m - m \cdot \frac{g}{k} \cdot \Delta m$$

$$\Delta v = -\frac{u_0}{m} \cdot \Delta m - \frac{g}{k} \cdot \Delta m$$

Dette kan nu integreres

$$\int_0^t v' dt = -u_0 \cdot \int_{m_0}^{m_1} \frac{1}{m} dm - \frac{g}{k} \int_{m_0}^{m_1} dm$$

$$v(t) = -u_0 \cdot (\ln(m_1) - \ln(m_0)) - \frac{g}{k} \cdot (m_1 - m_0)$$

$$v(t) = -u_0 \cdot \ln\left(\frac{m_1}{m_0}\right) - \frac{g}{k} \cdot (m_1 - m_0)$$

Øvelse 10.7

Lad os se på et eksempel hvor raketten forbrænder 1% af startmassen hvert sekund i med en hastighed på $1000 \frac{m}{s}$. Massen af raketten er $m = 290000 \text{ kg}$, hvilket svarer til en Falcon X løfteraket. Raketten starter i hvile.

- a) Beregn rakettsens fart efter [30,60,90,99,99.9] sekunder, husk at $k < 0$.

Løsning med brug af numerisk integration

Det er ofte lettere at løse differentiaalligningerne numerisk. Her sætter vi en række startbetingelser og lader systemet udvikle sig i små skridt.

Hvis vi holder os til differensligningen, kan vi isolere Δv

$$m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} + u_0 \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t} = -m \cdot g \Leftrightarrow \Delta v = -\frac{u_0}{m_t} \cdot \Delta m - g \cdot \Delta t \Leftrightarrow v_t = v_{t-1} - \frac{u_0}{m_t} \cdot \Delta m - g \cdot \Delta t$$

Hvor vi til sidst har brugt at $\Delta v = v_t - v_{t-1}$ og skrevet raketmassens tidsafhængighed eksplicit med m_t . Hvis vi kender starthastigheden og antager at ændringen i rakettsens masse er konstant, kan vi finde hastigheden numerisk.

Algoritmen implementeret i Python:

<p>Simulering med en raketmasse på $m = 290000 \text{ kg}$ og en afbrænding på $dm = -m \cdot 0,01 \cdot dt$.</p> <p>Starthøjden og starthastighed sættes lig nul, $y = v = 0$.</p> <p>Brændstoffets hastighed i forhold til raketten sættes til $u_0 = 2500 \text{ m/s}$.</p>	<p style="text-align: center;"><i>Startbetingelser</i></p> <pre> 11 m = 290000 12 dm = -m*0.01*dt 13 g = 9.82 14 y = 0 15 v = 0 16 u0 = 2500 </pre>
--	---

<p>Løkken kører i 30 sekunder. Linje 27 svarer til ligningen:</p> $v_t = v_{t-1} - \frac{u_0}{m_t} \cdot \Delta m - g \cdot \Delta t$ <p>Højden ændres i linje 28 og massen af raketten opdateres i linje 29. De resterende linjer er for at plotte data og opdaterer tiden. Linje 32-34 gør at raketten bliver stående på Jorden og ikke forsvinder ind mod centrum.</p>	<p style="text-align: right;">Løkke til at beregne hastigheden</p> <pre> 25 while t<10: 26 rate(400) 27 v = v-u0*1/m*dm-g*dt 28 y = y+v*dt 29 m = m+dm 30 ball.pos.y=y 31 t = t+dt 32 if y<0: 33 v=0 34 y=0 35 f1.plot(t,v*3.6) </pre>
--	--

Simuleringen kan køres her, <https://github.com/mpsteenstrup/Simulieringer>

Øvelse 10.8

- Kør simuleringen og beskriv i ord (t, v) grafen.
- Hvorfor stiger hastigheden hurtigere og hurtigere?
- Hvordan passer resultatet med beregningen i øvelse 10.7?
- Lav om i *while*-betingelsen i linje 25, så simuleringen kører længere tid.
- Prøv at sætte $u_0 = 2500 \text{ m/s}$, og beskriv grafen.

For at undslippe Jordens tyngdefelt skal raketten op på $v = 11186 \text{ km/time}$.

- Prøv om I kan komme så højt op, ved at I ændrer i u_0 og dm . Det er ikke let!

10.3 Raketligningen under hensyn til tyngdekraft og luftmodstand

Luftmodstanden spiller en vigtig rolle ved raketopsendelse. Det er en kraft, som virker modsatrettet bevægelsen, og hvis størrelse er proportional med hastigheden i anden:

$$F = -0,5 \cdot c_v \cdot \rho \cdot v^2$$

c_v er den såkaldte formfaktor, der angiver, hvor strømlinet et objekt er. For en raket ligger den omkring $c_v = 0,25$.

ρ er luftens massefylde, der er et mål for, hvor mange luftmolekyler raketten rammer. For atmosfærisk luft med en temperatur på 20°C er $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$. Indsæt i differentilligningen:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = -m \cdot g - 0,5 \cdot c_v \cdot \rho \cdot v^2$$

$$m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} + u_0 \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t} = -m \cdot g - 0,5 \cdot c_v \cdot \rho \cdot v^2$$

$$m \cdot \Delta v + u_0 \cdot \Delta m = (-m \cdot g - 0,5 \cdot c_v \cdot \rho \cdot v^2) \cdot \Delta t$$

$$\Delta v = -u_0 \cdot \frac{\Delta m}{m} + \left(-g - \frac{0,5}{m} \cdot c_v \cdot \rho \cdot v^2 \right) \cdot \Delta t$$

Denne ikke lineære differensligning løses igen numerisk.

Vi indfører

$$13 \quad c = 0.25$$

$$14 \quad A = 1$$

$$15 \quad \rho = 1.225$$

Og ændrer ligningen i linje 27 til

$$27 \quad \dot{v} = v - u_0 \cdot 1/m \cdot dm - g \cdot dt - 0.5/m \cdot c \cdot A \cdot \rho \cdot v \cdot \text{abs}(v) \cdot dt$$

Det sidste led er luftmodstanden og $v \cdot \text{abs}(v)$ giver hastigheden i anden og sørger for at kraften altid peger modsat bevægelsesretningen.

