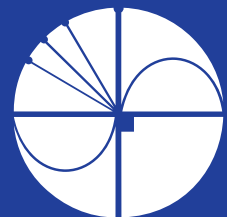
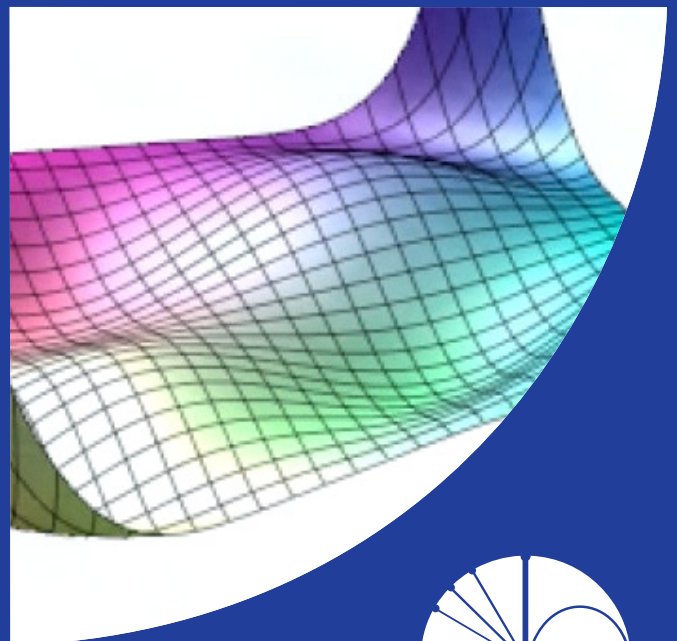
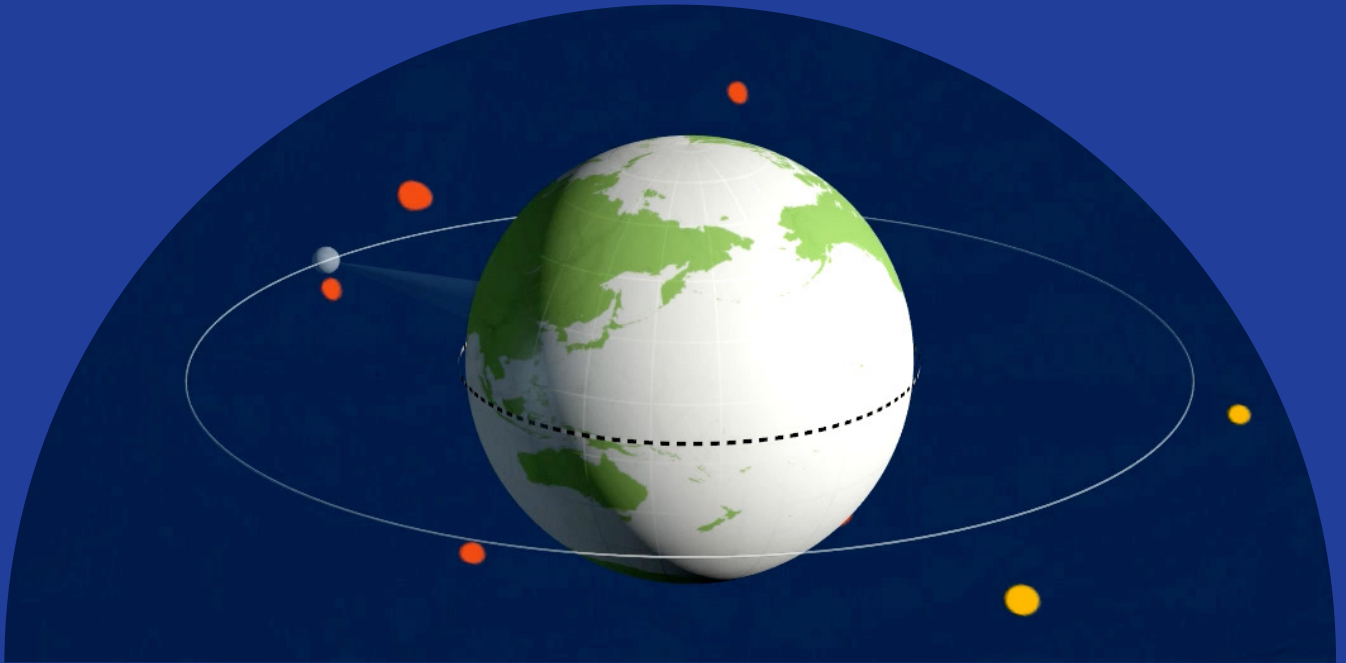


TRÆK VIRKSOMHEDERNE I UNDERVISNINGEN

# Matematikken bag TICRAAs parabolteknologi



Med  
**matematik**  
på  
**arbejde**



# **Matematikken bag parabler og avancerede parabler**

Undervisnings og Projektmaterialer  
til filmen

***Avanceret Parabolteknologi hos TICRA***

Bjørn Grøn (red.), Mads Leth og Mads Peter Steenstrup

© 2020 Konceptet: *Træk virksomhederne ind i undervisningen* tilhører forfatterne til lærebogssystemet *Hvad er matematik?* Bjørn Grøn, Bodil Bruun og Olav Lyndrup.

© 2020 undervisningsmaterialer til filmen *Avanceret Parabolteknologi hos TICRA* er produceret af *HEM – Produktion og Formidling*.

Grafisk koncept: Ulla Korgaard, Designeriet.

Filmene og de tilhørende projektmaterialer hostes af Lindhardt og Ringhof / Praxis på websitet:

[10 danske matematikere - LRU.dk \(praxis.dk\)](http://10.danske.matematikere-LRU.dk)

Filmene og de tilhørende projektmaterialer kan frit downloades og anvendes til selvstudium og i undervisningen. Hverken film eller projektmaterialer må gøres til genstand for kommerciel udnyttelse. Henvendelser om materialerne kan rettes til Bjørn Grøn: [bjgro1@gmail.com](mailto:bjgro1@gmail.com).

### **Undervisningsmaterialer til filmen *Avanceret Parabolteknologi hos TICRA***

Forfattere: Bjørn Grøn (red.), Mads Leth og Mads Peter Steenstrup.

Vi har forsøgt at finde eventuelle rettighedsindehavere, som kan tilkomme honorar i henhold til loven om ophavsret. Skulle der mod forventning være rettighedsindehavere, som måtte have krav på vederlag, vil dette blive håndteret, som om der var indgået en aftale.

Projektet *Træk virksomhederne ind i undervisningen* er forankret på Rysensteen Gymnasium.

Film og tilhørende materialer er produceret med støtte fra Novo Nordisk Fonden



## Undervisningsmaterialer til filmen *Avanceret Parabolteknologi hos TICRA*

0. Indledning .....	5
<b>Parabler og andengradspolynomier .....</b>	<b>6</b>
1. Parabler og andengradspolynomier – koefficienternes betydning .....	7
1.1 Betydningen af koefficienterne $a$ , $b$ og $c$ .....	8
1.2 Parablens symmetriakse og toppunkt .....	10
1.2.1 Prototypen for andengradspolynomiet $p_1(x) = x^2$ .....	10
1.2.2 Andengradspolynomiet $p_a(x) = a \cdot x^2$ .....	10
1.3 Parablens brændpunkt .....	10
1.4 Det generelle andengradspolynomium $p_a(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ og koefficienternes betydning for parablens beliggenhed .....	11
1.4.1 Udledning af formlen for toppunktet for en parabel .....	12
1.5 Andengradspolynomier i to variable - de tre typer paraboloider .....	13
<b>Parablers og parabolers geometriske egenskaber .....</b>	<b>15</b>
2. Parablers og parabolers geometriske egenskaber .....	16
2.1 Klassisk geometrisk definition af parablen .....	16
2.2 Konstruktion af parablen (metode 1) .....	16
2.3 Konstruktion af parablen (metode 2) .....	18
2.4 Beviset for at kurven er en parabel .....	19
2.5 Et par vigtige egenskaber ved parablens tangent .....	21
2.6 Parabolantenner og hvorfor strålerne lander i brændpunktet .....	23
2.7 Udledning af brændpunkts-formlen ved hjælp af differentialregning .....	23
2.8 Opgaveforløb om andre egenskaber ved parabeltangenter .....	25
2.9 Ellipsen – en af parablens søskende .....	26
<b>Ligningsløsning .....</b>	<b>27</b>
3. Ligningsløsning med en eller to ubekendte .....	28
3.1 Grafiske metoder .....	31
3.2 Samlet forløb om løsning af lineære ligninger med en og to ubekendte .....	32
3.3. To ligninger med to ubekendte .....	32
3.3.1 Substitutionsmetoden .....	33
3.3.2 Lige store koefficienters metode .....	34
<b>Matrixalgebra .....</b>	<b>35</b>
4. Matrixalgebra og ligningsløsning med determinantmetoden .....	36
4.1 Løsning af to ligninger med to ubekendte med determinantmetoden .....	36
4.2 Løsning af 3 ligninger med 3 ubekendte med determinantmetoden .....	38
4.3 Matrixalgebra og løsning af $n$ ligninger med $n$ ubekendte .....	39




4.4 Overbestemte og underbestemte systemer .....	40
<b>Numerisk løsning .....</b>	<b>41</b>
5. Numerisk løsning af ligninger og numerisk bestemmelse af nulpunkter .....	42
5.1 Bisektionsmetoden .....	42
5.2. Newton Raphsons metode .....	42
<b>Mindste kvadraters metode og bedste rette linje.....</b>	<b>45</b>
6. Regressionsanalyse, mindste kvadraters metode og bedste rette linje.....	46
6.1 Eksempel: Bedste rette linje gennem et sæt af datapunkter.....	46
6.2 Hvor god er tilnærmelsen - residualplot.....	47
6.3. Formlen for lineær regression.....	48
<b>Tilnærmelser med polynomier og trigonometriske funktioner .....</b>	<b>51</b>
7. Tilnærmelser med polynomier og trigonometriske funktioner .....	52
7.1 Kast med en bold analyseret med andengradsregression.....	52
7.2 Løbemønster analyseret med polynomisk regression .....	52
7.3 Bezierkurver – design med tredjegradspolynomier .....	53
7.4. Styrken og svagheden ved at anvende polynomier i en tilnærmelse .....	54
7.5 Fouriertransformationer – tilnærme med trigonometriske funktioner.....	55
<b>Matematikken slår buler.....</b>	<b>57</b>
8. Matematikken slår buler – ikke-lineære tilnærmelser i to variable .....	58
8.1 Kartesiske, sfæriske og cylinderkoordinater .....	58
8.1.1 Polære koordinater .....	58
8.1.2 Sfæriske koordinater .....	58
8.1.3 Cylinder-koordinater .....	60
8.2 At deformere og slå buler med matematik.....	61
8.3 Zernikepolynomier .....	62
Bilag: Zernikepolynomier i cylinderkoordinater og i kartesiske koordinater .....	67
<b>Satellitter .....</b>	<b>68</b>
9. Satellitter .....	69
9.1 Keplers 3. Lov og potensfunktioner .....	69
9.1.1 Horisonten.....	71
9.2 Udledning af Keplers 3. lov.....	72

## 0. Indledning

I projektet *Træk virksomhederne ind i undervisningen* vil der blive produceret 12 film med tilhørende undervisningsmaterialer til hver film. Det foreliggende er skrevet i tilknytning til filmen **Avanceret Parabolteknologi hos TICRA**. Der er tydelige referencer i hvert kapitel til, hvilke elementer fra filmen vi her dykker ned i. Men materialet kan sagtens anvendes uafhængigt af filmen, så man behøver ikke have filmen kørende, mens man arbejder med de matematiske problemer. Det kan dog være interessant for eleverne at gense hele eller dele af filmen, når man har arbejdet sig igennem et emne.

Materialet er opdelt i en række kapitler, der kan gennemgås hver for sig. Det enkelte kapitel bygger således ikke på de foregående. Det betyder også, at der ikke er lagt en progression ind som følger kapitelinddelingen. Derimod er der lagt symboler ind, der indikerer at dette kapitel eller afsnit kan man arbejde med, når man er på pågældende niveau. Man kan naturligvis også have glæde af at se et stof på nye måder, selv om man selv nu befinder på et lidt højere niveau. Og man kan prøve at udfordre sig selv ved at gå i krig med et emne og øvelser, der er markeret til et højere niveau end ens eget.

Niveauerne er markeret med symbolerne:

 9. klasse og hovedparten af 1.g	 Slut 1.g og 2.g	 3.g
--	--	--

En stor del af emnerne er med i de pågældende niveauers læreplaner / curriculum. Men de behandles givetvis her med en anden vinkel – og det kan være en fordel i læringsprocessen at se emner belyst og anvendt på forskellige måder.

Der vil være emner, specielt i kapitel 8 som vil forekomme meget udfordrende også for elever i 3.g. Vi har medtaget dette, dels fordi vi her nærmer os den matematik, de faktisk anvender i TICRA, og dels fordi det måske kan inspirere til studieretningsprojekter.

Der lægges hele materialet igennem op til en udstrakt brug af matematiske værktøjsprogrammer, både til geometriske illustrationer og ræsonnementer, til grafiske metoder og til egentlige beregninger. Vi har hovedsageligt selv inddraget henh. Maple og GeoGebra som værktøjer.

Film og materialer er til frit download og anvendelse i undervisning og selvstudier. Bliver undervisningsmaterialet downloadet og dele af det kopieret, skal der angives kilde.

Forkortelsen HEM står for lærebogssystemet *Hvad er matematik?* fra hvis website, der frit kan hentes mange projekter og andre materialer. En del steder i materialerne markeres med *Link til 7* (og andre tal), at her kan der hentes ekstra materialer ind. Det kan fx være skabeloner i værktøjsprogrammer, eller projekter, hvor man kan fordybe sig yderligere i et emne. Disse tilgås via website for TICRA filmen. Find nummeret og klik

Vi vil meget gerne have feedback med kommentarer og forslag der kan forbedre de kommende samlinger af undervisningsmaterialer.

**Film og undervisningsmaterialer er fremstillet med støtte fra Novo Nordisk Fonden**

# 1. Parabler og andengradspolynomier koefficienternes betydning



I filmen forklarer Oscar Borries hvordan en parabel fremkommer som grafen for et andengradspolynomium  $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ . Hvilken betydning har koefficienterne  $a$ ,  $b$  og  $c$ ? I filmen lægges koordinat-systemet, så vi der nøjes med at variere koefficienten til  $x^2$ . I det følgende kapitel ser vi også på betydningen af  $b$  og  $c$ .

# 1. Parabler og andengradspolynomier – koefficienternes betydning

(Materialerne i dette kapitel er lånt fra HEM2, kapitel 2)

Andengradspolynomier er en ny type funktioner, som bygger videre på førstegradspolynomier, der har forskriften  $f(x) = a \cdot x + b$ . Førstegradspolynomier kaldes også for *lineære funktioner*.

## Øvelse 1.1:

- a) Førstegradspolynomiet  $f(x) = a \cdot x + b$  består af et *konstant led* og et *førstegradsled*. Angiv disse.  
 b) Vi siger, at førstegradspolynomiet indeholder to *koefficienter*. Angiv disse, og forklar betydningen af disse parametre i relation til førstegradspolynomiets graf.

*Bemærk:* Koefficienterne er de faste tal, og  $x$  er den variable. Men vi er også, som du skal se nedenfor, interesseret i at studere, hvad der sker når koefficienterne ændres. I sådanne undersøgelser kalder vi ofte koefficienterne for *parametre*.

Andengradspolynomiet opstår ud fra førstegradspolynomiet ved, at vi tilføjer et *andengradsled* til de to eksisterende led i forskriften. Et andengradsled er et led, hvor  $x$  opløftes til anden potens.

### Definition: Andengradspolynomium

Et andengradspolynomium er en funktion med forskriften

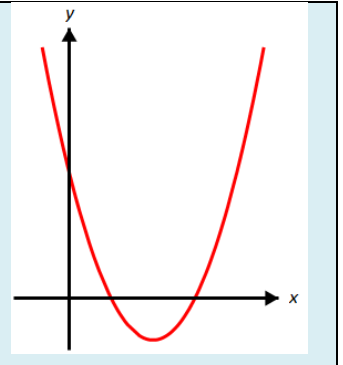
$$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \quad a \neq 0$$

Parametrene  $a$ ,  $b$  og  $c$  kaldes andengradspolynomiets *koefficienter*.

Den ovenstående forskrift kaldes standardformen for andengradspolynomiet.

Grafen for et andengradspolynomium kaldes en *parabel*.

Alle andengradspolynomier har et minimum eller et maksimum. Det tilsvarende sted på grafen kaldes i begge tilfælde for *toppunktet*.



*Bemærk:* Der findes en formel for toppunktet. Du kan finde formelen i sætning 3 i afsnit 1.3. I det afsnit ligger også en henvisning til, hvordan formelen udledes.

