3.2 Løsning af differentialligningen $y'' = -k^2 \cdot y$

Sætning 2: Løsning af differentialligningen $y'' = -k^2 \cdot y$

Den fuldstændige løsning til differentialligningen $y'' = -k^2 \cdot y$,
hvor k er et positivt tal, er samtlige funktioner med forskrift:

$$y = c_1 \cdot \cos(kt) + c_2 \cdot \sin(kt),$$

hvor c_1 og c_2 er konstanter.

Øvelse 6.15 **Undersøge mulige løsninger ved at gøre prøve – 2**

a) Vis, at funktionerne $y = \cos(kt)$ og $y = \sin(kt)$ begge er løsninger til ligningen.

b) Givet to tal c_1 og c_2. Vis, at $y = c_1 \cdot \cos(kt) + c_2 \cdot \sin(kt)$ er en løsning til ligningen.

Bemærkning: Du kan vise det direkte, eller blot anvende øvelse 6.5.

Bevis for sætning 2

Idet vi lader os lede af øvelsen, vil vi forsøge at anvende integrationsfaktorer af typen $\cos(kt)$ og $\sin(kt)$. Lad y være en løsning til: $y'' = -k^2 \cdot y$.

$$y'' + k^2 \cdot y = 0$$

$$y'' \cdot \sin(k \cdot t) + k^2 \cdot y \cdot \sin(k \cdot t) = 0 \qquad \text{Gang med } \sin(k \cdot t)$$

Vi prøver at følge ideen fra beviset i afsnit 3.1:

Produktreglen udtrykkes kort således: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$. Se på venstre side: $y'' = (y')'$ skal repræsentere f', dvs. f svarer til y', og $\sin(k \cdot t)$ skal repræsentere g. Dvs. vi mangler leddet $f \cdot g' = y' \cdot k \cdot \cos(k \cdot t)$.

Det motiverer os til den næste omskrivning, hvor vi indskyder ekstra led:

$y'' \cdot \sin(k \cdot t) + y' \cdot k \cdot \cos(k \cdot t) - y' \cdot k \cdot \cos(k \cdot t) + k^2 \cdot y \cdot \sin(k \cdot t) = 0$	Adder og subtraher leddet $y' \cdot k \cdot \cos(k \cdot t)$
$\left(y'' \cdot \sin(k \cdot t) + y' \cdot k \cdot \cos(k \cdot t)\right) - \left(y' \cdot k \cdot \cos(k \cdot t) - k^2 \cdot y \cdot \sin(k \cdot t)\right) = 0$	Saml leddene i to parenteser
$\left(y' \cdot \sin(k \cdot t)\right)' - \left(y \cdot k \cdot \cos(k \cdot t)\right)' = 0$	Anvend produktreglen to gange
$\left(y' \cdot \sin(k \cdot t) - y \cdot k \cdot \cos(k \cdot t)\right)' = 0$	Anvend reglen om ledvis differentiation
$y' \cdot \sin(k \cdot t) - y \cdot k \cdot \cos(k \cdot t) = a$	Anvend monotonisætningen, a er en konstant

Gentag nu ovenstående ved at gange $\cos(kt)$ på, og nå frem til ligningen

$y' \cdot \cos(k \cdot t) + y \cdot k \cdot \sin(k \cdot t) = b$	b er en konstant

Herefter adskiller beviset sig fra det foregående. De to ligninger anvendes til at bestemme y:

$$y' \cdot \cos(k \cdot t) + y \cdot k \cdot \sin(k \cdot t) = b$$

$$y' \cdot \sin(k \cdot t) - y \cdot k \cdot \cos(k \cdot t) = a$$

Ved at gange den øverste med $\sin(k \cdot t)$ og den nederste med $\cos(k \cdot t)$ og dernæst subtrahere (trække fra), får vi:

$y \cdot k \cdot (\sin(k \cdot t))^2 + y \cdot k \cdot (\cos(k \cdot t))^2 = b \cdot \sin(k \cdot t) - a \cdot \cos(k \cdot t)$	
$y \cdot k \cdot \left((\sin(k \cdot t))^2 + (\cos(k \cdot t))^2\right) = b \cdot \sin(k \cdot t) - a \cdot \cos(k \cdot t)$	Sæt uden for parentes
$y \cdot k = b \cdot \sin(k \cdot t) - a \cdot \cos(k \cdot t)$	Udnyt, at $(\sin(k \cdot t))^2 + (\cos(k \cdot t))^2 = 1$
$y = \frac{b}{k} \cdot \sin(k \cdot t) - \frac{a}{k} \cdot \cos(k \cdot t)$	Divider med k
$y = c_1 \cdot \cos(k \cdot t) + c_2 \cdot \sin(k \cdot t)$	Sæt $c_1 = -\frac{a}{k}$ og $c_2 = \frac{b}{k}$

Hermed har vi via omskrivninger regnet os frem til løsningsformlen. I dette tilfælde kan vi ikke regne os tilbage, men er nødt til at gøre prøve, som vi allerede har gjort i øvelse 6.15.

Når vi skal løse konkrete opgaver med givne talstørrelser, skal vi åbenbart bestemme to konstanter c_1 og c_2. Teknikken til at gøre dette kan være lidt forskellig fra opgave til opgave; men for at bestemme to konstanter skal vi have to oplysninger, som vi dernæst søger at udtrykke som ligninger.

Øvelse 6.16 Bestemmelse af parametrene c_1 og c_2 i løsningsformlen

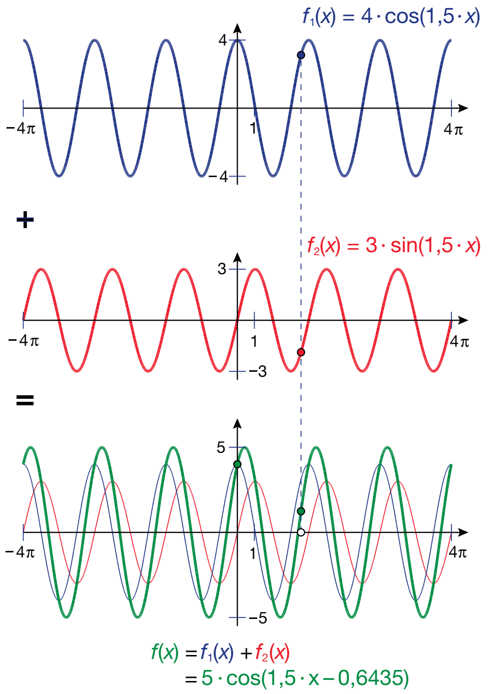
a) Bestem den fuldstændige løsning til $y'' + 9y = 0$. Bestem dernæst den løsning, hvis graf går gennem punktet $P\left(\frac{\pi}{9}, 2\sqrt{3}\right)$, og hvor tangenten i P har hældningskoefficienten −6.
(*Hint:* Vi har fået to begyndelsesbetingelser, nemlig hvilke? Opskriv de to ligninger, som disse oplysninger kan indsættes i, og løs dem.)

b) Bestem den løsning til $y'' = -y$, hvis graf går gennem punkterne $P(0,4)$ og $Q\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$, og skitser grafen.
(*Hint*: Opskriv den fuldstændige løsning, indsæt de to punkter, og bestem c_1 og c_2.)