Øvelse 10.9

- Kør programmet og giv en fortolkning af (t, v) grafen.
- Undersøg hvor meget formfaktoren betyder ved at variere den fra nul til 2.

10.4 Raketten og den generelle massetiltrækningslov

I det ovenstående har vi arbejdet med at tyngdekraften er $F = m \cdot g$, hvor tyngdeaccelerationen er bestemt ved jordoverfladen. Hvis vi vil tage højde for at raketten bevæger sig væk fra Jorden skal vi bruge Newtons tyngdelov:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2},$$

hvor $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg}^2}$ er den universelle gravitationskonstant, m og M er massen af de to legemer som tiltrækker hinanden, ofte en lille og en stor masse og r er afstanden mellem de to legemers massemidtpunkt.

Øvelse 10.10

Jordens masse er $M = 5,972 \cdot 10^{24}$ kg og afstanden til Jordens centrum fra overfladen er i gennemsnit $r = 6372$ km.

- Brug den generelle tyngdelov til at beregne kraften på et lod med massen $m = 1$ kg.
- Fra Newtons 2. lov ved vi at kraften er lig massen gange accelerationen, $F = m \cdot a$. Beregn a . Har I set den før?

Månens masse er $M = 7,348 \cdot 10^{22}$ kg og gennemsnitsafstanden til centrum er $r = 1737000$ m.

- Beregn tyngdeaccelerationen på Månens overflade.
- Implementer det i simuleringen af en opsendelse, husk at der ikke er nogen luftmodstand.

10.5 Projekt: Simulering af raketopsendelse i et tyngdefelt

I Excel-regnearket "raketsimulering med gravitation", som du kan hente [her-link til 26](#), har vi lavet en simpel simulering af en lodret affyring af en raket i et tyngdefelt. Beregningerne er baseret på raketligningen, samt på hvordan et lodret kast i tyngdefeltet beregnes. I starten af regnearket kan du selv styre hvilke egenskaber raketten skal opsendes med. Vi gennemgår først, hvordan regnearket fungerer, og derefter kan du selv lege med nogle opgaver.

I de grønne felter indtaster du startværdier for opsendelsen efter eget valg:

C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
						hastighed	motor	tyngde	hastighed	position
				masse	tid	uden gravitation	acceleration	acceleration	med tyngde	med grav
m0	5000	kg		m/ kg	t	v uden grav.	dv	dv2	v med grav	s/m
u0	2400	m/s		5000	0	0	9,832115029	-4,91	0	0
dm	20,4	kg		4979,6	0,5	9,832115029	9,87256009	-4,91	4,92211503	1,2305288
dt	0,5	s		4959,2	1	19,70467512	9,913339273	-4,91	9,88467512	4,9322263
g-værdi	9,82	m/s^2		4938,8	1,5	29,61801439	9,954456734	-4,91	14,8880144	11,125399
				4918,4	2	39,57247113	9,995916701	-4,91	19,9324711	19,83052

Startdata

Feltet m0 er rakettenes startmasse, u0 er udstødningsfarten på brændstoffet, der ryger bagud fra raketten (den der også bruges i raketligningen). Feltet dm fortæller, hvor meget brændstof der brændes af i løbet af tidsrummet dt, og dt er samtidig tidsskridtet i simulationen. Endelig indsætter du i g-værdi feltet størrelsen af tyngdeaccelerationen ved planetens overflade.

Beregnete data

G-søjlen beregner, hvad raketten vejer, efter der er gået tiden t, og H-søjlen holder øje med, hvor lang tid der er gået, altså hvad t er.

I-søjlen beregner ud fra impulsbevarelse, hvilken hastighed raketten ville have, hvis der ikke var nogen tyngdekraft.

J-søjlen beregner ud fra raketligningen den hastighedsændring, raketten får fra motorkraften i tidsskridtet dt, mens K-søjlen beregner den hastighedsændring (opbremsning), raketten får i tidsskridtet dt pga. tyngdekraften.

Endelig beregner søjlerne L og M rakettenes hastighed og position til tiden t, når der er taget højde for tyngdekraftens opbremsende virkning. Der er ikke taget højde for luftmodstand og atmosfæresammensætning mm. Det indbygges i simuleringen også.

Grafer

Der er i regnearket også plottet en graf der viser rakettenes simulerede/beregnete fart både med og uden gravitation (for at vise hvor meget gravitationen betyder) og derudover, en graf der viser rakettenes højde til tiden t – selvfølgelig også hvor tyngdekraften er med i simuleringen

Øvelse 1 til simuleringen

Vi prøver først at affyre "raketten" vandret ved at se på et barn på en kælk, der kaster snebolde bagud med høj fart!

Indstil parametrene så: barn + kælk + 20 snebolde i alt vejer $m_0 = 35$ kg.

Sneboldene vejer 0,2 kg og barnet affyrer 1 snebold pr. sekund (dvs. indstil $dt = 1$) med en hastighed på $u_0 = 15$ m/s.

Indstil endelig g -værdi = 0, da vi simulerer kælken kører på et vandret helt glat underlag.

- Aflæs fra simuleringen hvilken hastighed kælk med barn når op på, efter de 20 snebolde er kastet.
- Hvor langt er barnet kørt, når de 20 snebolde er kastet?

Nu monterer vi kælk med barn lodret! Barnet er limet fast til kælken og kan ikke falde ned fra den, men kan stadig kaste snebolde – nu lodret ned. Vi opgraderer sneboldene til at veje 1 kg pr stk., til gengæld kaster barnet nu kun med 10 m/s.

Barnet på kælken vil prøve at lette fra jorden ved at kaste snebolde ned mod den!