## Øvelse 1.2:

Angiv koefficienterne  $a$ ,  $b$  og  $c$  i de følgende andengradspolynomier:

- a)  $p(x) = 2x^2 - 7x + 25$       b)  $p(x) = 0,25x^2 + 2x - 3,5$       c)  $p(x) = -4x^2 + 2x + 1$   
 d)  $p(x) = -x^2$       e)  $p(x) = x^2 - 4$       f)  $p(x) = 3x^2 - 9x$

## Øvelse 1.3

a) Tegn på et kvadreret papir, og i samme koordinatsystem, graferne for:

$$p(x) = x^2 \quad q(x) = -x^2 \quad r(x) = x^2 + 4$$

Kommenter de grafiske forløb for de tre funktioner, sammenholdt med deres forskrifter.

## Øvelse 1.4

b) Tegn med brug af et værktøjsprogram graferne for funktionerne:

$$f(x) = 2x^2 - 7x + 25 \quad g(x) = 0,25x^2 + 2x - 3,5 \quad h(x) = -4x^2 + 2x + 1$$

Kommenter de grafiske forløb for de tre funktioner, sammenholdt med koefficienterne  $a$  og  $c$ ,

## 1.1 Betydningen af koefficienterne $a$ , $b$ og $c$

I forskriften for andengradspolynomiet indgår som nævnt de tre koefficienter  $a$ ,  $b$  og  $c$ . De har hver for sig en karakteristisk betydning for parablens form og beliggenhed i koordinatsystemet.

### Øvelse 1.5: Undersøg betydningen af $a$ , $b$ og $c$ ved at hente færdigt udarbejdet værktøjsark

Du kan her finde en Animation af en parabel, hvor der er indlagt skydere:

- Konstrueret i Maple ([link til 1](#))
- Konstrueret i Geogebra ([link til 2](#))

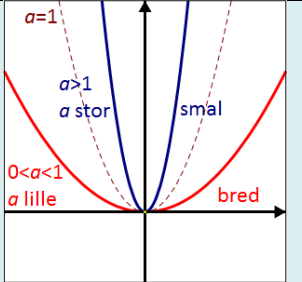
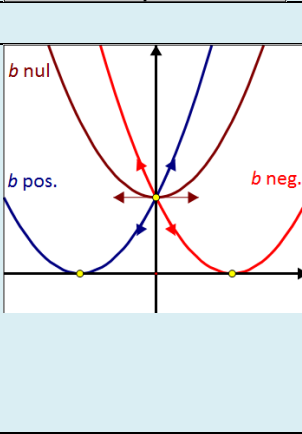
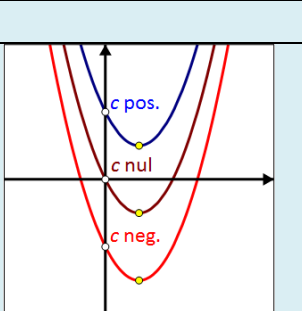
### Øvelse 1.6: Undersøg betydningen af $a$ , $b$ og $c$ ved selv at konstruere et værktøjsark

Vi vil nu undersøge betydningen af andengradspolynomiets koefficienter ved hjælp af skydere i et værktøjsprogram.

- Tegn en graf for andengradspolynomiet  $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  med en skyder for hver af parametrene  $a$ ,  $b$  og  $c$ . Brug fx  $x$ -intervallet fra  $-5$  til  $5$  og  $y$ -intervallet fra  $-10$  til  $10$ . Sæt som udgangspunkt alle skyderne på værdien  $1$ , og husk: *Variabelkontrol*, dvs. varier kun en af koefficienterne af gangen.
- Tilføj grafen for den konstante funktion  $f(x) = c$ , svarende til den konstante del af andengradspolynomiet.  
Hvad sker der med graferne for  $f$  og  $p$ , når vi varierer på parameteren  $c$ ? Hvilken betydning har parameteren  $c$  for parablens beliggenhed? Hvad sker der med parabeln, hvis  $c$  har værdien  $0$ ? Hvordan kan vi aflæse fortegnet for  $c$ ?
- Tilføj grafen for den lineære funktion  $g(x) = b \cdot x + c$ , svarende til den lineære del af andengradspolynomiet.  
Hvad sker der med graferne for  $g$  og  $p$ , når vi varierer på parameteren  $b$ ? Hvilken betydning har parameteren  $b$  for parablens beliggenhed? Hvad sker der med parabeln, hvis  $b$  har værdien  $0$ ? Hvordan kan vi aflæse fortegnet for  $b$ ?
- Tilføj grafen for andengradspolynomiet  $h(x) = a \cdot x^2$ , svarende til andengradsleddet i andengradspolynomiet. Skjul evt. de foregående hjælpefunktioner  $f$  og  $g$ .  
Hvad sker der med graferne for  $h$  og  $p$ , når vi varierer på parameteren  $a$ ? Hvilken betydning har parameteren  $a$ ? Hvad sker der med parabeln, hvis  $a$  får den forbudte værdi  $0$ ? Hvordan kan vi aflæse fortegnet for  $a$ ?

Vi opsamler nu de vigtigste af disse egenskaber, som vi alt i alt har fundet frem til:

<b>Sætning 1: Betydningen af koefficienterne <math>a</math>, <math>b</math> og <math>c</math> i et andengradspolynomium</b>	
$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ .	
<b>Betydningen af <math>a</math>:</b>	
<p><i>Fortegnet for <math>a</math>:</i></p> <p>Hvis <math>a</math> er negativ, vender parabelgrenene nedad (parabeln er <i>sur</i>)</p> <p>Hvis <math>a</math> er nul, er der ikke tale om et andengradspolynomium. Grafen udarter da til en ret linje.</p> <p>Hvis <math>a</math> er positiv, vender parabelgrenene opad (parabeln er <i>glad</i>)</p>	

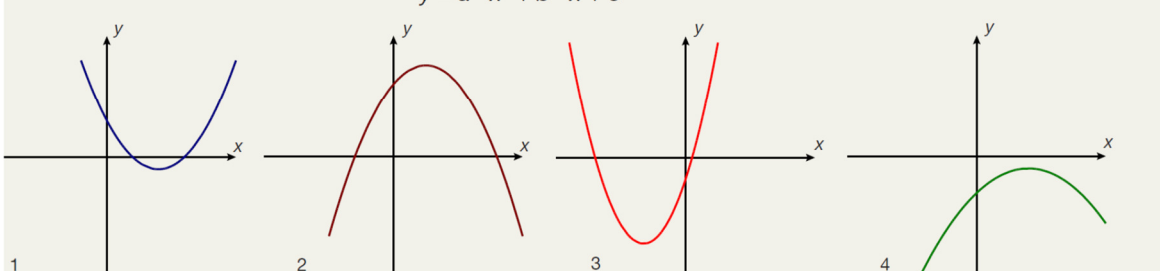
<p><b>Størrelsen af a:</b>                  Hvis <math>a</math> ligger tæt på 0, er krumningen lille og parablen derfor meget flad.                  Hvis <math>a</math> ligger langt fra 0, er krumningen stor og parablen derfor meget smal</p>	
<p><b>Betydningen af b:</b>                  Koefficienten <math>b</math> angiver parablens hældning omkring skæringspunktet med <math>y</math>-aksen.</p> <p><b>Fortegnet for b:</b>                  Hvis <math>b</math> er negativ, er andengradspolynomiet aftagende omkring skæringspunktet med <math>y</math>-aksen.                  Hvis <math>b</math> er nul, er hældningen omkring skæringspunktet nul og parablen skærer <math>y</math>-aksen i sit toppunkt.                  Hvis <math>b</math> er positiv, er andengradspolynomiet voksende omkring skæringspunktet med <math>y</math>-aksen.</p>	
<p><b>Betydningen af c:</b>                  Koefficienten <math>c</math> angiver skæringspunktet med <math>y</math>-aksen.</p> <p><b>Fortegnet for c:</b>                  Hvis <math>c</math> er negativ, skærer parablen <math>y</math>-aksen under <math>x</math>-aksen.                  Hvis <math>c</math> er nul, går parablen gennem koordinatsystemets begyndelsespunkt (0,0).                  Hvis <math>c</math> er positiv, skærer parablen <math>y</math>-aksen over <math>x</math>-aksen.</p>	

**Øvelse 1.7: Beliggenheden af parablens toppunkt.**

Anvend sætning 1 til at besvare følgende: Hvor ligger parablens toppunkt i forhold til  $y$ -aksen, hvis  $a$  og  $b$  har samme fortegn? Hvor ligger det, hvis  $a$  og  $b$  har modsat fortegn?

**Øvelse 1.8: Aflæse fortegn for koefficienter ud fra en tegning**

Nedenfor ses fire parabler. Aflæs fortegnene for koefficienterne  $a$ ,  $b$  og  $c$  for det tilhørende andengradspolynomium.

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$


**Øvelse 1.9: Skitsere tegning af grafen ud fra koefficienternes fortegn**

Skitsér grafen for en parabel der opfylder betingelserne:

- a)  $a > 0$ ,  $b > 0$  og  $c > 0$       b)  $a < 0$ ,  $b < 0$  og  $c > 0$ .      c)  $a > 0$ ,  $b > 0$  og  $c < 0$ .

## 1.2 Parablens symmetriakse og toppunkt

Vi vil nu undersøge parablens form nærmere. Vi vil starte med det simpleste andengradspolynomium  $p(x) = x^2$ , den såkaldte *prototype* med *enhedsparablen* som graf. Derfra vil så arbejde os frem mod at vise, at alle graferne for vilkårlige andengradspolynomier har samme form som prototypen. Hvis vi kan forstå prototypen, kan vi altså forstå dem alle!

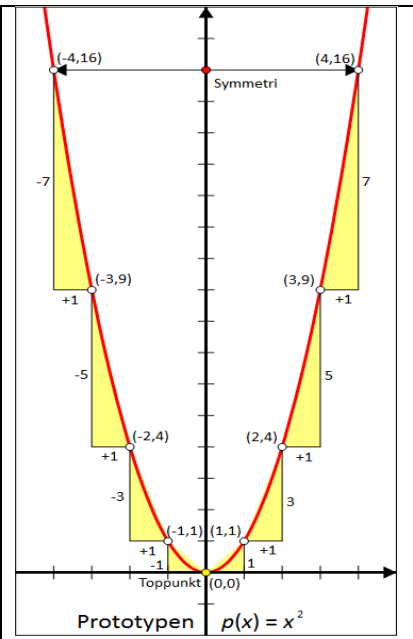
### 1.2.1 Prototypen for andengradspolynomiet $p_1(x) = x^2$

Enhedsparablen er særlig simpel.

Den er tydeligvis symmetrisk omkring  $y$ -aksen, fordi kvadratet på tallene  $x$  og  $-x$  er det samme. Dvs. ved at spejle grafen i  $y$ -aksen, går grafen over i sig selv.

Den har toppunkt i  $(0,0)$ , som er et globalt minimum for funktionen, fordi alle kvadrattal er positive eller i det mindste 0, og derfor er alle  $y$ -værdierne større end eller lig med 0.

Endelig går den gennem punktet  $(1,1)$ . Når vi går én ud fra toppunktet (hvad enten vi går fremad eller bagud langs  $x$ -aksen), går vi altså samtidigt én op. Fortsætter vi med at gå én fremad (eller bagud), gennemløber vi på samme måde alle kvadrattallene 4, 9, 16, 25, ... . Tilvæksterne svarer netop til de ulige tal 1, 3, 5, 7, ... og de voksende stigningstal viser, hvordan parablen bliver mere og mere stejl i takt med, at vi fjerner os fra toppunktet. Faktisk vokser stigningen jævnt; dette kan man gå dybere ind i ved hjælp af differentialregningen.

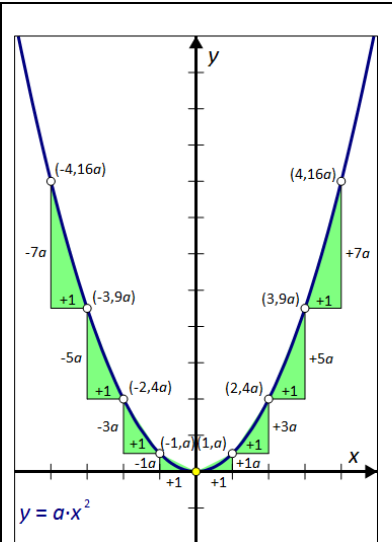


### 1.2.2 Andengradspolynomiet $p_a(x) = a \cdot x^2$

Hvis fx  $a$  har værdien 2, ser vi at alle  $y$ -værdier bliver dobbelt så store. Det viser at grafen er blevet strakt ud med en faktor 2 i lodret retning ud fra  $x$ -aksen, dvs. alle  $y$ -værdierne blevet to gange så store. Men derudover er formen uændret, dvs. grafen er stadigvæk symmetrisk omkring  $y$ -aksen. Tilsvarende hvis  $a$  har værdien -3, så har alle  $y$ -værdierne skiftet fortegn, og de er samtidigt blevet numerisk tre gange så store. Denne gang vender parablen altså grenene nedad, men derud over har den samme form.

Da parablen denne gang går gennem punkterne  $(-1, a)$  og  $(1, a)$ , ser vi, at når vi går én ud fra toppunktet, går vi samtidigt stykket  $a$  op (eller ned, hvis  $a$  er negativ).

Konstanten  $a$  regulerer altså parablens krumning: For små værdier af  $a$  (tæt på 0) er parablen meget bred og den krummer kun lidt, mens den for store værdier af  $a$  (langt over 1) er meget slank og krummer voldsomt.



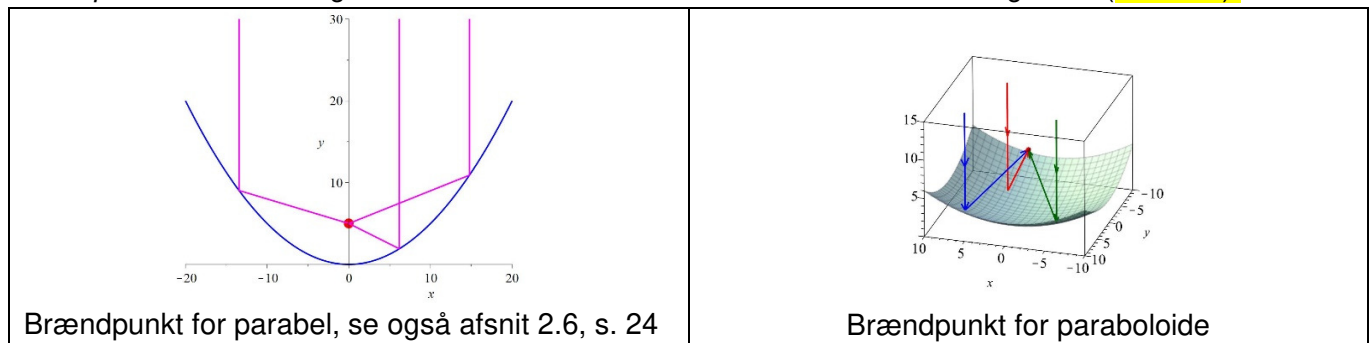
## 1.3 Parablens brændpunkt

I matematikhistorien kan parablen føres helt tilbage til den græske matematik. Det, vi betegner Grækenland, bestod dengang for over 2000 år siden af en lang række bystater spredt ud over middelhavsområdet. Omkring 300 fvt. er der i Aleksandria etableret et stort universitet med tilhørende bibliotek, der rummede hundredtusindvis af litterære og videnskabelige værker skrevet på papyrus eller pergament.



Her underviste og forskede Euklid, der omkring 300 fvt. skrev 13 bøger om det vi idag kalder klassisk geometri, og Apollonius (ca. 262-190 fvt.), der skrev 8 bøger om det vi idag kalder *keglesnit*. Det var Apollonius, der navngav disse *ellipse*, *parabel* og *hyperbel*.

I kapitel 2 viser vi, at en parabel med ligningen  $y = a \cdot x^2$  har den egenskab, at enhver stråle, der kommer lodret ned langs symmetriaksen, og som spejles i parablens (eller parabolens) overflade, derefter vil gå gennem *samme punkt på y-aksen*, nemlig punktet med koordinaterne  $\left(0, \frac{1}{4 \cdot a}\right)$ . Dette punkt kaldes *brændpunktet*. Du kan lege med illustrationen til venstre i animation nr. 9 i følgende: [\(Link til 3\)](#).



Her vil vi lave nogle indledende tegneøvelser for at undersøge denne påstand.