Eksempel: Løsningerne til $y'' = -k^2 \cdot y$ kan skrives som én harmonisk svingning

Betragt funktionen:

$$f(x) = 4 \cdot \cos(1{,}5 \cdot x) + 3 \cdot \sin(1{,}5 \cdot x)$$



Den repræsenterer et typisk eksempel på en løsning til en differentialligning af typen

$$y'' = -k^2 \cdot y.$$

a) Det er en sum af to harmoniske svingninger. Hvad er svingningstiden og amplituden for disse?

b) Tegn grafen for f. Det ligner umiddelbart grafen for en harmonisk svingning. Hvis vi et øjeblik antager dette, hvad er så *amplituden* og *svingningstiden* for denne? (*Aflæs på grafen*)

Vi vil omskrive udtrykket for f ved hjælp af vektorregning. Først bemærker vi, at $\cos(1{,}5 \cdot x)$ og $\sin(1{,}5 \cdot x)$ kan opfattes som koordinater til et punkt på enhedscirklen:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \cos(1{,}5x) \\ \sin(1{,}5x) \end{pmatrix}$$

Dernæst lægger vi mærke til, at udtrykket for f har form som et *skalarprodukt* af to vektorer:

$$4 \cdot \cos(1{,}5 \cdot x) + 3 \cdot \sin(1{,}5 \cdot x) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(1{,}5x) \\ \sin(1{,}5x) \end{pmatrix}$$

Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ har længde 5. Hvis vi skriver $\vec{v} = 5 \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, så har vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ længde 1. Indsæt:

$$4 \cdot \cos(1{,}5 \cdot x) + 3 \cdot \sin(1{,}5 \cdot x) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(1{,}5x) \\ \sin(1{,}5x) \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(1{,}5x) \\ \sin(1{,}5x) \end{pmatrix} = 5 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$$

9788770668781_indhold.indb 290 12/08/2019 12.42

c) Vis $\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos(t_0) \\ \sin(t_0) \end{pmatrix}$, hvor i dette tilfælde $t_0 = 0{,}6435$.

d) Anvend formlen, der udtrykker skalarproduktet ved vinklen mellem vektorerne, til at vise:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} \cos(t_0) \\ \sin(t_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(1{,}5x) \\ \sin(1{,}5x) \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(1{,}5x - t_0) = \cos(1{,}5x - 0{,}6435)$$

e) Sammenfat resultaterne i det foregående til følgende omskrivning af funktionen *f*:

$$f(x) = 4 \cdot \cos(1{,}5 \cdot x) + 3 \cdot \sin(1{,}5 \cdot x) = 5 \cdot \cos(1{,}5x - 0{,}6435)$$

f) Bestem *amplitude* og *svingningstid* for *f* ud fra denne nye formel og sammenlign med b).

Tallet −0,6435 repræsenterer *faseforskydningen*. I kapitel 1 gennemgik vi, hvorledes man kan bestemme faseforskydningen ud fra det grafiske billede. Her er den harmoniske svingning på formen:

$$g(x) = 5 \cdot \cos(1{,}5x + \varphi_0)$$

Faseforskydningen φ_0 bestemmes grafisk ved at finde *x* koordinaten x_0 til det første maksimumspunkt efter 0. Da cos har maksimum i 0 (og i π), så må der her gælde:

$$1{,}5 \cdot x_0 + \varphi_0 = 0$$

g) Vend tilbage til grafen fra punkt b), bestem x_0, og anvend ligningen til at vise:

$$\varphi_0 = -0{,}6435$$

Konklusion: Den grafiske aflæsning giver både en amplitude, en svingningstid og en faseforskydning, der svarer til de størrelser, vi kan aflæse af funktionsudtrykket for den resulterende harmoniske svingning.

Eksemplet kan naturligvis generaliseres til følgende:

Praxis: Løsning til $y'' = -k^2 \cdot y$ skrevet som én harmonisk svingning

En løsning på formen $y = c_1 \cdot \cos(k \cdot x) + c_2 \cdot \sin(k \cdot x)$ kan skrives som en harmonisk svingning:

$y = A \cdot \cos(k \cdot x + \varphi_0)$, hvor

amplituden er $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, svingningstiden er $\frac{2\pi}{k}$ og

faseforskydningen φ_0 bestemmes af $\cos(\varphi_0) = \dfrac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$ og $\sin(\varphi_0) = \dfrac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$

9788770668781_indhold.indb 291 12/08/2019 12.42