- c) Hvor langt falder det stakkels barn ned i løbet af de første 5 sekunder hvis han "kun" kaster én 1kg-snebold i sekundet med en hastighed på 10 m/s?
- d) Undersøg ved at ændre på u_0 , hvilken hastighed barnet skulle kaste sneboldene med for faktisk at kunne lette fra jorden hvis der var tyngdekraft og hvis hun stadig kaster én snebold i sekundet?
- e) Hvor mange snebolde skulle barnet kaste hvert sekund for at lette fra jorden hvis u_0 stadig kun var 10 m/s

Øvelse 2 til simuleringen

Vi skal nu have en raket på 5 tons til at kunne flyve. Vi bruger kemisk brændstof der giver en udblæsningshastighed på 2.4 km/s.

- a) Hvor meget brændstof skal der mindst brændes af i sekundet, hvis raketten overhovedet skal kunne lette?
- b) Hvor meget brændstof skal vi fyre af i sekundet, hvis vi ønsker den skal nå en lodret hastighed på 100m/s efter 15 sekunder?
- c) Hvor højt er raketten kommet på dette tidspunkt?
- d) Hvis vi bruger denne indstilling, hvornår opnår raketten så lydets fart? (340 m/s)? – hvor højt er den nu oppe?
- e) Hvis raketten skal have en nyttelast på 1,5 tons, hvad er så den maksimale hastighed, den kan opnå?

Øvelse 3 til simuleringen

Startdata for Saturn V raketten, der blev brugt til de første månerejser, er følgende: Indsæt startdata for Saturn V raketten i modellen og svar på følgende spørgsmål: a) Hvilken hastighed har Saturn V efter 10 sekunder? b) Hvor højt er den oppe efter 10 sekunder?	Saturn V data	
	m0	2936000
	u0	2400
	dm	14200
	dt	1
	g-værdi	9,82

Prøv at tjekke om det passer med filmen <https://www.youtube.com/watch?v=2bztkoHmee0> – affyringstårnet er ca. 110 m højt ligesom Saturn V (du kan trykke på spacebar, lige når raketten begynder at bevæge sig på filmen, aflæse tiden, starte filmen igen og vente 10 sekunder, spacebar igen og vurdere, hvor raketten er i forhold til tårnet)

- c) Hvornår opnår Saturn V lydets fart? Hvor højt er den oppe på dette tidspunkt?

Første trin på Saturn V raketten indeholder 2139,2 tons brændstof.

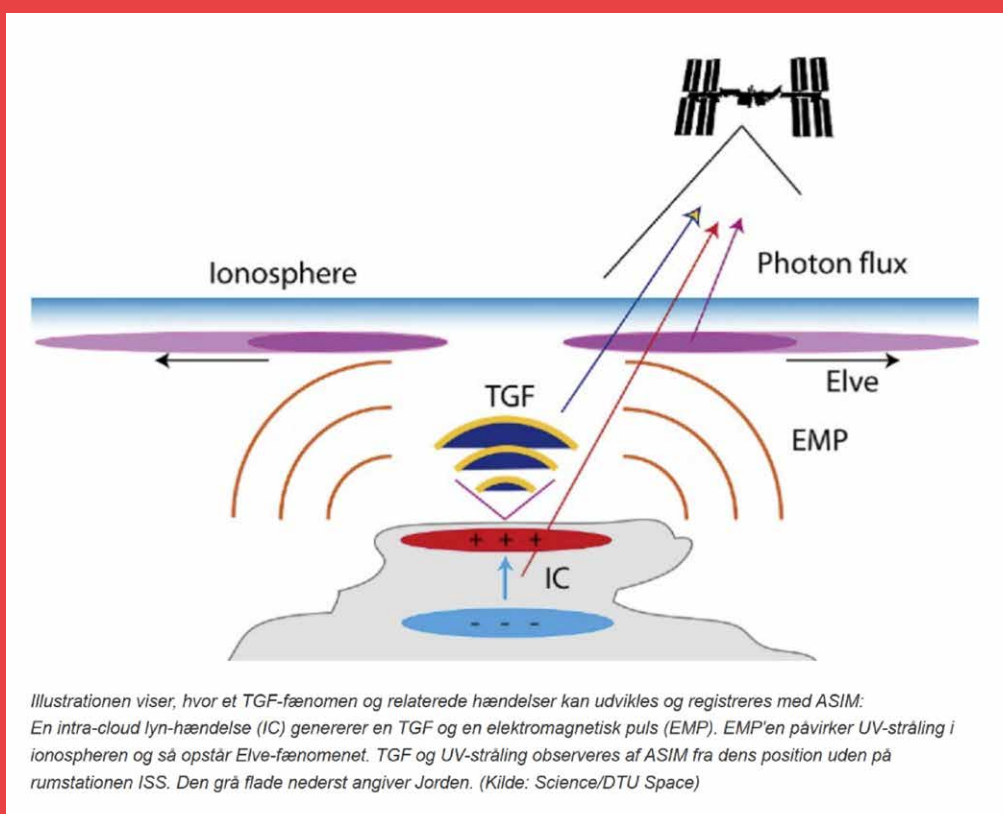
- d) Hvor lang tid brænder første trin?
- e) Hvilken hastighed og højde opnår Saturn V efter afbrænding af 1. trin? Film/data fra nettet påstår at det "kun" er ca. 68 km højde! Kan du forklare forskellen? (*Hint*: hvilken retning affyrer vores simulation raketten i og hvor skal den egentlig hen?)

Øvelse 4 til simuleringen

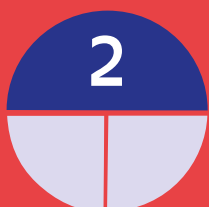
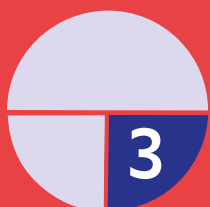
Hvordan "reagerer" simulationen, hvis raketten mister så meget masse pr. sekund, at dens samlede masse til sidst bliver negativ?

11.

Gammadetektoren – geometrien



Den primære opgave for ASIM var og er at studere fænomener, der opstår sammen med store tordenvejr – fænomener som er illustreret ovenfor. TGF står for *Terrestrial Gamma Flux*, og i filmen forklarer Dan Bhandari, at der udsendes så relativt få gammafotoner, at detekteringen heraf kræver meget fintfølelse apparatur og en snedig udtænk matematisk metode til at bestemme præcis, hvorfra strålingen kommer. I kapitlet viser vi – via en stærkt nedskaleret version – hvordan vi kan bestemme, fra hvilken retning fotonerne kom.