### Øvelse 1.10. Eksperimentel undersøgelse af stråler, der spejles i en parabel.

a) Tegn i et værktøjsprogram graferne for parablerne  $y = x^2$ ,  $y = 0,5 \cdot x^2$ ,  $y = 0,2 \cdot x^2$ ,  $y = 0,1 \cdot x^2$  Afsæt for hver af dem deres brændpunkt.

b) Konstruer en animation, hvor du demonstrerer sammenhængen mellem parabeln  $y = a \cdot x^2$ , og brændpunktet  $\left(0, \frac{1}{4 \cdot a}\right)$ . (Du kan [her](#) finde en vejledning med mange eksempler på, hvordan man kan animere grafer i Maple [\(link til 3\)](#))

d) Vi vil nu fokusere på grafen for  $y = 0,2 \cdot x^2$ . Tegn grafen op på et vandret liggende A4-papir. Afsæt brændpunktet.

e) Vælg nu et punkt på parabeln, og tegn efter øjemål en tangent i dette punkt.

f) Tegn en lodret linje, parallel med symmetriaksen, der lander i dette punkt, samt en linje fra brændpunktet til dette punkt. Mål med en vinkelmåler vinklerne som disse linjer danner med tangenten.

g) Gør det samme et par andre steder. Konklusion?

## 1.4 Det generelle andengradspolynomium $p_a(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ og koefficienternes betydning for parablens beliggenhed

Vi vil nu prøve at forstå sammenhængen mellem parabeln  $y = a \cdot x^2$  og  $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  (samme  $a$ -værdi!).

**Øvelse 1.11: Sammenligne formen på parabler med samme a-tal**

Udregn tabelværdier for følgende andengradspolynomier og tegn dernæst i hånden på et "gennemsigtigt" kvadreret papir graferne for dem:

1)  $p(x) = x^2 - 5x + 8$ , der sammenholdes med  $p_1(x) = x^2$

2)  $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$ , der sammenholdes med  $p_2(x) = 2x^2$

Sammenlign formen på dem to og to ved at lægge graferne ovenpå hinanden.

Når vi tegner graferne for andengradspolynomier med samme a-tal, kan vi tydeligt se slægtskabet. Dette kan man undersøge eksperimentelt

**Øvelse 1.12 Eksperimentel undersøgelse af parablers beliggenhed**

Gennemfør en undersøgelse af, om man kan parallelforskyde parabler, der har samme koefficient til  $x^2$ . Du kan anvende den animation med indlagte skydere, du finder her:

- Konstrueret i [Maple](#) ([link til 4](#))
- Konstrueret i [Geogebra](#) ([link til 5](#))

Øvelsen indikerer, at parabler med samme koefficient til  $x^2$  kan parallelforskydes over i hinanden. Det kan man gennemføre et bevis for. Dette er emnet for næste afsnit

**1.4.1 Udledning af formlen for toppunktet for en parabel**

Det er ikke så let at gætte sig til en formel for toppunktet ud fra eksperimenter. Her må vi bruge noget teori. Man kan udlede formlen ved hjælp af differentialregning, idet toppunktet er det sted, hvor grafen har vandret tangent. Har du lært differentialregning, så prøv at anvende den metode.

Man kan også udlede formlen algebraisk, dvs ved at regne symbolsk med bogstaver i stedet for tal. Dette er gennemført i et dokument, du kan hente [her](#) ([link til 6](#))

Man når selvfølgelig frem til samme formel, uanset metode, nemlig følgende:

**Sætning 2: Parablers form og beliggenhed – toppunkt og symmetrilinje**

Grafen for andengradspolynomiet  $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  har samme form som parablen med forskriften  $p_a(x) = a \cdot x^2$ , idet den er en parallelforskydning af denne.

Parablen er symmetrisk omkring den lodrette linje  $x = -\frac{b}{2a}$  og har toppunkt i  $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right)$ , hvor  $d$

er den såkaldte diskriminant for andengradspolynomiet givet ved  $d = b^2 - 4a \cdot c$ .

Koefficienten  $a$  bestemmer parablens *krumning*: Går vi stykket 1 vandret ud fra toppunktet, skal vi gå stykket  $a$  lodret op (hvis  $a$  er positiv) og ellers lodret ned (hvis  $a$  er negativ).

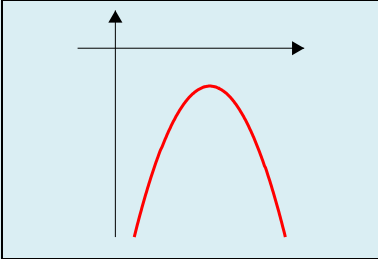
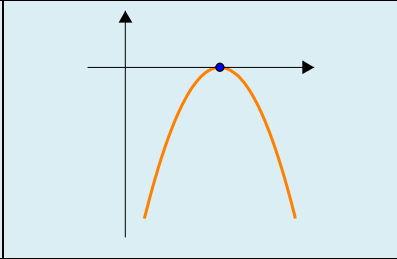
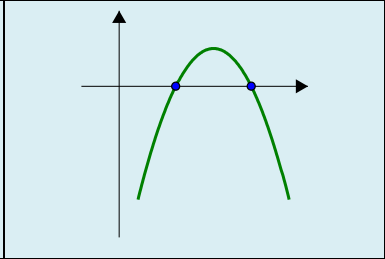
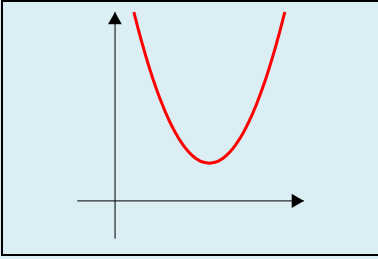
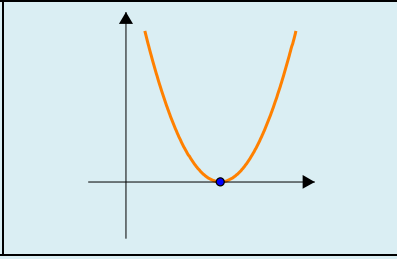
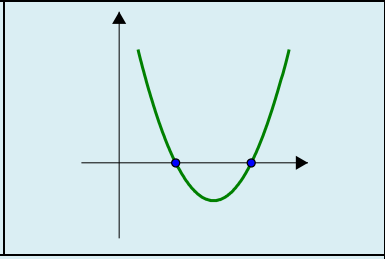
**Øvelse 1.13: Toppunkter**

- Grafen for funktionen:  $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$  er en parabel. Bestem koordinatsættet til parablens toppunkt.
- Bestem koordinatsættet til toppunktet for parablen med ligningen:  $y = x^2 - 6x + 19$ .
- Tegn begge grafer med dit værktøjsprogram og kontroller grafisk dine resultater i a) og b).

Ud fra sætning 2 og vores tidligere undersøgelser kan vi nu udtrykke vores viden om parablers beliggenhed ved hjælp af diskriminanten:

**Sætning 3: Andengradspolynomier i en variabel – grafens beliggenhed**

Til ethvert andengradspolynomium  $f(x) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$ , hvor  $A \neq 0$ , er tilknyttet en diskriminant  $D = B^2 - 4 \cdot A \cdot C$ . Grafen for andengradspolynomiet er en parabel, der er glad (opad hul, konveks) hvis  $A$  er positiv og sur (nedad hul, konkav), hvis  $A$  er negativ. Det er fortegnet for diskriminanten, der afgør grafens beliggenhed i forhold til 1. akse:

	$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
$A < 0$ Sur Nedad hul Konkav			
$A > 0$ Glad Opad hul Konveks			
	Hvis $D < 0$ rammer grafen ikke x-aksen, dvs. den tilhørende andengradsligning $f(x) = 0$ har ingen løsninger. Andengradspolynomiet kan da ikke skifte fortegn.	Hvis $D = 0$ rører parabelen x-aksen i et enkelt punkt, dvs. den tilhørende andengradsligning $f(x) = 0$ har netop en løsning. Andengradspolynomiet kan da ikke skifte fortegn.	Hvis $D > 0$ skærer parabelen x-aksen i to punkter, dvs. den tilhørende andengradsligning $f(x) = 0$ har to løsninger. Andengradspolynomiet skifter da fortegn undervejs.

**1.5 Andengradspolynomier i to variable - de tre typer paraboloider**

Når en parabel drejes om sin symmetriakse, så tegnes en "skål-agtig" rund og symmetrisk figur op i rummet. Denne tredimensionelle figur kaldes en paraboloid. Og en parabol er et lille udsnit af denne skål, normalt "klippet" ud af siden af paraboloiden.

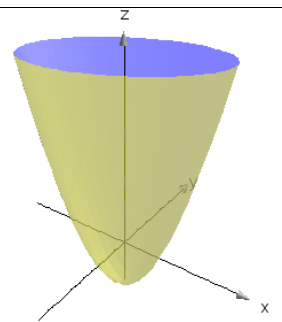
Paraboloiden er graf for en funktion af to variable, hvor den mest simple version er  $f(x, y) = x^2 + y^2$

Den generelle forskrift for et andengradspolynomier i to variable er

$$f(x, y) = \underbrace{a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2}_{\text{Andengradsleddene}} + \underbrace{d \cdot x + e \cdot y}_{\text{Førstegradsleddene}} + \underbrace{k}_{\text{Konstantleddet}}$$

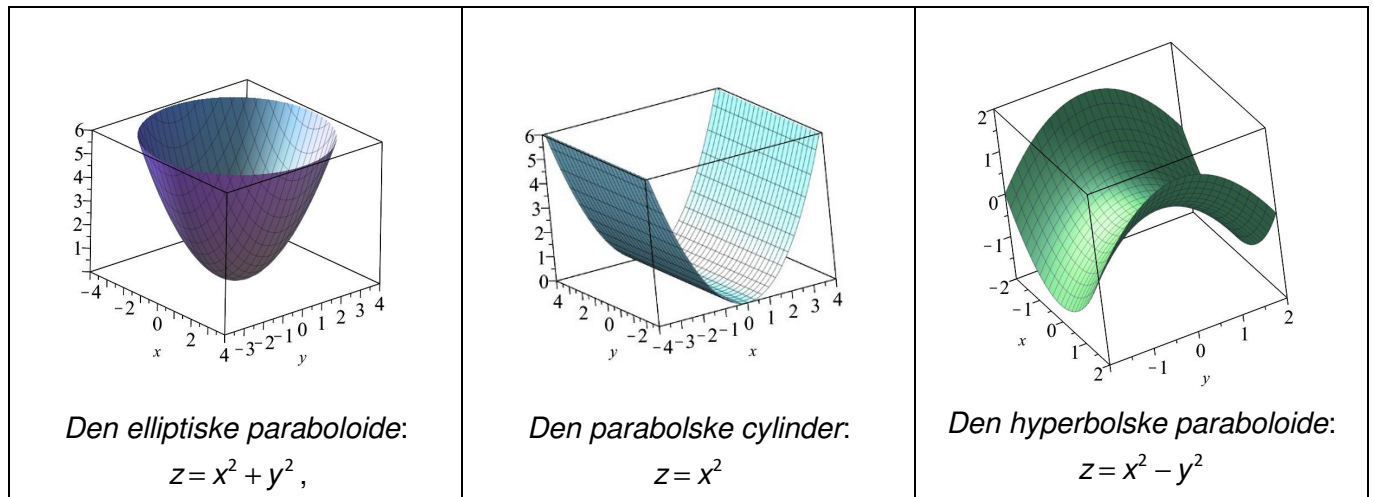
Læg mærke til, at der nu er tre andengradsled – det midterste led, altså  $b \cdot x \cdot y$ , kaldes *det blandede led*.

Ser vi på forskriften, ser det ud til, at må være forskellige slags paraboloider. Eksempelvis: Hvordan mon grafen bliver, hvis  $a$  og  $c$  har forskellige fortegn? Spørgsmålet er så hvor mange forskellige typer paraboloider, der findes?



For andengradspolynomier i én variabel findes der kun én prototype  $y = x^2$ . Alle andre parabler fremkommer af denne ved hjælp af simple geometriske transformationer. Dette er specielt for andengradspolynomier, fordi de er så simple. For tredjegradspolynomier findes der fx. 3 prototyper:  $y = x^3 - 3x$ ,  $y = x^3$  og  $y = x^3 + 3x$ .

Og for andengradspolynomier i to variable gælder noget tilsvarende. Udgangspunktet er parabelen  $z = x^2$ , der giver anledning til de følgende *tre prototyper*:



Du kan fordybe dig mere i dette emne ved at dykke ned i et [projekt](#) herom fra HEM3 ([link til 7](#))

Når vi siger, at der er tre prototyper, betyder det at alle andre paraboloider kan fremkomme af de tre prototyper ved hjælp af simple geometriske transformationer (lineære koordinattransformationer).

# 2.

## Parablers og parabolers geometriske egenskaber

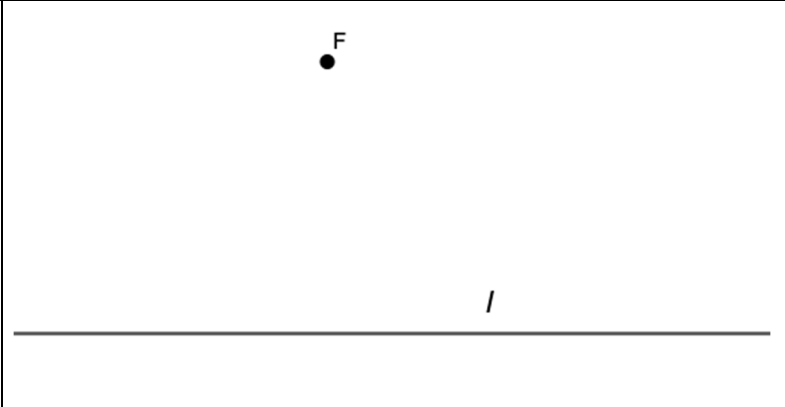


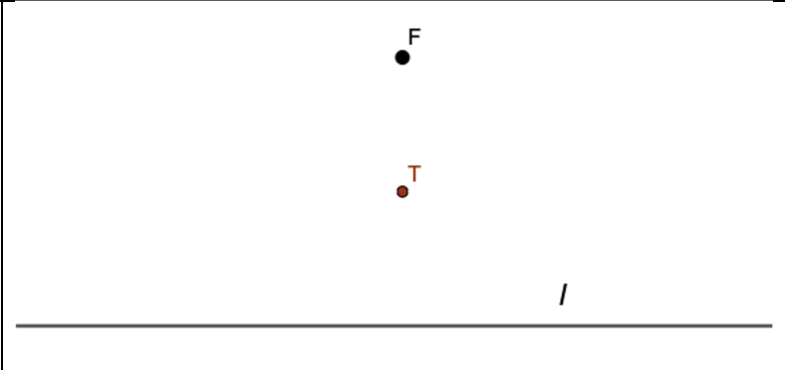
I filmen fortæller Oscar Borries, at enhver parabel og parabol har et brændpunkt, og at det netop er denne egenskab, der gør at de kan anvendes til kommunikation. I dette kapitel fordyber vi os i denne geometriske egenskab og beviser, at de parabler, vi i kapitel 1 præsenterede som grafer, faktisk har brændpunkter.

## 2. Parablers og parabolers geometriske egenskaber

En af de vigtigste egenskaber ved en parabel er, at den har et såkaldt brændpunkt. Brændpunktet giver mulighederne for de mange anvendelser, fx som parabolantenne, der opsamler et mylder af tv-kanaler og andre signaler fra satellitter, der kredser omkring Jorden. I dette kapitel vil vi give en geometrisk definition af parabelen. Derefter vil vi eftervise at den geometriske beskrivelse rent faktisk giver en parabel, sådan som vi definerede den i kapitel 1. Det gør vi ved at indlægge geometrien i et koordinatsystem og vise at den parabellignende kurve rent faktisk får ligningen  $y = a \cdot x^2$ , der jo er vores definition på en parabel.