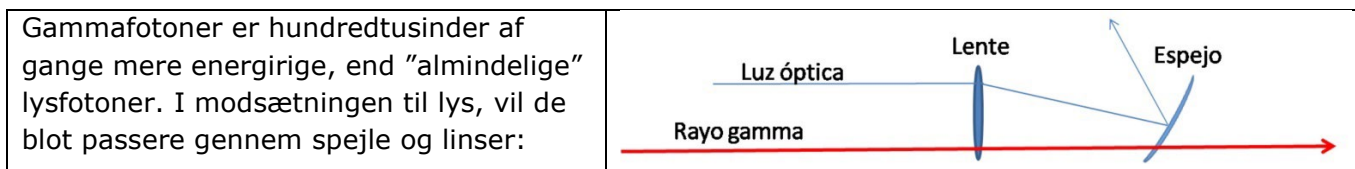


11. Gammadetektoren – geometrien

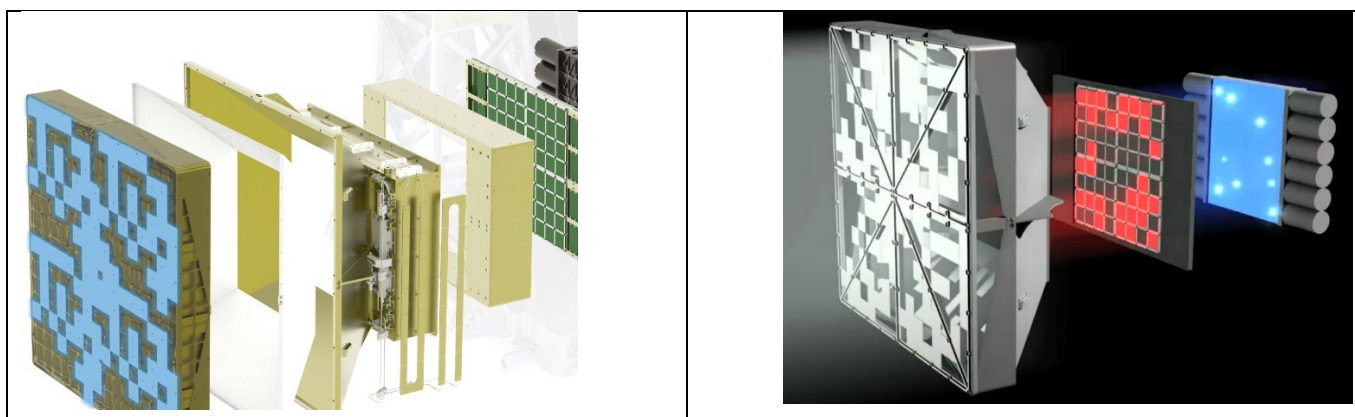
En af de store opdagelser i kølvandet på udforskningen af de røde og blå kæmpelyn var, at dannelsen af sådanne kæmpelyn, også de "almindelige" der rammer Jorden, genererer gammastråling, som man ellers kun kendte fra det dybe rum eller fra atombombeeksplorationer. Men der genereres meget få gammafotoner, så der er udviklet særlige teknikker til at bestemme hvilke lyn, der genererede de modtagne fotoner, herunder det særlige mønster, udviklet af et hold på universitetet i Valencia.

Ideen fra Valencia – Hvordan registrerer man TGF'er?

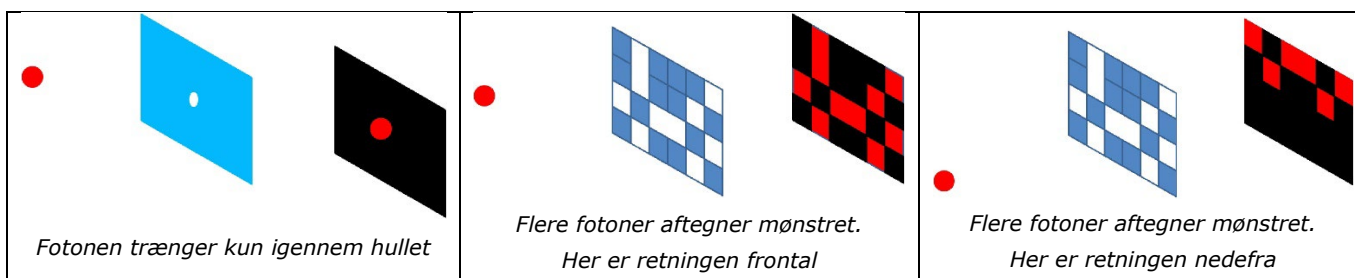
Denne præsentation er hentet fra universitetet i Valencia, på denne adresse: [MXGS Valencia - Home \(uv.es\)](http://MXGS.Valencia-Home(uv.es))



Der anvendes derfor meget tykke og tætte materialer, med et mønster af huller, der lader fotoner komme igennem. Til venstre er ASIM lukket op, hvor man ser mønstret i den forreste plade. Til højre er en simplificering, hvor mønstret gengives, hvis en sværm af partikler kommer frontalt ind. Men der kommer kun få, som registreres på den blå plade.



Nu vil mønstret afhænge af retningen fotonerne kommer fra:

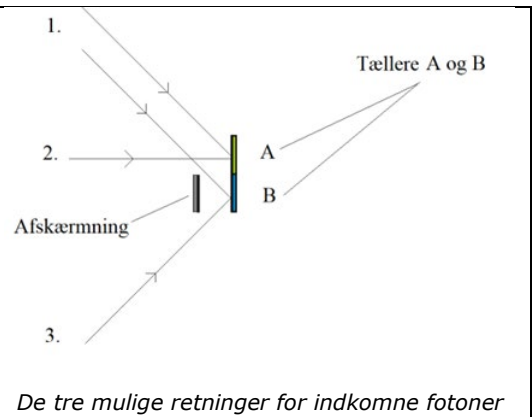


Da der kun kommer få gammafotoner, bliver billedet ikke perfekt, og der anvendes avanceret statistik til at bestemme den mest sandsynlige retning.

En forenklet version af Valenciamønstret

Vi vil nu vise via en forenklet udgave af, hvordan Valenciamønstret kan bruges til at beregne en sandsynlighedsfordeling for, hvilken retning fotonerne kommer fra.

For at gøre det så enkelt som muligt skal vores detektor bare kunne skelne mellem tre forskellige retninger som vi kalder 1, 2 og 3 - se figuren herunder. Vores detektor består kun af to tællere A og B, der begge registrerer antallet af fotoner der rammer dem. Lige foran tæller B sidder der en afskærmning som strålingen ikke kan gå igennem uanset hvilken retning den kommer fra. Tælleren A kan således kun rammes fra retning 1 og 2, mens tælleren B kun kan rammes fra retning 1 og 3.



1. Eksempel: En foton

Vi kigger først på situationen hvor 1 (én) foton kommer fra en af de mulige retninger og detekteres af én af de to tællere

Øvelse 11.1

Opskriv de mulige udfald for detektion af 1 foton, f.eks. med notationen 1A der betyder, at fotonen kommer fra retning 1 og detekteres af tæller A

Vi antager nu, at der er lige stor sandsynlighed for, at en foton kommer fra hver af de tre retninger, dvs. $P(1) = P(2) = P(3) = \frac{1}{3}$ og at en foton der kommer fra retning 1 med lige stor sandsynlighed detekteres af tæller A og B

Øvelse 11.2

Opstil sandsynlighedstabellen for detektion af 1 foton:

udfald	1A	1B	2A	3B
sandsynlighed				

Vi indfører nu hændelserne A, B ved:

A: fotonen detekteres i tæller A

B: fotonen detekteres af tæller B

Samt hændelserne 1, 2 og 3 ved

1: fotonen kommer fra retning 1

2: fotonen kommer fra retning 2

3: fotonen kommer fra retning 3

Øvelse 11.3

Vis, at $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$

Selvom der er lige stor sandsynlighed for hændelserne 1, 2 og 3, forholder det sig lidt anderledes, hvis vi ved, hvilken detektor der har modtaget fotonen. Viden om, at fotonen er detekteret i tæller A udelukker jo f.eks. helt retning 3. Vi skal bruge formlen til beregning af *betingede sandsynligheder* som vi lige minder om:

$$P(H|K) = \frac{P(H \cap K)}{P(K)}$$

(Hvis betingede sandsynligheder er helt fremmed stof, kan du få en hurtig indføring [her-link til 27](#))

I de følgende opgaver kan alle sandsynligheder "høstes" fra tabellen i øvelse 11.2

Øvelse 11.4

- Beregn sandsynlighederne $P(1|A)$, $P(2|A)$ og $P(3|A)$
- Formuler betydningen af resultaterne fra a) med ord
- Beregn de tilsvarende sandsynligheder $P(1|B)$, $P(2|B)$ og $P(3|B)$, og overvej betydningen af resultaterne

Som vi kan se af resultaterne i øvelse 11.4, giver blot én enkelt foton i en bestemt tæller anledning til at sige noget om i hvilken retning den højst sandsynligt er kommet fra. I de næste øvelser skal vi se, at der tegner sig et endnu tydeligere billede, hvis vi detekterer flere fotoner på en gang.

I den virkelige verden vil en masse fotoner, der detekteres på næsten samme tid, tyde på, at der har været et gammaburst, og det vil give god mening at antage at alle fotonerne kommer fra samme retning. Når vi regner på sandsynlighederne, kan vi ikke tillade os at antage dette! Vi må antage, at alle de enkelte fotonbegivenheder er uafhængige og regne sandsynligheden ud for, at de alle kommer fra en bestemt retning ved at benytte tællertallene. I praksis vil der også være støj, så selvom den rigtige retning er "2" kan der også være enkelte fotoner der rammer tæller B, som jo ikke kan blive ramt fra retning 2.

2. Eksempel: To fotoner

Nu kigger vi på detektering af 2 fotoner og antager uafhængighed: Dvs. hver foton kommer med lige stor sandsynlighed fra hver af retningerne 1,2 og 3 og rammer med lige stor sandsynlighed tæller A eller tæller B.

Øvelse 11.5

Udfyld en tabel over sandsynligheden for alle de forskellige to-foton detektioner.

Det kan være praktisk at opstille sandsynlighederne i en tabel som denne:

Foton 1 \ Foton 2	1A	1B	2A	3B
1A	1/36	1/36	2/36	2/36
1B	1/36	...		
2A	⋮	⋮		
3B				

Vi indfører nu igen nogle interessante hændelser:

A: Begge fotoner detekteres i tæller A

B: Begge fotoner detekteres af tæller B

AB: Den ene foton rammer tæller A og den anden rammer tæller B

$R_{i,j}$: Den ene foton kommer fra retning i og den anden fra retning j : $i, j = 1, 2, 3, \dots$

Øvelse 11.6

Brug tabellen fra opgaven ovenfor til at optælle følgende sandsynligheder:

- Bestem $P(A)$, $P(B)$ og $P(AB)$
- Vis, at $P(R_{11}) = P(R_{22}) = P(R_{33})$ og bestem $P(R_{i \neq j})$

Idéen i tællerens måde at bestemme retninger på er, at sandsynligheden for, at fotonerne kommer fra en bestemt retning, ændrer sig i takt med vor viden om, hvilken af tællerne der har detekteret fotonerne. For at undersøge dette nærmere skal vi igen bruge *betingede sandsynligheder*, og disse kan findes ved at tælle sandsynligheden for forskellige hændelser op:

Øvelse 11.7

- Brug den opstillede tabel til at beregne sandsynlighederne $P(R_{11}|A)$, $P(R_{22}|A)$ og $P(R_{33}|A)$ idet f.eks.

$$P(R_{11}|A) = \frac{P(R_{11} \cap A)}{P(A)}$$

hvor både sandsynligheden i tælleren og nævneren kan findes ved at kigge i tabellen

- Beregn også $P(R_{11}|AB)$, og forklar uden at regne hvorfor $P(R_{22}|AB) = P(R_{33}|AB) = 0$

3. Eksempel: Mange fotoner

Under samme forudsætninger om uafhængighed mellem fotonerne kigger vi nu på situationen, hvor der er detekteret n fotoner. Vi indfører hændelserne:

$$A^r B^{n-r}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n$$

så f.eks. $A^{17}B^{13}$ er hændelsen hvor 17 fotoner er detekteret af tæller A, mens 13 fotoner er opfanget af tæller B og A^{30} betyder, at alle 30 fotoner er opfanget af tæller A.