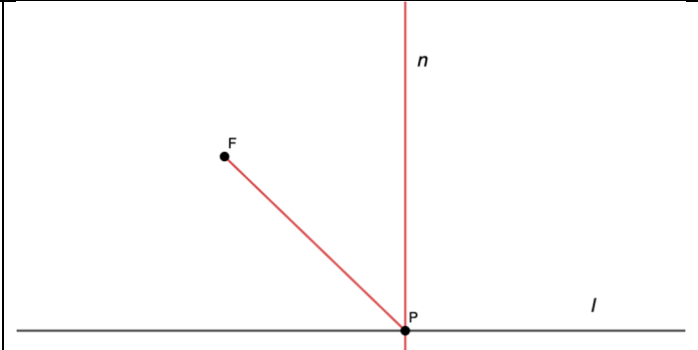
### 2.1 Klassisk geometrisk definition af parabelen

<p>Vi har givet en linje <math>l</math> og et punkt <math>F</math>, der ikke ligger på linjen <math>l</math>. Parablen består af alle de punkter, der har samme afstand til linjen <math>l</math> og punktet <math>F</math> (se figuren).</p> <p>Punktet <math>F</math> kaldes for <i>brændpunktet</i> (<math>F</math> står for <i>Focus</i>) og linjen <math>l</math> kaldes for <i>ledelinjen</i>.</p> <p><i>Kan du angive punkter, der har præcis samme afstand til punktet <math>F</math> og linjen <math>l</math>?</i></p>	 <p>The diagram shows a horizontal line labeled <math>l</math> at the bottom. Above it, there is a point labeled <math>F</math>. The line and point are drawn in black.</p>
---	--

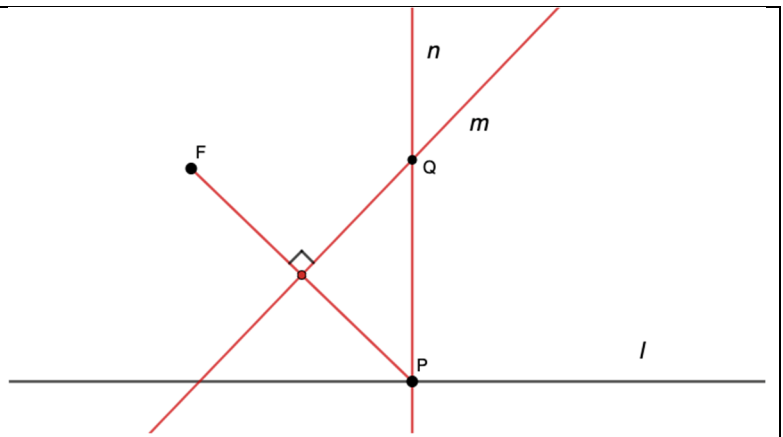
<p>Ved første øjekast virker det måske som en lidt underlig måde at definere en parabel på. Et oplagt punkt, der opfylder kriteriet, er naturligvis punktet <math>T</math> midt mellem linjen <math>l</math> og punktet <math>F</math>. Det punkt kaldes for <i>toppunktet</i>, hvilket vi vender tilbage til.</p>	 <p>The diagram shows a horizontal line labeled <math>l</math> at the bottom. Above it, there is a point labeled <math>F</math>. Between <math>F</math> and <math>l</math>, there is a point labeled <math>T</math>. The line and point <math>F</math> are black, while point <math>T</math> is red.</p>
--	--

### 2.2 Konstruktion af parabelen (metode 1)

Men hvilke andre punkter opfylder, at de ligger lige langt fra  $l$  og  $F$ ? For at svare på det spørgsmål må vi prøve at lave en geometrisk konstruktion.

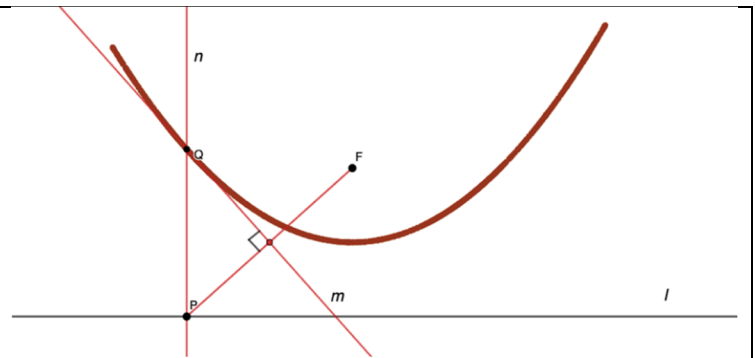
<p>Vi ønsker at finde samtlige punkter <math>Q</math>, der opfylder, at <math> Ql  =  QF </math>. Først vælges et tilfældigt punkt på ledelinjen <math>l</math>. Vi kalder punktet <math>P</math>. Gennem punktet <math>P</math> tegnes nu normalen <math>n</math> til ledelinjen <math>l</math>, og ydermere konstrueres linjestykket <math>PF</math>.</p>	 <p>The diagram shows a horizontal line labeled <math>l</math> at the bottom. A point <math>P</math> is marked on the line. A vertical red line labeled <math>n</math> passes through <math>P</math> and is perpendicular to <math>l</math>. A point <math>F</math> is located above the line. A red line segment connects <math>P</math> and <math>F</math>.</p>
---	---

Nu skal vi blot finde et punkt  $Q$  på normalen  $n$ , som ligger lige langt fra  $P$  og  $F$ . Men det betyder jo, at  $Q$  skal ligge på *midtnormalen*  $m$  til linjestykket  $PF$ . Der hvor midtnormalen til  $PF$  skærer normalen  $n$  til ledelinjen i  $P$  finder vi derfor netop det søgte punkt  $Q$ .



Laver vi denne konstruktion i et geometriprogram som GeoGebra, kan vi trække i det uafhængige punkt  $P$ , og dermed vil det afhængige punkt  $Q$  nu gennemløbe en parabel, sådan som vi geometrisk definerede det i afsnit 2.1.

Vi siger, at parabelen er: **Det geometriske sted for de punkter  $Q$ , der har samme afstand til punktet  $F$  og linjen  $l$ .**



I de følgende øvelser opfordres du til selv at tegne med. Du kan evt støtte dig til tegningen her:

<https://www.GeoGebra.org/classic/zqnxzrb>

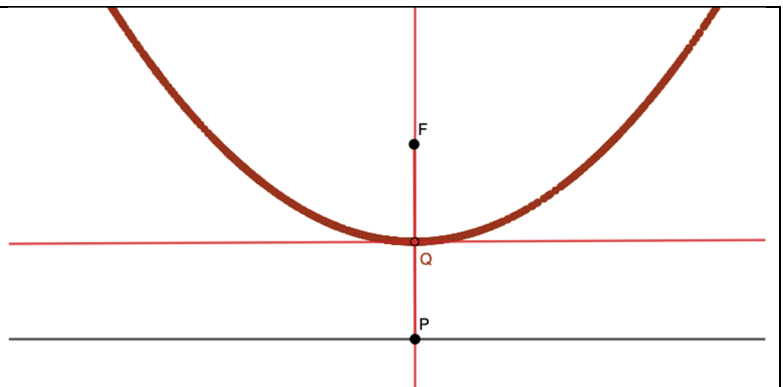
**Øvelse 2.1 Konstruer parabeln i dit værktøjsprogram.**

Gennemfør den ovenstående konstruktion i et matematisk værktøjsprogram. Benyt programmets mulighed for at tegne "sporet" af det afhængige punkt  $Q$ , når du trækker i det uafhængige punkt  $P$ .

**Øvelse 2.2 Symmetriaksen**

Argumenter for at kurven må være symmetrisk omkring den normal til ledelinjen  $l$ , der går gennem brændpunktet  $F$ . Denne normal kaldes for kurvens *symmetriakse*.

Du kan finde et eksempel fra programmet GeoGebra på konstruktion af parabeln efter ovenstående retningslinjer her:

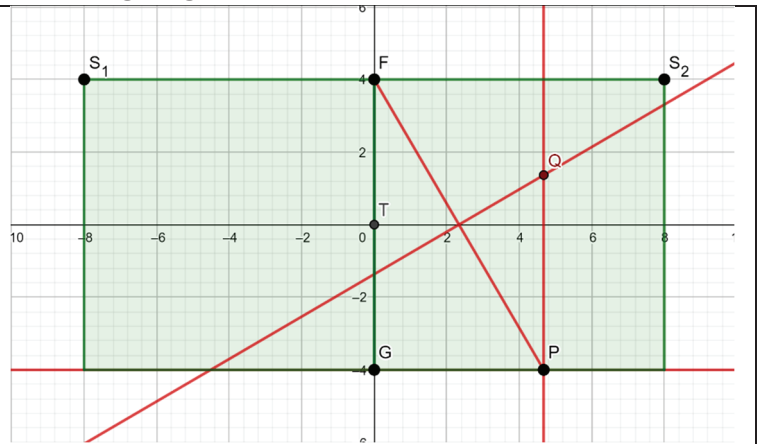


<https://www.GeoGebra.org/classic/evxtaems>

### Øvelse 2.3 Indlæg i et koordinatsystem og bestem ligning

Midtpunktet  $T$  mellem brændpunktet  $F$  og ledelinjen  $l$  kaldes kurvens *toppunkt*. Kaldes brændpunktets fodpunkt på ledelinjen for  $G$ , er *toppunktet*  $T$  altså netop midtpunktet mellem  $F$  og  $G$ .

a) De to kvadrater med siden  $FG$  har hver et hjørnepunkt på kurven, henh.  $S_1$  og  $S_2$ . De kaldes kurvens *skulderpunkter*. Afstanden mellem de to skulderpunkter kaldes *kurvens bredde*  $p$ . Tegn på et stykke papir en model af situationen!



b) Indlæg nu konstruktionen i et koordinatsystem med toppunktet  $T$  som begyndelsespunktet  $(0,0)$  og brændpunktet  $F$  på  $y$ -aksen. Hvilke koordinater får da skulderpunkterne  $S_1$  og  $S_2$ .

c) Hvad bliver ligningen for den parabel, der går gennem toppunktet og de to skulderpunkter?

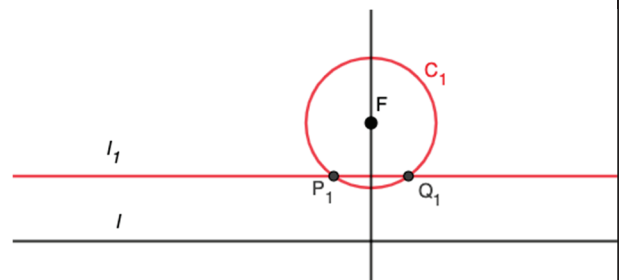
d) Tegn denne parabel! Konklusion?

Du kan finde et eksempel på konstruktionsdelen af øvelserne 2.1, 2.2 og 2.3 fra programmet GeoGebra her: <https://www.GeoGebra.org/classic/zqzqxzrb>

### 2.3 Konstruktion af parabeln (metode 2)

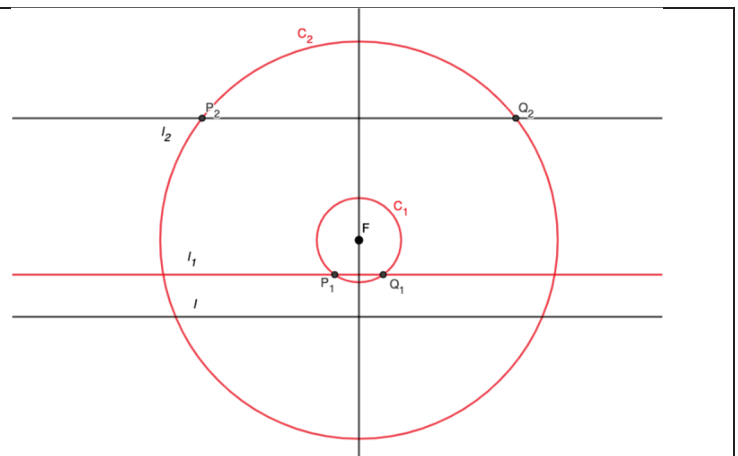
Der findes mange andre klassisk geometriske måder at konstruere parabeln på. For eksempel kan det gøres på følgende vis

- 1) Tegn en ledelinje  $l$  samt et punkt  $F$ , der ikke ligger på linjen  $l$ .  $F$  kaldes for brændpunktet.
- 2) Konstruer en ny linje  $l_1$ , der er parallel med  $l$  og som ligger på samme side af  $l$  som brændpunktet  $F$ .
- 3) Konstruer en cirkel  $C_1$  med centrum i  $F$  og radius lig med afstanden mellem  $l$  og  $l_1$ .
- 4) Find de to skæringspunkter  $P_1$  og  $Q_1$  mellem cirklen og linjen  $l_1$ .



Gentag proceduren ovenfor – dvs.:

- 1) Konstruer en ny linje  $l_2$ , der er parallel med  $l$  og som ligger på samme side af  $l$  som brændpunktet  $F$ .
- 2) Konstruer en cirkel  $C_2$  med centrum i  $F$  og radius lig med afstanden mellem  $l$  og  $l_2$ .
- 3) Find de to skæringspunkter  $P_2$  og  $Q_2$  mellem cirklen og linjen  $l_2$ .





Således fortsættes indtil man har det ønskede antal punkter:  $P_1, P_2, P_3, \dots, Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ , hvilket eksempelvis kunne se således ud:

<p><b>Øvelse 2.4</b></p> <p>a) Argumenter ud fra konstruktionsbeskrivelsen med parallellinjer og cirkler, at punkterne <math>P_i, Q_i</math> alle opfylder, at de ligger med samme afstand til brændpunktet <math>F</math> som til ledelinjen <math>l</math>.</p> <p>b) Lav konstruktionen i et værktøjsprogram.</p> <p>c) Kontroller, at de fremkomne punkter rent faktisk ligger på en parabel – f.eks. vha. polynomiel regression.</p>	
---	--

Du kan finde et eksempel på konstruktionsdelen af øvelse 2.4 fra programmet GeoGebra her: <https://www.GeoGebra.org/classic/htmyvc6d>

## 2.4 Beviset for at kurven er en parabel

Ovenfor har vi set eksempler på konstruktioner, der frembringer punkter  $Q$ , der opfylder kriteriet i definitionen af parabeln:  $|Ql| = |QF|$ . Men vi mangler stadig at bevise, at kurven, der udgøres af punkterne, rent faktisk er en parabel. Det vil vi se på i den næste øvelse.

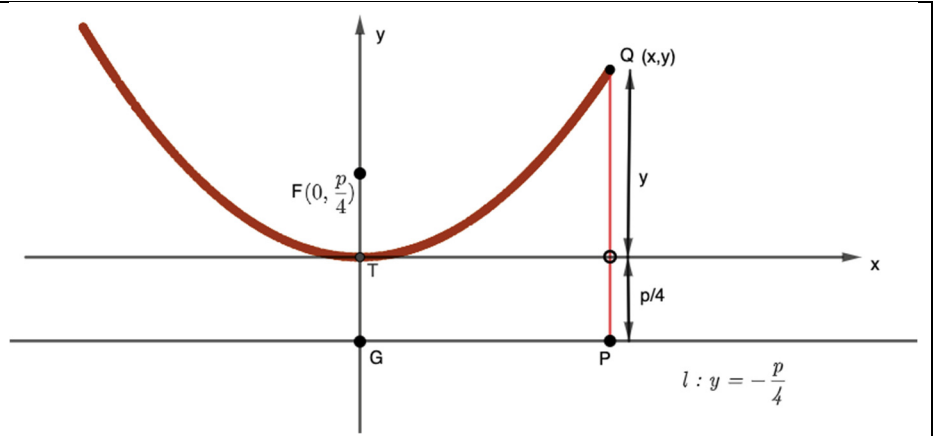
### Øvelse 2.5 Udledning af parablens ligning

<p>Vi starter med at anbringe den givne ledelinje <math>l</math> og det givne brændpunkt <math>F</math> i et koordinatsystem på følgende vis: Lad midtpunktet <math>T</math> mellem ledelinjen <math>l</math> og brændpunktet <math>F</math> ligge i koordinatsystemets begyndelsespunkt. <math>T</math> kalder vi som før omtalt for toppunktet. Brændpunktet <math>F</math> ligger på <math>y</math>-aksen, og vi giver <math>F</math> koordinaterne <math>\left(0, \frac{p}{4}\right)</math></p>	
---	--

a) Vis, at ledelinjen  $l$  nødvendigvis må have ligningen  $y = -\frac{p}{4}$

Størrelsen  $p/4$  er ikke helt tilfældigt valgt.  $p$  er nemlig kurvens bredde som vi stødte på i øvelse 2.3 ovenfor.

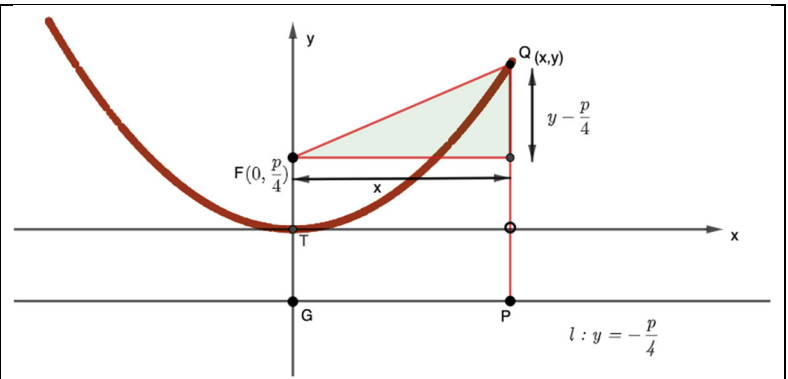
Vi ser nu på et tilfældigt punkt  $Q$  med koordinaterne  $(x,y)$ , der ligger på kurven – dvs. det opfylder, at brændpunktafstanden  $FQ$  og ledelinjefstanden  $QI$  er lige store.



b) Vis, at ledelinjefstanden – dvs. afstanden fra  $Q$  til  $l$  er lig med  $y + \frac{p}{4}$ .

c) Vis vha. Pythagoras sætning, at brændpunktafstanden fra  $Q$  til  $F$  opfylder ligningen:

$$FQ^2 = x^2 + \left(y - \frac{p}{4}\right)^2$$



d) Argumenter nu omhyggeligt for følgende omskrivninger:

Ved at sætte  $QF$  lig med  $QI$  fås følgende:

$$\begin{aligned}
 FQ^2 &= QI^2 \\
 x^2 + \left(y - \frac{p}{4}\right)^2 &= \left(y + \frac{p}{4}\right)^2 \\
 x^2 + \cancel{y^2} - \frac{1}{2} \cdot p \cdot y + \frac{\cancel{p^2}}{16} &= \cancel{y^2} + \frac{1}{2} \cdot p \cdot y + \frac{\cancel{p^2}}{16} \\
 x^2 - \frac{1}{2} \cdot p \cdot y &= \frac{1}{2} \cdot p \cdot y \\
 x^2 &= p \cdot y \\
 y &= \frac{1}{p} \cdot x^2
 \end{aligned}$$

*Konklusion:* Hermed har vi vist, at kurven netop har ligningen  $y = a \cdot x^2$  med  $a = \frac{1}{p}$ . Der er derfor tale om en parabel.

Vi ser også, at vi har fundet en sammenhæng mellem parablens ligning og brændpunktets koordinater:

$$a = \frac{1}{p} \Leftrightarrow p = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{p}{4} = \frac{1}{4 \cdot a}$$

**Sætning 4: Koordinaterne til parablens brændpunkt**

Givet en parabel med ligningen:  $y = a \cdot x^2$

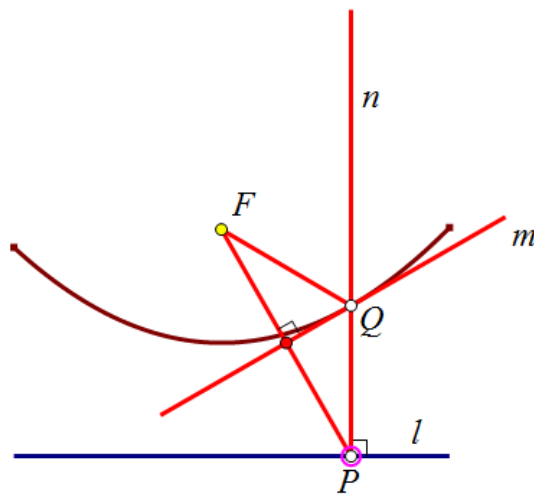
Koordinaterne til brændpunktet er da givet ved:  $\left(0, \frac{1}{4 \cdot a}\right)$

**2.5 Et par vigtige egenskaber ved parablens tangent**

Hvis man har prøvet at trække i punktet  $P$ , kan man ikke have undgået at bemærke at midtnormalen glider langs parabeln, altså at den må være en tangent til parabeln. Men hvordan kan vi vise det?

Hvis man kan lidt differentialregning er det ikke så svært, men parabeltangenten har været kendt siden grækerne indførte keglesnittene (længe før differentialregningen blev opfundet), så her vil vi først prøve at argumentere rent geometrisk.

Vi skal altså vise at *midtnormalen kun rører parabeln*, dvs. ud over røringsspunktet  $Q$  har den ingen punkter fælles med parabeln. Vi starter med at bemærke, at parabeln deler planen i to dele: Det indre område (der indbefatter brændpunktet) og det ydre område (der indbefatter ledelinjen).



Det er nemt at karakterisere disse to områder ved hjælp af brændpunktafstanden og ledelinjeafstanden

**Sætning 5: Opdelingen af en plan ved hjælp af en parabel**

Givet en parabel med ledelinje  $l$  og brændpunkt  $F$ .

- 1) Et punkt  $R$  ligger *indenfor* parabeln, hvis brændpunktafstanden er mindre end ledelinjeafstanden, dvs. hvis  $|FR| < |Rl|$ .
- 2) Et punkt  $R$  ligger *på* parabeln, hvis brændpunktafstanden netop er lige så stor som ledelinjeafstanden, dvs. hvis  $|FR| = |Rl|$ .
- 3) Et punkt  $R$  ligger *udenfor* parabeln, hvis brændpunktafstanden er større end ledelinjeafstanden, dvs. hvis  $|FR| > |Rl|$ .

**Øvelse 2.6. Bevis sætning 5**

Prøv selv at argumentere for sætningen ovenfor ud fra en tegning af en parabel, hvor brændpunktet og ledelinjen er indtegnet.

(Bemærk at punkt 2 er definitionen. Når man skal vise punkt 1 og 3, kan det være en hjælp at skelne mellem punkter der ligger over og ligger under den vandrette linje gennem brændpunktet  $F$ . Start med at trække linjen gennem  $F$  og punktet  $R$ , og opsøg skæringspunktet mellem parabeln og denne linje, eller evt dens forlængelse. Argumenter nu ud fra din viden i punkt 2, samt ved at sammenligne linjestykker.

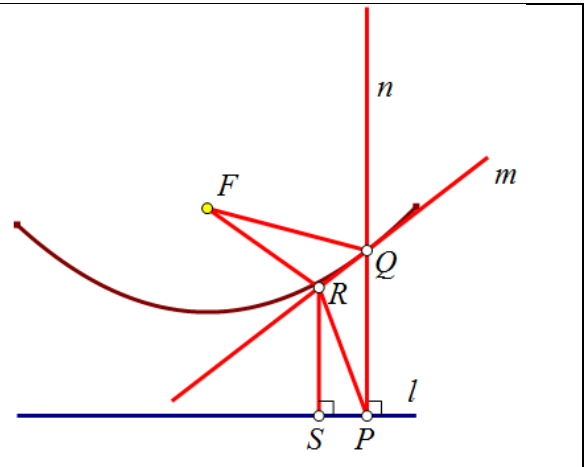
Du skal evt. anvende trekantsuligheden i din argumentation: Summen af to sidelængder i en trekant er større end den tredje sidelængde)

**Øvelse 2.7**

Du skal nu prøve at vise, at midtnormalen er en tangent ved at vise at alle punkterne bortset fra røringpunktet  $Q$  ligger udenfor parabeln.

Vi ser altså på et punkt  $R$  på midtnormalen  $m$ , der er forskelligt fra røringpunktet som vist på figuren. Vi indfører også fodpunktet  $S$  på ledelinjen, som den vinkelrette projektion af  $R$  på  $l$ . Se skitsen

- a) Argumentér for at afstandene  $FR$  og  $RP$  er lige store.
- b) Vis, at  $RS$  er mindre end  $RP$  og dermed også mindre end brændpunktsafstanden  $FR$



Hermed har du netop vist, at  $R$  er et ydre punkt. Midtnormalen rører altså kun parabeln i ét punkt. Den er tangent til parabeln!

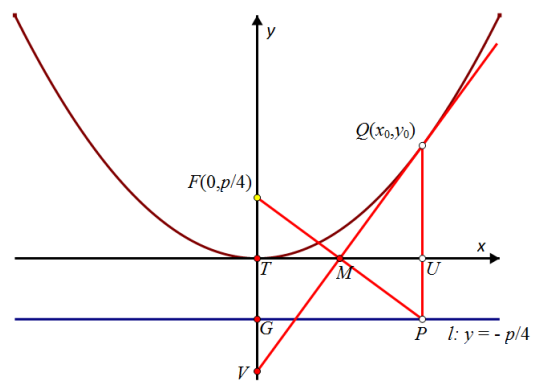
**Øvelse 2.8: Tangentens ligning**

Indfør nu igen et koordinatsystem med toppunktet  $T$  som begyndelsespunkt og brændpunktet  $F$  på  $y$ -aksen. I dette koordinatsystem har parabeln ligningen  $y = a \cdot x^2$ . Vi har igen valgt et punkt  $P$  på ledelinjen, tegnet normalen og opsøgt punktet  $Q$  på parabeln, lodret over  $P$ .

Vi betragter tangenten gennem punktet  $Q$ . Lad os sige  $Q$  har koordinaterne  $(x_0, y_0)$ .

- a) Gør rede for at midtpunktet  $M$  for linjestykket  $FP$  nødvendigvis må ligge på  $x$ -aksen og, at midtnormalen til  $FP$  derfor halverer stykket  $TU$  på  $x$ -aksen. Dvs.  $M$  har koordinaterne  $(\frac{x_0}{2}, 0)$ .

- b) Gør tilsvarende rede for at midtnormalen skærer  $y$ -aksen lige så langt under  $x$ -aksen, som  $Q$  ligger over  $x$ -aksen, hvilket vil sige,  $V$  har koordinaterne  $(0, -y_0)$ .



- c) Gør rede for at midtnormalen, dvs. tangenten, derfor må have ligningen:  $y = 2a \cdot x_0 \cdot x - a \cdot x_0^2$ .

- d) Benyt formelen for tangentens ligning indenfor differentialregning til at bestemme tangentligningen til grafen for  $y = a \cdot x^2$  i punktet  $(x_0, f(x_0))$ . Vis, at du får samme resultat som i c).

## 2.6 Parabolantenner og hvorfor strålerne lander i brændpunktet.

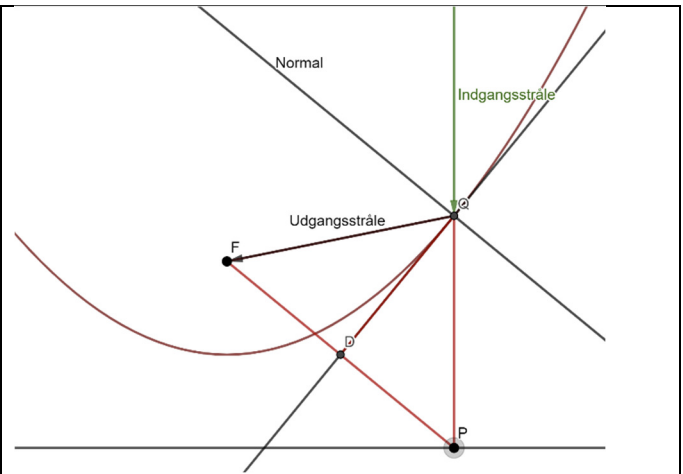
Med tangentens ligning og de vigtigste egenskaber på plads, er vi nu klar til at forklare, hvorfor punktet  $F$  hedder et brændpunkt. Betegnelsen brændpunkt blev indført af Johannes Kepler i starten af 1600 tallet. Dette har stor relevans i forbindelse med en af de allervigtigste anvendelser af parabler i form af parabolantenner, der har form som omdrejningsparaboloider.

### Øvelse 2.9: Stråler langs symmetriaksen spejles ned i brændpunktet – geometrisk argument

a) Konstruer som i afsnit 2.2 igen parablen ud fra dens brændpunkt  $F$  og dens ledelinje  $l$ .

b) Forestil dig nu at vi sender en lysstråle ind fra oven langs parablens symmetriakse som rammer parablen indefra i punktet  $Q$ . Hvis parablen er belagt med et reflekterende materiale, vil lysstrålen spejles i parablen, dvs. i tangenten for parablen i punktet  $Q$ .

c) Konstruer den spejlede stråle, idet du spejler i *normalen* gennem  $Q$ , dvs. du skal spejle indgangsstrålen i den linje gennem  $Q$ , der står vinkelret på tangenten. Træk i punktet  $P$ : Hvad observerer du?



d) Prøv nu at forklare, hvorfor den spejlede stråle nødvendigvis må opføre sig sådan, idet du inddrager, at tangenten også er en midtnormal. Ifølge spejlingsloven er indfaldsvinklen det samme som udfaldsvinklen, så du skal have fat i et ræsonnement omkring passende vinkler på figuren.

e) På grund af egenskaben ovenfor kalder man spejlstrålen fra  $Q$  gennem  $F$  for en brændstråle.

Du kan finde en illustration af brændstrålen lavet i GeoGebra her:

<https://www.GeoGebra.org/classic/gskzcrmt>.

## 2.7 Udledning af brændpunkts-formlen ved hjælp af differentialregning

Lad os endelig prøve at anvende differentialregning til at vise, at alle stråler, der kommer ind parallelt med en parabels symmetriakse, efter spejling i overfladen vil ramme i samme punkt på  $y$ -aksen. Og samtidig bestemme dette punkts koordinater.

Vi har givet en parabel med ligning  $y = p \cdot x^2$ . Vi betragter en tilfældig stråle, der kommer lodret ned, spejles og fortsætter mod  $y$ -aksen. Det er den blå stråle på figuren.

Strålen rammer parablen i et punkt, vi giver koordinaterne  $(x_0, y_0)$ . Her gælder  $y_0 = p \cdot x_0^2$ .

I det punkt, hvor den rammer parablen lægger vi en tangent,  $t_1$ . Det er den magenta-farvede linje.

Vi vil gennemføre argumentationen som en øvelse:

**Øvelse 2.10: Alle stråler parallelt med symmetriaksen lander efter spejling i samme punkt**

a) Tangentens ligning er:

$$y = y_0 + a \cdot (x - x_0)$$

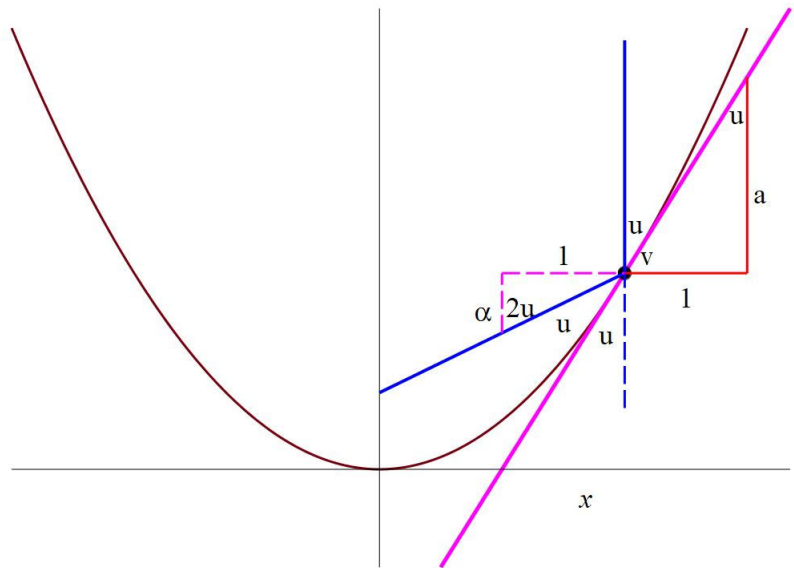
Vis at dette i vores tilfælde bliver:

$$y = p \cdot x_0^2 + 2p \cdot x_0 \cdot (x - x_0)$$

b) På tegningen er angivet indfaldsvinklen  $u$ , mellem den lodrette blå linje og den skrå tangent. Da indfaldsvinkel er lig med udfaldsvinkel findes  $u$  ligeledes som vinklen mellem den drejede blå linje og den skrå tangent. Men vinklen  $u$  er også angivet to andre steder. Argumenter for dette.

c) I den højre trekant er angivet tallene 1 og  $a$ . Hvad er denne trekant udtryk for?

d) Den spejlede blå linje har en hældningskoefficient vi betegner  $\alpha$ . I den venstre trekant er angivet tallene 1 og  $\alpha$ . Hvad er denne trekant udtryk for?



d) I den venstre trekant med stiplede linjer er angivet vinklen  $2u$ . Begrund dette.

e) Vi kender sammenhængen mellem en linjes hældningskoefficient,  $a$  og den vinkel,  $v$  den danner med en vandret linje, nemlig  $\tan(v) = a$

Anvend tegningen til at argumentere for, at  $\tan(u) = \frac{1}{a}$

f) Kombiner punkterne a) og e) til at vise:  $\tan(u) = \frac{1}{2 \cdot p \cdot x_0}$

g) Den spejlede blå linje har en hældningskoefficienten  $\alpha$ . Argumenter for at denne linje har ligningen:

$$y = p \cdot x_0^2 + \alpha \cdot (x - x_0)$$

h) Anvend samme formel som i punkt e) til at argumentere for, at:  $\tan(2u) = \frac{1}{\alpha}$

i) Vi vil nu anvende en formel for tangens til den dobbelte vinkel. Formlen siger:  $\tan(2u) = \frac{2 \cdot \tan(u)}{1 - \tan^2(u)}$

Anvend formelen samt punkt h) til at vise:

$$\alpha = \frac{1}{\tan(2u)} = \frac{1 - \frac{1}{4p^2 \cdot x_0^2}}{2 \cdot \frac{1}{2p \cdot x_0}} = p \cdot x_0 - \frac{1}{4p \cdot x_0}$$

j) Kombiner nu dette udtryk for hældningskoefficienten  $\alpha$  med ligningen for den spejlede blå linje fra punkt g) og vis, at ligningen for denne linje bliver:

$$y = \left( p \cdot x_0 - \frac{1}{4p \cdot x_0} \right) \cdot x + \frac{1}{4p}$$

k) Konkluder nu, at enhver stråle, der kommer lodret ind langs symmetriaksen og spejles i parabolens overflade, vil gå gennem punktet  $\left(0, \frac{1}{4p}\right)$  på  $y$ -aksen. Dvs. alle stråler går gennem samme punkt. Og dette punkt er det, vi kalder *brændpunktet*.