Øvelse 11.8

- Gør rede for, at antallet af fotoner der rammer tæller A er binomialfordelt
- Beregn sandsynligheden for hændelsen A^n , dvs. at alle fotonerne rammer tæller A udtrykt ved n .
- Bestem tilsvarende sandsynligheden $P(B^n)$

Hvis der *ikke* er et gamma udbrud (et TGF) i gang, modtager de to detektorer kun tilfældige gammakvanter fra alle mulige retninger

- d) Gør rede for, at antallet af fotoner der kommer fra en bestemt af de tre retninger er binomialfordelt, og beregn sandsynligheden $P(R_i)$, $i = 1, 2, 3$, dvs. sandsynligheden for, at alle fotonerne kommer fra én bestemt retning

Lad nu hændelserne R_i^n , $i = 1, 2, 3$ være defineret ved at alle fotoner kommer fra samme retning (som ved et gammaburst).

Øvelse 11.9

- a) Beregn $P(R_i^n)$, $i = 1, 2, 3$ udtrykt ved n
b) Beregn nu - udtrykt ved n - de betingede sandsynligheder

$$P(R_1^n | A^n) = \frac{P(R_1^n \cap A^n)}{P(A^n)}$$

$$P(R_2^n | A^n) = \frac{P(R_2^n \cap A^n)}{P(A^n)}$$

Vi ser, at begge sandsynligheder går mod 0 for $n \rightarrow \infty$. Helt anderledes forholder det sig med forholdet mellem de to sandsynligheder:

- c) Beregn - udtrykt ved n - forholdet:

$$\frac{P(R_2^n | A^n)}{P(R_1^n | A^n)}$$

- a) Hvad går værdien af det beregnede forhold mod for $n \rightarrow \infty$?

Hvis tæller A alene pludselig detekterer en masse fotoner er det altså langt mest sandsynligt, at de kommer fra retning 2. Tilsvarende kan man beregne, at hvis det udelukkende er tæller B, der pludselig detekterer en masse fotoner, så vil det være mest sandsynligt, at der er et gammaudbrud (et TGF) i gang i retning 3. Hvis endelig begge tællere modtager et større antal fotoner på én gang, så vil det mest sandsynligt være, at gamma-udbruddet finder sted i retning 1, hvorfra begge detektorer jo kan rammes.

12.

Registrering og matematisk modellering af lyn

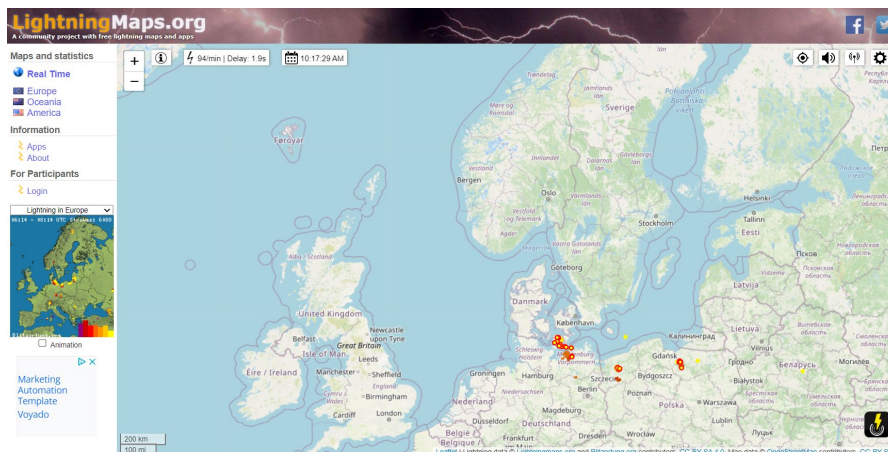


I filmen forklarer Dan Bhanderi, at Termas udstyr er med til at registrere, hvor de interessante kæmpelyn opstår – dels ved brug af gammadetektoren, og dels ved brug af stjernekameraerne. Og at man ved at samkøre med databaserne kan finde ud af, præcis hvilket udbrud der er tale om. Som det fremgår af ovenstående foto, virker lyn som kaotiske fænomener. Det er svært at forudse, hvor de opstår, og hvor de evt. slår ned. Men der er nogle sider ved lynene, som vi matematisk godt kan modellere. Det er emnet for dette kapitel.

12. Registrering og matematisk modellering af lyn

Over hele verden registreres lyn i forskellige netværk. Registreringen bygger blandt andet på lokalisering af lyn med GPS-udstyr. I USA hedder netværket NLDN og i Europa hedder netværket EUCLID, hvor blandt andet DMI deltager.

Nogle af disse netværk er kommercielle, andre gratis at bruge, bla. denne, som vi vil trække oplysninger fra til de følgende opgaver: <https://www.lightningmaps.org.>:



12.1 Data

Øvelse 12.1

I 2021 var antallet af lynudladninger (L) per måned i Belgien fordelt som tabellen viser

Md	Jan	Feb	Mar	Apr	Maj	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dec
L	206	355	215	1060	14684	49692	10930	5653	5458	516	286	160

- Bestem et boksplot, der viser antallet af lynudladninger i 2021 fordelt på måneder.
- Bestem det udvidede kvartilsæt for antallet af lynudladninger i 2021 fordelt på måneder.
- Bestem middeltallet for antallet af lynudladninger i 2021 fordelt på måneder.
- Undersøg om fordelingen af lynudladninger er højreskæv eller venstreskæv.