## 2.8 Opgaveforløb om andre egenskaber ved parabeltangenten

Selvom brændstråleegenskaben, der blev skitseret ovenfor, naturligvis er langt den vigtigste i henhold til konstruktion af parabolantennor, opfylder parabelen og dens tangenten en række bemærkelsesværdige geometriske egenskaber, som du her kan gå på opdagelse i.

### Opgave 1

Konstruer en skitse i et CAS-værktøj og undersøg følgende sætning: Parabeltangenten i et punkt  $Q$  på parabelen halverer vinklen mellem forbindelseslinjen  $QF$  til brændpunktet og linjestykket  $QP$  vinkelret på ledelinjen.

### Opgave 2

Konstruer en skitse i et CAS-værktøj og undersøg følgende sætning: Brændpunktets projektion på parabeltangenten, ligger på tangenten gennem parablens toppunkt. Spejlbillederne af brændpunktet i parabeltangenten ligger på ledelinjen.

### Opgave 3

Konstruer en skitse i et CAS-værktøj og undersøg følgende sætning: To parabeltangenten er ortogonale hvis og kun hvis de skærer hinanden på ledelinjen.

### Opgave 4

Konstruer en skitse i et CAS-værktøj og undersøg følgende sætning: Den omskrevne cirkel til den trekant, der dannes af tre parabeltangenten går altid gennem parablens brændpunkt.

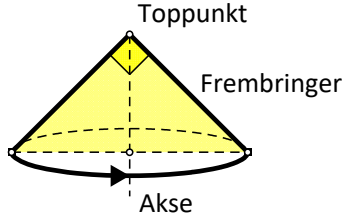
### Opgave 5

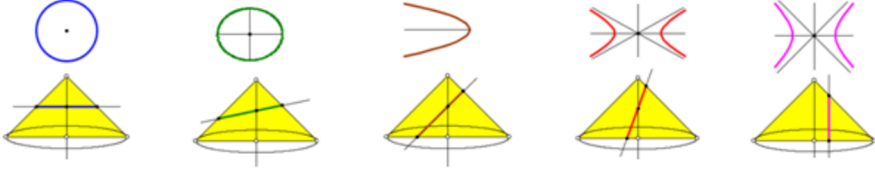
Konstruer en skitse i et CAS-værktøj og undersøg følgende sætning: Hvis tangenten i punktet  $Q$  til en parabel med brændpunkt  $F$  skærer symmetriaksen i punktet  $S$ , er trekant  $QFS$  ligebenet.

### Opgave 6

Konstruer en skitse i et CAS-værktøj og undersøg følgende sætning: Hvis tangenten i punktet  $Q$  til en parabel med brændpunkt  $F$  skærer symmetriaksen i punktet  $S$ , er trekant  $QFS$  ligebenet.

## 2.9 Ellipsen – en af parablens søskende

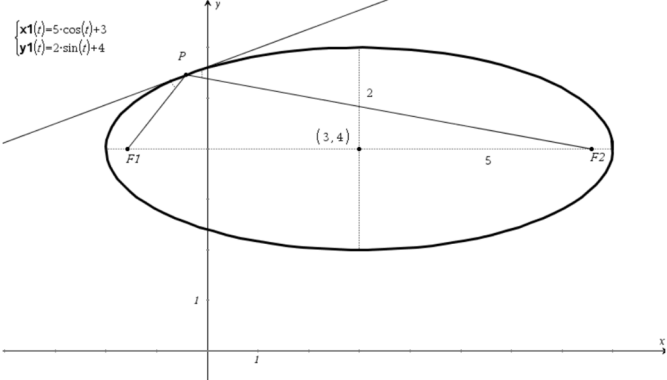
<p>Parablen er en del af en større familie af kurver, som kaldes keglesnit, fordi de alle kan fremkomme som snit i en kegle, evt en dobbeltkegle. En kegle fremkommer ved at rotere en ligebenet trekant omkring dens symmetriakse: Symmetriaksen bliver til keglens <i>akse</i>. Vi tager her udgangspunkt i en <i>retvinklet kegle</i>, dvs. trekantens rette vinkel bliver til keglens <i>åbningsvinkel</i>. Den ligebenede trekants sider er keglens <i>frembringere</i>.</p>	
---	---

<p>Snittet kan lægges på fem forskellige måder, alt efter vinklen med grundlinjen, hvorved vi frembringer fem forskellige keglesnit:</p>					
	<p><b>Cirkel:</b> Snittet ligger vinkelret på akse med retningsvinklen på 0°.</p>	<p><b>Ellipse:</b> Snittet ligger skråt med retningsvinkel mellem 0° og 45°.</p>	<p><b>Parabel:</b> Snittet ligger parallelt med en frembringer, retningsvinkel: 45°.</p>	<p><b>Hyperbel:</b> Snittet ligger skråt med retningsvinkel mellem 45° og 90°.</p>	<p><b>Ligesidet hyperbel:</b> Snittet ligger parallelt med akse med retningsvinklen 90°.</p>

Keglesnittene var kendt af oldtidens græske matematikere, og især en af disse, Appolonius (ca. 262 - ca. 190 fvt.), der arbejdede på datidens universitet i Alexandria undersøgte keglesnittene til bunds. Han skrev 8 bøger om *keglesnit*, hvoraf de 7 er fundet.

Det var Apollonius, der navngav keglesnittene. De græske navne angiver om fladen der snitter keglen *følger langs kanten*(parablen) , *snitter gennem keglen* (ellipsen) eller snittet *løber ud over keglen* (hyperblen).

Alle keglesnit har et eller to brændpunkter. Ellipsen har to, og det er almindelig kendt at denne kurve er model for planeters bevægelse rundt om Solen, der er placeret i det ene brændpunkt. Ellipsen har også andre spændende anvendelser, hvoraf én minder lidt om det vi har lært om parabler:

<p>Hvis et signal sendes ud fra et brændpunkt i ellipsen, og hvis ellipsen er beklædt med et materiale der reflekterer strålen, så vil den lande i det andet brændpunkt. Dette fænomen udnyttes i en nyrestensknuser, hvor der fra det ene brændpunkt i en ellipsoide udsendes ultralyd-stråler, som efter refleksion rammer ned i det andet brændpunkt, hvor patientens nyresten er placeret. Derved kan man pulverisere denne og dermed undgå en operation.</p>	
---	--

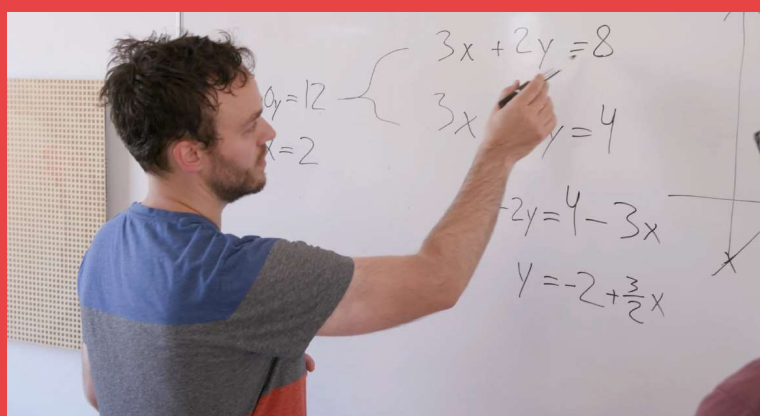
Du kan læse mere om ellipsens egenskaber [her](#) (link til 8)





# 3.

## Ligningsløsning med en eller to ubekendte



I filmen spørger Casper på et tidspunkt: "Vil det sige, det hele ender med at vi skal løse ligninger?" Og svaret er grundlæggende ja. Når matematikken kommer på banen for at løse problemer, starter det med at der opstilles ligninger. Det kan være meget store og indviklede ligningssystemer med tusindvis af ubekendte, hvor man er nødt til at anvende avanceret matematik, for at finde løsninger. Men det hele bygger på kendskabet til at løse simple ligninger med få ubekendte. Der starter vi også.

### 3. Ligningsløsning med en eller to ubekendte

(Materialerne i dette kapitel er lånt fra HEM1, kapitel 7)

En ligning er en påstand, der udtrykker at to størrelser er ens fx:

$$1) 7,3^2 = 5,1^2 + b^2$$

$$2) 1,7x - 3,1 = 5,9x + 2,8$$

En Ligning udtrykker at de to størrelser er i balance. Man kan forestille sig det som en gammeldags vægt med to vægtskåle. Fjerner vi noget eller tilføjer vi noget på den ene skål bliver der ubalance, hvis vi ikke gør præcis det samme på den anden skål. Men foretager vi *samme* operationer på begge sider gælder lighedstegnet stadig.

Vi har i hele vores matematikundervisning løst mange ligninger og sammenfatter her reglerne for ligningsløsning:

#### Praxis. Regler for ligningsløsning

Nr.	Regel	Reglen i praksis
1	I en ligning må samme led lægges til eller trækkes fra på hver side af lighedstegnet.	Når et led skifter side, skifter det også fortegn.
2	I en ligning må man gange eller dividere med samme tal på begge sider af lighedstegnet (blot ikke med tallet 0).	Når en faktor skifter side, bliver gange til division. Når en nævner i en brøk skifter side, bliver division til gange.

#### Eksempel: Ligningsløsning med brug af reglerne

Løses en simpel ligning som  $6x - 3 = 2x + 7$  efter disse regler ser det således ud (forklar selv, hvor reglerne er i brug!):

##### Ligningsløsning med regler

$$6x - 3 = 2x + 7$$

$$6x - 3 + 3 = 2x + 7 + 3$$

$$6x = 2x + 10$$

$$6x - 2x = 2x + 10 - 2x$$

$$4x = 10$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{10}{4}$$

$$x = \frac{10}{4}$$

$$x = \frac{5}{2}$$

$$x = 2,5$$

Konklusion:  $x = 2,5$ .

##### Ligningsløsning i praksis

$$6x - 3 = 2x + 7$$

$$6x = 2x + 10$$

$$4x = 10$$

$$x = \frac{10}{4}$$

$$x = 2,5$$

Eksemplet illustrerer, at ligningsløsning kan betragtes som en dynamisk proces, hvor vi hele tiden anvender *modsatte* eller *omvendte* funktioner af det, der står i udtrykkene, her:

- $-3$  ophæves af det modsatte tal  $+3$
- $2x$  ophæves af det modsatte led  $-2x$
- Gange med 4 ophæves af den omvendte operation: division med 4.

### Øvelse 3.1 Løs ligninger med brug af reglerne

- 1)  $2x - 4 = \frac{1}{2}x + 6$
- 2)  $13 - 7x = 5x + 8$

### Øvelse 3.2: Find fejlen 1.

En løsning til ligningen  $x + 5 = 2$  findes gennem følgende trin

$$x + 5 = 2$$

$$x = 2 + 5$$

$$x = 7$$

- a) Undersøg om løsningen er korrekt eller forkert.
- b) Find det trin, hvor løsningsmetoden er forkert og ret trinnet.
- c) Bestem den korrekte løsning.

### Øvelse 3.3: Find fejlen 2.

En løsning til ligningen  $3x + 5 = 2$  findes gennem følgende trin

$$3x + 5 = 2$$

$$x + 5 = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{2}{3} - 5$$

- a) Undersøg om løsningen er korrekt eller forkert.
- b) Find det trin, hvor løsningsmetoden er forkert og ret trinnet.
- c) Bestem den korrekte løsning.

### Øvelse 3.4: Løs ligningerne

- 1)  $5x + 14 = 6 + x$

- 2)  $11x + 29 = 4x - 13$

- 3)  $2x + 3 = 5 + 2x$

- 4)  $2x - 3 + 4x + 5 = 6x + 2$

Hvad skete der lige i de sidste ligninger? Kan du forklare det?

Reglerne for ligningsløsning gælder generelt, også for trigonometriske, eksponentielle og logaritmiske ligninger eller ligninger med potenser og rødder:

En bestemt operation ophæves ved samtidig at anvende den omvendte operation på den anden side af lighedstegnet.

**Praxis. Omvendte operationer**

Operationen	Omvendte operation	Operationen	Omvendte operation
+	-	$\sin(..)$	$\sin^{-1}(..)$
-	+	$\cos(..)$	$\cos^{-1}(..)$
·	: (eller /)	$\tan(..)$	$\tan^{-1}(..)$
: (eller /)	·	$e^x$	$\ln(x)$
$(..)^2$	$\sqrt{..}$	$\ln(x)$	$e^x$
$\sqrt{..}$	$(..)^2$	$10^x$	$\log(x)$
$(..)^a$	$\sqrt[a]{..}$	$\log(x)$	$10^x$
$\sqrt[a]{..}$	$(..)^a$		

**Eksempel på brug af omvendte operationer:**

a)  $\cos(A) = 0,83$  løses ved at bruge den omvendte operation:

$$A = \cos^{-1}(0,83) = 33,9^\circ$$

b)  $\log(M) = 2,9$  løses ved at bruge den omvendte operation:

$$M = 10^{2,9} = 794,3$$

c)  $x^{2,3} = 68$  løses ved at bruge den omvendte operation:

$$x = \sqrt[2,3]{68} = 6,3$$

d)  $e^{3x} = 200$  løses ved at bruge den omvendte operation:

$$3x = \ln(200)$$

$$x = \frac{1}{3} \cdot \ln(200) = 1,8$$

*Bemærk:* Før man kan bruge en omvendt operation til løsning af en ligning, skal den først være omskrevet og reduceret til simple former som dem i eksempel 8.7. Optræder den ubekendte kun ét sted, kan ligningen altid løses ved skridt for skridt at bruge omvendte operationer. De omvendte operationer skal anvendes på hele udtrykket, der står på hver side af lighedstegnet.

**Øvelse 3.5: Undersøg dit værktøjsprogram**

Undersøg hvordan du kan håndtere sådanne ligninger på dit værktøjsprogram .

*Bemærk:* Her skal du ikke bruge en solve-funktion!

**Øvelse 3.6. Ligning med potenser**

En løsning til ligningen  $7x^3 = 210$  findes gennem følgende trin:

$$7x^3 = 210$$

$$7x = \sqrt[3]{210}$$

$$7x = 5,9439$$

$$x = \frac{5,9439}{7}$$

$$x = 0,8491$$

- Undersøg om løsningen er korrekt eller forkert.
- Forklar hvad der er forkert i løsningsmetoden.
- Bestem den korrekte løsning.

### Øvelse 3.7: Ligning med rødder

En løsning til ligningen  $x^7 + 45 = 1000$  findes gennem følgende trin

$$x^7 + 45 = 1000$$

$$x + \sqrt[7]{45} = \sqrt[7]{1000}$$

$$x + 1,7226 = 2,6827$$

$$x = 2,6827 - 1,7226$$

$$x = 0,9601$$

- Undersøg om løsningen er korrekt eller forkert.
- Forklar hvad der er forkert i løsningsmetoden.
- Bestem den korrekte løsning.

## 3.1 Grafiske metoder

Har man givet en *formel* af typen: " $y = \dots$ ", der udtrykker en sammenhæng mellem to variable, vil man normalt starte med at lægge formlen ind på et cas-værktøj, idet *formlen* betragtes som et *funktionsudtryk*.

Har man givet en *ligning*, hvor to udtryk er sat lig med hinanden, kan hver af de to sider i ligningen betragtes som separate funktionsudtryk, og de indtastes hver for sig værktøjet. Det gælder også, hvis den ene side blot er en konstant som tallet 9.

Når funktionsudtrykkene er indtastet, kan man let skabe sig et overblik via *tabeller* over funktionsværdier. Tabellerne giver indtryk af, hvilke talstørrelser vi arbejder med, og hvordan vi skal indrette grafvinduet. Endelig tegnes *graf* eller *graferne*, og de grafiske billeder danner udgangspunkt for en grafisk løsning af de spørgsmål, vi er blevet stillet. At løse en ligning svarer nu *grafisk* til at bestemme skærings-punktet mellem to grafer. *Forklar dette!*

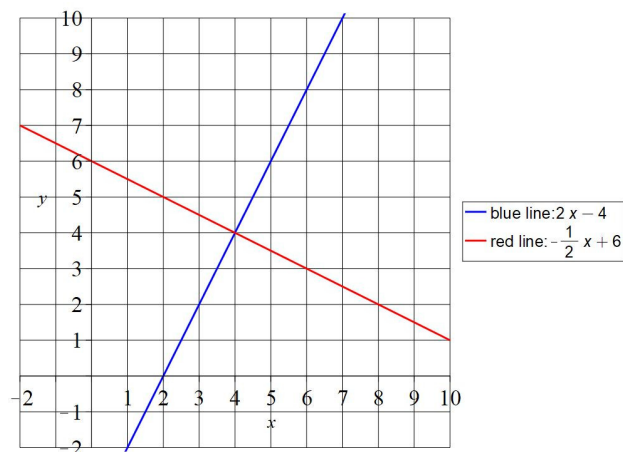
**Grafisk løsning af ligningen  $2x-4=-\frac{1}{2}x+6$ :**

Højre og venstre side svarer begge til rette linjer i koordinatsystemet:

$$y=2x-4 \quad \text{og} \quad y=-\frac{1}{2}x+6$$

At de to udtryk er lig med hinanden betyder, at der findes en  $x$ -værdi, hver de to linjer har samme  $y$ -værdi. Men det svarer til, at der findes et sted i det grafiske billede, hvor linjerne skærer hinanden.

Vi aflæser, at  $(4,4)$  er et fælles punkt. Det betyder, at  $x=4$  er en løsning til ligningen. Vi kan indsætte i de to funktionsudtryk og kontrollere, at vi får samme  $y$ -værdi,  $y=4$ .

**Øvelse 3.8: Grafisk Løsning af ligninger med en ubekendt.**

- $-2x+5=0.5x-3$
- $-1.5x+6=-4$
- $3.6x-8=-0.75x+35$

**Øvelse 3.9 Løsning af ikke-lineære ligninger.**

Hvis du vil prøve kræfter med ikke-lineære ligninger, så kan du [her \(link til 9\)](#) hente nogle eksempler, hvor du kommer rundt om hele paletten med formelregning, symbolsk løsning, grafisk løsning og brug af værktøj.

**3.2 Samlet forløb om løsning af lineære ligninger med en og to ubekendte**

Ligningsløsning har mange aspekter. De grundlæggende regler er gennemgået ovenfor. Men hvordan opstiller man ligninger? Hvordan opstiller og løser man ligninger med to ubekendte? Kan man altid løse sådanne ligningssystemer? Findes der en simpel måde til at afgøre hvornår et ligningssystem har løsninger? Og findes der i så fald formler til at opskrive løsningerne?

Du kan [her \(link til 10\)](#) finde et samlet forløb om løsning af lineære ligninger med en og to variable. Forløbet lægger op til at eleverne selv arbejder sig igennem opgaver og metoder, fra det enkle til ret svære opgaver.

**3.3. To ligninger med to ubekendte**

Hvis man er i en situation, hvor man har flere ligninger og flere ubekendte taler man om et *ligningssystem*. I filmen på TICRA løser Oscar Borries ved tavlen for eksempel ligningssystemet:

$$3x + 2y = 8$$

$$3x - 2y = 4$$

Ligningssystemet kan nemt løses vha. et CAS-værktøj vha. en solve-kommando eller ved at plote de to rette linjer, der svarer til det grafiske billede af de to ligninger. I dette afsnit vil vi imidlertid se på, hvordan det også kan gøres ved "håndkraft" som det også vises af Oscar i filmen. Der er adskillige metoder til løsning af to ligninger med to ubekendte, men vi begrænser os her til at se på tre forskellige tilgange.

### 3.3.1 Substitutionsmetoden

I substitutionsmetoden isolerer man den ene af de to ubekendte i en af ligningerne. Herefter sætter man det fundne udtryk ind i den anden ligning, hvorpå man så kun har én ubekendt tilbage. Hvis vi tager udgangspunkt i ligningssystemet ovenfor, starter vi med at isolere den ubekendte  $y$  i den øverste ligning:

$$3x + 2y = 8 \Leftrightarrow$$

$$2y = 8 - 3x \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{8}{2} - \frac{3x}{2} \Leftrightarrow$$

$$y = -\frac{3x}{2} + 4$$

Det fundne udtryk for  $y$  indsættes nu i den anden af de to ligninger som så kan løses mht.  $x$ :

$$3x - 2y = 4 \Leftrightarrow$$

$$3x - 2 \cdot \left( -\frac{3x}{2} + 4 \right) = 4 \Leftrightarrow$$

$$3x - 2 \cdot \left( -\frac{3x}{2} \right) - 2 \cdot 4 = 4 \Leftrightarrow$$

$$3x + 3x - 8 = 4 \Leftrightarrow$$

$$6x = 12 \Leftrightarrow$$

$$x = 2$$

Den ubekendte  $y$  findes nu ved at indsætte  $x=2$  på  $x$ 's plads i den første ligning:

$$y = -\frac{3x}{2} + 4 = -\frac{3 \cdot 2}{2} + 4 = -3 + 4 = 1$$

Løsningen er altså som forventet  $x=2$  og  $y=1$ .

Det mest "problematisk" ved metoden er, at vi normalt får en del brøker at holde styr på. Det undgår vi med metoden i næste afsnit, *Lige store koefficienters metode*

#### Øvelse 3.10: Løsning med substitutionsmetoden

Løs følgende ligningssystemer:

a) 
$$\begin{aligned} x - 2y &= -2 \\ 3x - y &= 9 \end{aligned}$$

b) 
$$\begin{aligned} x + y &= 11 \\ 6x + 2y &= 42 \end{aligned}$$

c) 
$$\begin{aligned} 3x + y - 11 &= 0 \\ 2x - 3y + 11 &= 0 \end{aligned}$$

### 3.3.2 Lige store koefficienters metode

Denne metode har fået sit navn efter ligningssystemets koefficienter - dvs. de tal, der står foran  $x$ 'erne og  $y$ 'erne i ligningssystemet. Metoden går ud på at omskrive de to ligninger, så koefficienterne foran en af de to variable er ens i de to ligninger. Derfor kaldes metoden også for lige store koefficienters metode. Lad os se på et nyt eksempel:

$$\begin{aligned} 3x+4y &= 7 \\ -x+9y &= 8 \end{aligned}$$

Her ser vi, at hvis den *nederste ligning* multipliceres med  $-3$ , bliver koefficienten foran  $x$  til  $3$  - præcis som i den øverste ligning. Så vi lader den øverste ligning stå, og ganger med  $-3$  på begge sider af lighedstegnet: i den nederste:

$$\left. \begin{aligned} 3x+4y &= 7 \\ -x+9y &= 8 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} 3x+4y &= 7 \\ 3x-27y &= -24 \end{aligned} \right.$$

*Overvej selv, hvordan vi nåede frem til den nederste ligning*

En ligning udtrykker, at de to tal på hver side er lige store. Og en ligning gælder – ifølge reglerne allerførst i dette kapitel – stadigvæk, når vi trækker samme tal fra på begge sider.

Så i den øverste ligning  $3x+4y=7$  trækker vi  $(3x-27y)$  fra på venstre side og  $(-24)$  fra på højre side.

#### Øvelse 3.11

- Vis, at vi ved denne udregning får ligningen:  $31y=31$ , og at løsningen derfor er  $y=1$
- Vis ved indsættelse af  $y=1$  får, at også  $x=1$

#### Øvelse 3.12

Det er klart, at det enkleste var at indsætte  $y=1$ . Men for at træne metoden, så lad os bestemme  $x$  fsom vi gjorde med  $y$ . Her står der i øverste ligning  $4y$  og i nederste  $9y$ .

- Hvilket tal kan vi gange på den øverste ligning, og hvilket tal kan vi gange på den nederste ligning, så vi ender med samme koefficient til  $y$  i begge ligninger?
- Gennemfør disse multiplikationer, så du får et nyt ligningssystem.
- Afslut igen med subtraktion af de to ligninger. Du skal få ligningen:  $31x=31$ , og naturligvis:  $x=1$

*Bemærk:* Det var lidt overraskende, at begge udregninger endte med, at vi skal dividere med samme tal, her tallet 31. Det kunne jo være tilfældigt. Men det er det ikke. Det vil du se i den følgende øvelse:

#### Øvelse 3.10

Benyt lige store koefficienters metode til at løse følgende ligningssystemer:

$$\text{a) } \begin{aligned} 8x+2y &= 600 \\ 2x-12y &= 100 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \begin{aligned} 4x-y &= -4 \\ -x+5y &= 20 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \begin{aligned} 10x+7y &= -8 \\ 15x+3y &= 9 \end{aligned}$$

*Bemærk.* I afsnit 3.2 henviste vi til et dokument med et samlet forløb om ligningsløsning. Heri kan du finde en *symbolsk udregning*, der viser, at for  $x$  og  $y$  nævneren er den samme.



# 4.

## Matrixalgebra og ligningsløsning med determinantmetoden



Vi har lært at løse to ligninger med to ubekendte. Dermed mener vi: At bestemme eksakte værdier af to tal, der er løsning til de to ligninger. I filmen fortælles, at man i praksis arbejder med ligningssystemer med mange ligninger og mange ubekendte. I dette kapitel undersøger vi metoder til at bestemme eksakte løsninger til 3 ligninger med 3 ubekendte og diskuterer, hvad der sker, når der er  $n$  ligninger med  $n$  ubekendte

## 4. Matrixalgebra og ligningsløsning med determinantmetoden

(Dette kapitel bygger på kendskab til vektorregning)

I kapitel 3 præsenterede vi forskellige metoder til løsning af ligninger med 1 eller 2 ubekendte. Hvad nu hvis der er 3 eller 100 ligninger med 100 ubekendte? Selv om metoderne i kapitel 3 kan generaliseres, så kan man godt se, at det hurtigt kan blive meget indviklet at holde styr. Derfor er der udviklet nye metoder og algoritmer til ligningsløsning. Vi introducerer metoden ud fra det vi kender: 2 ligninger med 2 ubekendte – og vil se, at dette kan generaliseres.

### 4.1 Løsning af to ligninger med to ubekendte med determinantmetoden

Når vi løser flere lineære ligninger med flere ubekendte fx 2 ligninger med 2 ubekendte svarer det til at løse *en vektorligning*. Ser vi fx på

$$4 \cdot x - 3 \cdot y = 6$$

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 12$$

så kan vi definere vektorerne  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$  og  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$  og dermed skrive ligningen således:

$$\vec{a} \cdot x + \vec{b} \cdot y = \vec{c}$$

Løsningen til ligningssystemet kan findes ved vektorregning. Først "prikkes" ligningen med  $\hat{b}$ , så  $y$ -leddet forsvinder, og vi dermed kan isolere  $x$ . Dernæst "prikkes" ligningen med  $\hat{a}$ , så  $x$ -leddet forsvinder:

Vi "prikker" ligningen med  $\hat{b}$ , så  $y$ -leddet forsvinder, og vi kan isolere  $x$ :

$$\hat{b} \cdot (\vec{a} \cdot x + \vec{b} \cdot y) = \hat{b} \cdot \vec{c}$$

$$\hat{b} \cdot \vec{a} \cdot x + \hat{b} \cdot \vec{b} \cdot y = \hat{b} \cdot \vec{c}$$

$$\hat{b} \cdot \vec{a} \cdot x = \hat{b} \cdot \vec{c}$$

Vi "prikker" ligningen med  $\hat{a}$ , så  $x$ -leddet forsvinder, og vi kan isolere  $y$ :

$$\hat{a} \cdot (\vec{a} \cdot x + \vec{b} \cdot y) = \hat{a} \cdot \vec{c}$$

$$\hat{a} \cdot \vec{a} \cdot x + \hat{a} \cdot \vec{b} \cdot y = \hat{a} \cdot \vec{c}$$

$$\hat{a} \cdot \vec{b} \cdot y = \hat{a} \cdot \vec{c}$$

Vi bemærker her, at udtryk som  $\hat{a} \cdot \vec{b}$  er en determinant:  $\hat{a} \cdot \vec{b} = \det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$ :

Vi indfører dette og isolerer  $x$  og  $y$ :

$$x = \frac{\hat{b} \cdot \vec{c}}{\hat{b} \cdot \vec{a}} = \frac{\det(\vec{b}, \vec{c})}{\det(\vec{b}, \vec{a})} = \frac{-\det(\vec{c}, \vec{b})}{-\det(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D}$$

$$y = \frac{\hat{a} \cdot \vec{c}}{\hat{a} \cdot \vec{b}} = \frac{\det(\vec{a}, \vec{c})}{\det(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D}$$

Her har vi udnyttet, at:  $\det(\vec{b}, \vec{c}) = -\det(\vec{c}, \vec{b})$  og  $\det(\vec{b}, \vec{a}) = -\det(\vec{a}, \vec{b})$ .

*Bemærk også, at vi har antaget  $D \neq 0$ . Dette kommenteres i en øvelse nedenfor.*

Vi benævner determinanten i tælleren svarende til den af de ubekendte vi ønsker at bestemme, her henholdsvis  $D_x$  og  $D_y$ . Bemærk, at  $D_x$  fremkommer ved at skrive  $\vec{c}$ 's koordinater på  $x$ -koefficienternes plads, mens  $D_y$  fremkommer ved at skrive  $\vec{c}$ 's koordinater på  $y$ -koefficienternes plads. Determinanten i

begge nævnere er den samme, nemlig  $D = \det(\vec{a}, \vec{b})$ . Man kalder denne for *ligningssystemets determinant*.

Vi samler resultatet i følgende sætning:

**Sætning 6: Løsning af to ligninger med to ubekendte med determinantmetoden**

Vektorligningen  $\vec{a} \cdot x + \vec{b} \cdot y = \vec{c}$ , hvor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  og  $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$  er egentlige vektorer i planen, har præcis én løsning, når *ligningssystemets determinant*  $D \neq 0$ . Løsningen er i så fald:

$$(x, y) = \left( \frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right), \text{ hvor } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ og } D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Hvis  $D = 0$  har ligningssystemet enten ingen eller uendeligt mange løsninger.

**Øvelse 4.1: Situationen med  $D = 0$**

a) Vis, at hvis et ligningssystemets determinant, så er også  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

b) Udnyt a) til at vise, at hvis  $D = 0$ , så er de linjer, som ligningerne fremstiller, parallelle.

c) Argumenter for sætningens sidste påstand, og giv en geometrisk tolkning af de to muligheder.

**Eksempel: Anvendelse af determinantmetoden**

Vi løser ligningssystemet ovenfor ved hjælp af determinanter:

$$4 \cdot x - 3 \cdot y = 6$$

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 12$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

hvor vi har:

$$D_x = \det(\vec{c}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = 18 - (-36) = 54 \quad \text{og} \quad D_y = \det(\vec{a}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 48 - 12 = 36$$

$$D = \det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - (-6) = 18$$

Altså får vi:

$$(x, y) = \left( \frac{54}{18}, \frac{36}{18} \right) = (3, 2)$$

**Øvelse 4.2**

Løs ligningssystemet ved determinantmetoden:

$$2 \cdot x + 5 \cdot y + 2 = 0$$

$$3 \cdot x - 4 \cdot y - 20 = 0$$

**Øvelse 4.3**

Benyt determinantmetoden til at løse nogle af ligningssystemerne fra øvelse 3.10.

## 4.2 Løsning af 3 ligninger med 3 ubekendte med determinantmetoden

Hvis vi prøver at løse 3 ligninger med 3 ubekendte vha. substitutions- eller koefficientmetoden, kan det hurtigt blive en noget langtrukket proces. Men determinantmetoden som formuleret i sætning 6 åbner imidlertid mulighed for en smart måde at gøre tingene på. Lad os se på et eksempel

$$6x - 4y + 2z = 5$$

$$7x + y - 2z = 1$$

$$4x + 3y + 6z = -2$$

Hvis vi helt mekanisk følger ideen i forrige afsnit, så omformes dette til en vektorligning:

$$\vec{a} \cdot x + \vec{b} \cdot y + \vec{c} \cdot z = \vec{d}, \text{ hvor } \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Herfra er det ikke så let at se, hvordan vi kopierer situationen i 2d, for tværvektorbegrebet findes ikke i 3d. Derfor er man nødt til at gå et skridt videre og omforme vektorligningen til det man kalder en matrixligning:

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 7 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ hvor talblokken kaldes en matrix}$$

### Øvelse 4.4 Hvordan en vektor ganges på en matrix

a) Matricen består åbenbart af alle koefficienterne, skrevet på deres pladser, men uden de ubekendte. Disse er til gengæld samlet i en vektor, der tilsyneladende skal ganges på. Kan du forklare hvordan vektoren ganges på matricen, så vi får de oprindelige tre ligninger med tre ubekendte?

b) Prøv at opskrive følgende ligningssystem som en matrixligning:

$$4 \cdot x - 3 \cdot y = 6$$

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 12$$

I afsnit 4.1 fandt vi ud af, at løsningen til ligningssystemet i ovenstående øvelse kunne skrives med determinantsymbolet således:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{54}{18} = 3 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{36}{18} = 2$$

Når man ser en formel som i denne fra sætning 6, så får man let den tanke: Kunne det ikke bare generaliseres så vi kan opstille en formel for 3 ligninger med 3 ubekendte?

Og videre endnu med 4 ligninger med 4 ubekendte, 5 ligninger... , n ligninger med n ubekendte?