Øvelse 12.2

- Bestem frekvenserne og de kumulerede frekvenser for fordelingen af lynudladninger i Belgien i 2021 efter måned, hvor januar vælges som observation 1, februar som observation 2 osv.
- Tegn et søjlediagram og et trappediagram for fordelingen af lynudladninger i Belgien i 2021 efter måned, hvor januar vælges som observation 1, februar som observation 2 osv.

Øvelse 12.3

- Bestem data for lyn i Belgien i 2020 fra <https://www.lightningmaps.org.>

Monthly and yearly stroke count

Year an month: • Region:

- Udarbejd et boksplot for antallet af lynudladninger i Belgien i 2020 fordelt på måneder.
- Sammenlign fordelingen af lynudladninger i Belgien i 2020 og 2021 fordelt på måneder ud fra de to boksplots.

- d) Tegn et søjlediagram og et trappediagram for fordelingen af lynudladninger i Belgien i 2020 efter måned, hvor januar vælges som observation 1, februar som observation 2 osv.
- e) Sammenlign med fordelingen af lynudladninger i Belgien i 2020 og 2021 fordelt på måneder ud fra de to søjlediagrammer og trappediagrammer.

Øvelse 12.4

- a) Bestem data for Tyskland i 2021 fra <https://www.lightningmaps.org>.

Monthly and yearly stroke count

The screenshot shows a web interface with two dropdown menus. The first is labeled 'Year an month:' and has '2021' selected. The second is labeled 'Region:' and has 'Germany' selected. There is a small dot between the two dropdowns.

- b) Bestem frekvenserne og de kumulerede frekvenser for fordelingen af lynudladninger i Tyskland i 2021 efter måned, hvor januar vælges som observation 1, februar som observation 2 osv.
- c) Tegn et søjlediagram og et trappediagram for fordelingen af lynudladninger i Tyskland i 2021 efter måned, hvor januar vælges som observation 1, februar som observation 2 osv.
- d) Sammenlign med fordelingen af lynudladninger i Belgien i 2021 efter måned ud fra de to søjlediagrammer og de to trappediagrammer, hvor januar vælges som observation 1, februar som observation 2 osv.

Du kan her finde ekstra kilder med data om lyn:

<https://ghrc.nsstc.nasa.gov/lightning/dataset-info.html>

https://ghrc.nsstc.nasa.gov/lightning/data/data_lis_iss.html

<https://www.vaisala.com/en/products/systems/lightning/gld360>

Organisation Vaisala registrerer globalt 2 milliarder lyn pr år med en nøjagtighed på 1 km.

12.2 Matematisk model for styrken af et tilfældigt lyn

Det følgende er baseret på afsnit 1.3.2 i bogen "Mathematics and Technology" af Christiane Rousseau og Yvan Saint-Aubin, Springer Verlag, se litteraturlisten

Ifølge <https://www.weather.gov/safety/lightning-power>, så er strømstyrken af et lyn typisk på 30 kA, og artiklen "En statistisk analyse af danske lyndata 2002-2010" fortæller, at middelstrømstyrken ligger fra 0 kA til 20 kA.

I en model for styrken af et lyn, hvor styrken X er en stokastisk variabel, som måles i kA, gælder modellen:

$$P(X > I) = \frac{1}{1 + \left(\frac{I}{M}\right)^K},$$

så fordelingsfunktionen for X er:

$$F(I) = P(X < I) = 1 - P(X > I) = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{I}{M}\right)^K},$$

hvor I er lynets strømstyrke (målt i kA). Parametrene K og M afhænger af det geografiske område og bestemmes empirisk.

Øvelse 12.5

Vis at $P(X > 0) = 1$, og forklar betydningen af denne værdi.

Øvelse 12.6

- Parameteren K kan vælges at ligge i intervallet $[1;3]$ og M kan vælges at ligge i intervallet $[20;40]$.
- Undersøg grafen for fordelingsfunktionen $P(X < I)$, når parametrene K og M ligger i de to intervaller. Brug variabelkontrol.
- Hvad fortæller grafen for fordelingsfunktionen om fordelingen af lyn efter strømstyrke?

Øvelse 12.7

Bestem forskrift og graf for tæthedsfunktionen $f(I)$ ved differentiation af $F(I)$.

Når $M=25$ og $K=2$, så kaldes fordelingsfunktionen for en Popolansky funktion.

Øvelse 12.8

Bestem for $M=25$ og $K=2$ sandsynligheden for, at et tilfældigt lyn har:

- en strømstyrke, der er større end 10 kA.
- en strømstyrke, der er større end 50 kA.

Øvelse 12.9

Bestem for $M=25$ og $K=2$:

- medianen for X .
- nedre kvartil og øvre kvartil for X .

Øvelse 12.10

Bestem den største strømstyrke for de 95% svageste lyn.

Når $M=31$ og $K=2,6$, så kaldes fordelingsfunktionen for en Anderson-Erikson funktion.

Øvelse 12.11

Bestem for $M=31$ og $K=2,6$ sandsynligheden for, at et tilfældigt lyn har en strømstyrke:

- der er større end 10 kA.
- der er større end 50 kA.

Øvelse 12.12

Bestem for $M=31$ og $K=2,6$

- medianen for X .
- nedre kvartil og øvre kvartil for X .

Øvelse 12.13

Bestem den største strømstyrke for de 95% svageste lyn.

12.3 Matematisk model af strømstyrke af et lyn

Det følgende er baseret på en artikel, som du kan finde [her-link til 28](#).

Strømstyrken af lynet som funktion af tiden kan beskrives ved funktionen

$$i(t) = \frac{i_{\max}}{\eta} \cdot \frac{\left(\frac{t}{T}\right)^n}{1 + \left(\frac{t}{T}\right)^n} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

hvor t er tiden (målt i μs), $i(t)$ er lynets strømstyrke (målt i kA).

De forskellige parametre i modellen er

- i_{\max} , som er lynets maksimale strømstyrke
- η er en korrektionsparameter
- T er fronttidsparameter
- τ er forsinkelsestidsparameter

Øvelse 12.14

I udtrykket for $i(t)$ indgår to funktioner: $f(t) = \frac{\left(\frac{t}{T}\right)^n}{1 + \left(\frac{t}{T}\right)^n}$ og $g(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}$.

- Tegn grafen for f , hvor $n=10$ og $T=19 \mu\text{s}$. Beskriv forløbet af grafen f .
- Opret en skyde i intervallet $[0;30]$ for fronttidsparameteren T , og beskriv betydningen af T i forhold til navnet fronttidsparameteren.
- Opret en skyde i intervallet $[0;30]$ for n , og beskriv betydningen af n i forhold grafens udseende.
- Tegn grafen for g , hvor $\tau = 485$. Beskriv forløbet af grafen for g .
- Opret en skyde i intervallet $[0;500]$ for forsinkelsestidsparameteren τ , og beskriv betydningen af τ i forhold til navnet forsinkelsestidsparameteren.
- Tegn grafen for $f \cdot g$, og beskriv forløbet af grafen.
- Hvilken del af grafen for $f \cdot g$ styrer funktionen f henholdsvis funktionen g ?
- Tegn grafen for $\frac{i_{\max}}{\eta} f \cdot g$, hvor i_{\max} ligger i intervallet $[0;200]$ og η ligger i intervallet $[0;1]$ med en skridtlængde på $0,01$.
- Hvad gør i_{\max} og η ved grafen for $\frac{i_{\max}}{\eta} f \cdot g$?

Øvelse 12.15

For et konkret lyn er $i_{\max} = 100 \text{ kA}$, $n=10$, $\eta = 0,930$, $T=19 \text{ } \mu\text{s}$ og $\tau = 485 \text{ } \mu\text{s}$.

- a) Bestem strømstyrken af lynet efter $30 \text{ } \mu\text{s}$.
- b) Bestem tiden til strømstyrken af lynet er på 50 kA .
- c) Bestem tiden til strømstyrken er på 5% af i_{\max} .
- d) Bestem det tidspunkt, hvor $\frac{di(t)}{dt}$ er størst, og forklar betydningen af tallet i forhold til udviklingen af lynets strømstyrke.

Litteratur

Lærebøger

- ❖ *Hvad er matematik? 1, 2, 3* (af Bjørn Grøn, Bodil Bruun og Olav Lyndrup) indeholder en grundig indføring i matematisk modellering, herunder opstilling og løsning af differentialligninger.
- ❖ Jacob Fish, Ted Belytschko, *A First Course in Finite Elements*, John Wiley & Sons, 2007
- ❖ Erik Both og Gunnar Christiansen, *Termodynamik*, Polyteknisk Forlag, 2018 (1. udg 1988)

Specielle emner

- ❖ F. Heidler, J. Cvetic, *A class of analytical functions to study the lightning effects associated with the current front*, European Transactions on Electrical Power (ETEP), march 2007
- ❖ Sandra Andersson og Nadine Damsberg, *En statistisk analyse af danske lyndata 2002–2010*, *Vejret – tidsskrift for vejr og klima*, feb 2012. Artiklen er en bearbejdning af
- ❖ Sandra Andersson og Nadine Damsberg, *Statistisk analys av blixtdata för Danmark 2002-2010*, Bachelorprojekt i meteorologi (7. juni 2011), Lunds Universitet
- ❖ Tycho Brahe, *Den nye stjerne (De Stella Nova)*, oversat af Otto Gelsted og Thøger Larsen), Lemvig 1923, genudgivet af Lemvig Gymnasium
- ❖ Tycho Brahe, *Lille skrift om kometen 1577*, Eilertsens bogtrykkeri 1986
- ❖ Galilei, *Budskab om stjernerne*, dansk oversættelse af uddrag v/ Tom Bøgeskov, udgivet af Tycho Brahe Planetarium & Omnimaxteater, København 1999. Find det i ekstramaterialer
- ❖ Kopernikus (under pseudonymet: Commentariolus): *Skitse af Hypotese om de Himmelske Bevægelser*

Specielle kapitler i øvrige bøger:

- ❖ Christiane Rousseau og Yvan Saint-Aubin, *Mathematics and Technology*, Springer Verlag, 2010. Specielt afsnit 1.3.2 om lyn
- ❖ Christiane Rousseau og Yvan Saint-Aubin, *Mathematics and Technology*, Springer Verlag, 2010. Specielt kapitel 1, *Positioning on Earth and in Space*

Netadresser

[MXGS Valencia - Home \(uv.es\)](#) (the ASIM/MXGS spanish team web site.)

[geomat](#) (Projekter og materialer om klassisk navigation og om opdagelsesrejser)

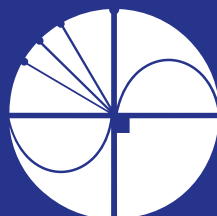
[Global Lightning Detection Network \(GLD360\) Vaisala Digital | Global Lightning Detection Network \(GLD360\) Vaisala](#) (den finske organisation Vaisala registrerer globalt 2 milliarder lyn pr år med en nøjagtighed på 1 km)

Projektet **Træk virksomhederne ind i undervisningen** fortæller, hvordan matematik er uundværlig for avancerede virksomheder i et moderne samfund. I filmene besøger Casper og Nicoline 12 forskellige virksomheder og lærer noget om den matematik, de anvender.

Casper og Nicoline møder ansatte, der er med helt i front af det matematiske arbejde: statistikere, ingeniører, matematik-økonomer eller epidemiologer m.fl. Alle har uddannelser med et betydelig matematisk indhold.

Til hver film kan du downloade undervisningsmaterialer. Her finder du øvelser, opgaveforløb, projekter og oplæg til studieretningsprojekter. Materialerne er opdelt i tre niveauer af sværhedsgrad fra 9 kl til 3 g. Emnerne er inspireret af filmen om virksomheden og den anvendte matematik, men man kan arbejde med materialet uden at have filmen kørende.

Hæftet om Matematikken bag rumforskning og -industri hos Terma knytter sig til filmen af samme navn.



**matematik
i arbejde**