Og svaret er bekræftende: Det kan man. For tre ligninger med tre ubekendte, som den vi startede med, er løsningen:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Problemet er selvfølgelig, at vi ikke har forklaret, hvordan man udregner 3 x 3 determinanter. Det illustrerer vi med udregning af *ligningssystemets determinant*:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - a_1 \cdot c_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_2 \cdot c_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot a_3$$

#### Øvelse 4.5. Udregning af en 3 x 3 determinant

a) Anvend formelen til at udregne determinanten for ligningssystemet:

$$6x - 4y + 2z = 5$$

$$7x + y - 2z = 1$$

$$4x + 3y + 6z = -2$$

Du skal få 306.

b) Formlen for 3 x 3 determinanter kan lettest huskes og anvendes ved at opskrive to talblokke efter hinanden, og derefter først udregne produktet af de tre første diagonaler skråt ned til højre, som adderes, og så udregne produktet af de sidste tre diagonaler skråt ned til venstre, som subtraheres.

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 & c_1 & \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 & c_2 & \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 & c_3 & \end{array}$$

Tjek denne "tommelfingerregel" med formelen ovenfor.

c) Udregn de øvrige tre determinanter, og bestem løsningerne x, y og z.

$$\text{Du skal få: } x = \frac{78}{306}, \quad y = \frac{-274}{306}, \quad z = \frac{-17}{306}$$

(Løsningerne kan reduceres, men det er ikke så interessant her)

### 4.3 Matrixalgebra og løsning af n ligninger med n ubekendte

Generelt kan ethvert ligningssystem af n ligninger med n ubekendte løses ved denne metode, såfremt ligningssystemets determinant er forskellig fra 0. Hvis den er 0 svarer det til, at ligningssystemet har ingen løsninger, eller uendeligt mange løsninger. Det er teoretisk elegante at vi som i afsnit 4.2 kan opskrive løsningerne til et ligningssystem i én formel. Formlerne kaldes Cramers formler, opkaldt efter den schweiziske matematiker Gabriel Cramer (1704-1752).

I praksis er formlerne mere problematiske at bruge. I afsnit 4.1 så vi at en 2 x 2 determinant har 2 led. Men i afsnit 4.2 så vi, at en 3 x 3 determinant har 6 led.

Antallet af led kan også angives som  $3 \cdot 2 = 3!$ . Og for en 4 x 4 determinant bliver antallet af led  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ .

### Øvelse 4.6: Hvor mange led er der i en determinant?

- a) Hvor mange led er der i en  $5 \times 5$  determinant?  
 b) Du har et ligningssystem med 10 ligninger med 10 ubekendte og vil løse det med determinantmetoden. Hvor mange led er der i udregningen af determinanterne?

Øvelse 4.6 fortæller at vi må have andre metoder end determinantmetoden, når vi skal løse mange ligninger. Det er der udviklet metoder til. De bygger videre på omskrivningen af ligningssystemer på matrixform. Hvis vi i ligningen fra afsnit 4.2:

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 7 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

kaldet matricen for  $\mathbf{A}$ , vektoren med de variable for  $\mathbf{v}$ , og vektoren med værdierne for  $\mathbf{b}$ , så kan ligningen skrives:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b}, \text{ hvor vi skal bestemme } \mathbf{v}$$

Det er starten på det matematiske område der hedder *matrixalgebra*. Du kan hente et dokument der giver en indføring i dette emne [her](#) (link til 11)

## 4.4 Overbestemte og underbestemte systemer

Af TICRA-filmen fremgår det, at virkeligheden i parabolkonstruktionens verden desværre sjældent er så simpel, at problemløsningen munder ud i  $n$  ligninger med  $n$  ubekendte. Ofte er ligningssystemet enten underbestemt (for få ligninger/informationer til antallet af ubekendte) eller overbestemt (for mange ligninger/informationer til antallet af ubekendte).

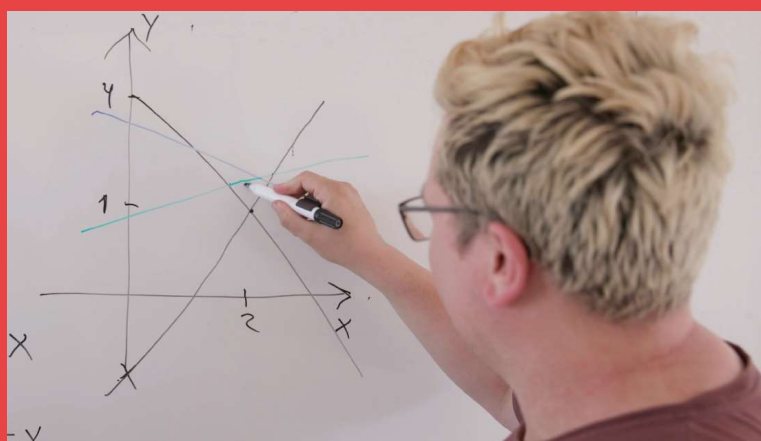
### Øvelse 4.7

Afgør hvilke af følgende to ligningssystemer, der er overbestemte og underbestemte. Overvej i hvert tilfælde om der er én løsning, uendeligt mange løsninger eller måske slet ingen løsninger.

<p>a)</p> $\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x - 3y + 2z &= 4 \end{aligned}$	<p>b)</p> $\begin{aligned} -2x - y + z &= 1 \\ 3x - 2y + 2z &= 2 \\ x + y + z &= 4 \\ 2x - y - z &= 4 \end{aligned}$
---	--

Skal vi bestemme værdierne af tre variable, er det ikke en fordel at have 4 oplysninger. Det er generelt ikke en fordel at have for mange oplysninger. Men sådan er virkeligheden, og har vi "for mange" oplysninger, er vi selvfølgelig nødt til at tage hensyn til dem. Det er emnet for kapitel 6.

# 5. Numerisk løsning af ligninger



Hvis lineære ligninger kan løses, så kan de løses eksakt. Der er nogle helt præcise talværdier, som løser ligningen eller ligningssystemet. I virkelighedens verden er der sjældent eksakte løsninger. Det skyldes helt banalt, at virkeligheden meget sjældent er lineær. Men så udarbejder man lineære tilnærmelser og udregner tilnærmede løsninger til problemet.

## 5. Numerisk løsning af ligninger og numerisk bestemmelse af nulpunkter

(Dette afsnit er en lettere redigeret version af afsnittet fra *Hvad er matematik? 2*, kapitel 8, 'Numeriske metoder og algoritmer', s. 329-331. Dette giver os en stærk intuition om, at metoden må virke – og at den er effektiv. Begrundelsen for, at den virker, får man ved at oversætte problemet til et, der kan behandles i teorien for iteration og kaos.)

En af de helt centrale procedurer i matematik er at kunne bestemme nulpunkter for en funktion. Tænk fx på, hvordan man bestemmer maksimum og minimum indenfor differentialregning. Der findes nogle ganske få tilfælde, som førstegrads- og andengradsligninger, hvor nulpunkter kan findes med en formel. Det normale er, at vi må ty til andre midler. Værktøjsprogrammer har indbygget sådanne *numeriske metoder* i fx solve-kommandoerne. Med "numeriske metoder" mener vi simpelthen metoder, der anvendes, hvor vi ikke har en eksakt formel. Sådanne metoder vil normalt være *algoritmer*, hvor en bestemt fremgangsmåde gentages igen og igen til vi er tilfreds med den tilnærmede værdi, vi finder. Vi vil her illustrere det med to metoder til at bestemme nulpunkter eller *rødder* i en funktion.

### 5.1 Bisektionsmetoden



Vi ønsker at bestemme det nulpunkt for funktionen  $f(x) = x^2 - 2$ , der har en positiv  $x$ -koordinat. Dvs. vi ønsker at bestemme  $\sqrt{2}$ . *Bisektion* betyder halvering, og det vi halverer i denne algoritme er bredden af intervaller omkring nulpunktet. Vi starter altid med at plote funktionen og få et indtryk af hvor nulpunktet omtrent er, se figuren.

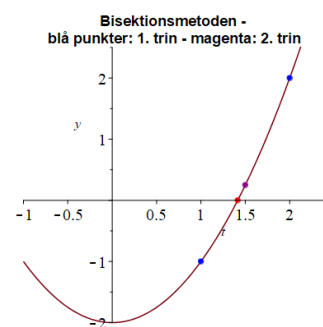
1. trin: Vælg to  $x$ -værdier, hvor funktionsværdierne har modsat fortegn, her:  $x=1$  og  $x=2$ , med funktionsværdier:  $f(1)=-1$  og  $f(2)=2$ .

2. Udregn midtpunktet mellem de to samt dennes funktionsværdi:

$$m_1 = 1.5 \quad \text{og} \quad f(m_1) = f(1.5) = 0.25$$

3. Da  $f(1.5) = 0.25$  er positiv, udregnes midtpunktet mellem 1 og  $m_1$

$$m_2 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25 \quad \text{og} \quad f(m_2) = f(1.25) = -0.4375$$



#### Øvelse 5.1 Nulpunkt med to korrekte decimaler

a) Opskriv trin nr. 4 og 5.

b)  $\sqrt{2} = 1.414213562$  med 10 betydende cifre. Fortsæt de næste trin indtil du har  $\sqrt{2}$  med to korrekte decimaler. (Dvs. 1.41 skal optræde i to trin efter hinanden).

c) Algoritmen er let at implementere. Men hvad synes du om effektiviteten af algoritmen?

### 5.2. Newton Raphsons metode

Udvikling af metoder til ligningsløsning har været en vigtig del af matematikken siden oldtiden. Med udviklingen af differentialregningen opstod nye muligheder. Den metode, vi her omtaler, blev udviklet nogenlunde samtidig og uafhængigt af hinanden af Newton og hans samtidige Joseph Raphson (1648-1712). Den er både hurtig og præcis.

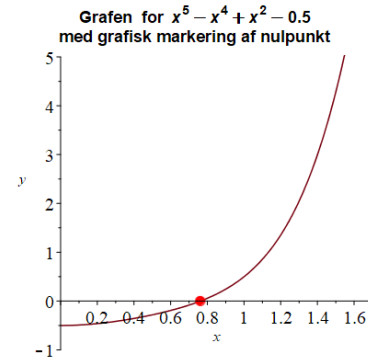


Lad os illustrere metoden med et eksempel. Man vil undervejs se, at metoden har generel karakter.

Betragt polynomiet  $p(x) = x^5 - x^4 + x^2 - 0.5$ . Vi tegner grafen for at få en fornemmelse af funktionens nulpunkter.

Ideen i Newton-Raphsons metode er nu, at vi starter med et "gæt" på et nulpunkt relativt tæt på det røde nulpunkt. Vi vælger  $x = 1.5$ , hvorved vi bedre kan få en tegning der viser metoden.

1. trin: Vi bestemmer punktet  $(1.5, f(1.5))$ , og lægger en tangent  $t_1(x)$  til grafen i dette punkt. Denne tangent vil skære  $x$ -aksen.



Fra differentialregningen kender vi en forskrift for tangenten:

$$t_1(x) = p(x_0) + p'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Denne anvendes nu til at bestemme en formel for tangentens skæring med  $x$ -aksen – det er blot de almindelige regler for ligningsløsning vi her bruger:

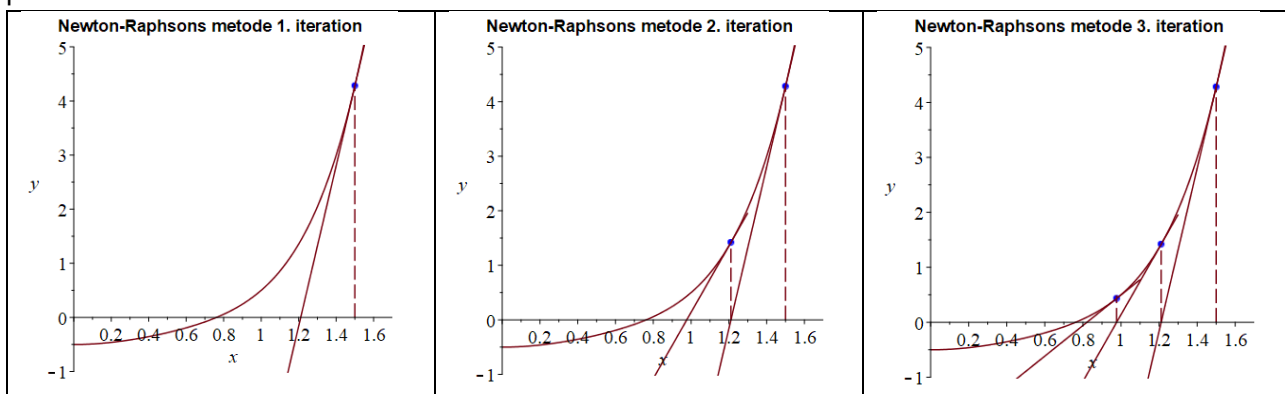
$$\begin{aligned} 0 &= p(x_0) + p'(x_0) \cdot (x - x_0) \\ -p(x_0) &= p'(x_0) \cdot (x - x_0) \\ -\frac{p(x_0)}{p'(x_0)} &= (x - x_0) \\ x &= x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)} \end{aligned}$$

Vi må naturligvis ikke dividere med 0, så udregningerne kan ikke altid gennemføres.

Hvad svarer situationen  $p'(x_0) = 0$  til rent grafisk?

*Dette betyder, at der er tilfælde, hvor metoden ikke kan anvendes.*

Vi har nu en formel for en tangents skæring med  $x$ -aksen. Ved at indsætte startværdien  $x_0$  får vi den næste værdi:  $x_1 = 1.210970$ . Med  $x_1$  kan vi gentage processen, bestemme en tangent og opsøge skæringspunktet med  $x$ -aksen:



### Øvelse 5.2. Kør Newton-Raphson

a) Bestem tangenten  $t_1(x) = p(x_0) + p'(x_0) \cdot (x - x_0)$  og beregn selv  $x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)}$

b) Udnyt punktet  $x_1$  til at bestemme  $x_2$  osv. Du skal få følgende række af tal:

$x_0 = 1.5$	$x_1 = 1.210970$	$x_2 = .9770493$	$x_3 = .8210262$	$x_4 = .7664689$	$x_5 = .7617505$
-------------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------

c) Hvis vi bestemmer nulpunktet med en solve-facilitet, får vi  $x_* = 0.7617200$ . Hvor mange gange skal vi køre NR, før det tilnærmede nulpunkt er korrekt med 7 decimaler.

### Øvelse 5.3.

Lad  $p(x) = x^3 - 3x + 1$ .

a) Tegn grafen i intervallet  $[-2.5; 2.5]$ .

Du skal få et grafisk billede, der viser, at  $p(x)$  har tre nulpunkter.

b) Definer NR-funktionen:  $p_{NR}(x) := x - \frac{p(x)}{p'(x)}$ .

c) For hvert af de tre nulpunkter skal du ved hjælp af grafen vælge en  $x$ -værdi tæt ved nulpunktet som begyndelsesværdi, og så køre Newton-Raphson ud fra dette og med  $p_{NR}(x)$ .

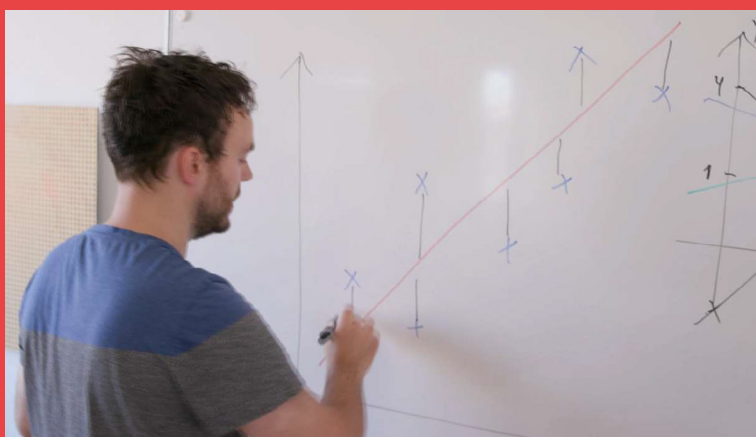
(Du skal få nulpunkterne: 0.347296, 1.532089, -1.879385)

Newton-Raphsons algoritme er let at implementere, da det er en simpel iterationsproces, dvs en proces hvor det samme gentages igen og igen: Tegn en tangent i et punkt på grafen, opsøg tangentens skæring med 1.-aksen, bestem punktet på grafen lodret over denne  $x$ -værdi, tegn en tangent i det nye punkt på grafen, opsøg ...

Der findes naturligvis en række andre algoritmer til at bestemme nulpunkter, også nogle der er betydeligt mere effektive. Men de er til gengæld også ganske komplicerede. Newton-Raphson er forbløffende effektiv i betragtning af, hvor simpel den er.

Vi kan indse, hvorfor Newtons nulpunktsmetode er så effektiv, ved hjælp af resultater fra et noget overraskende sted, nemlig fra *Teorien om iteration og kaos!* Du kan hente et dokument, hvor dette gennemgås. Det bygger på kendskab til differentiation af sammensat funktion. Dokumentet kan hentes [her](#) (link til 12)

# 6. Mindste kvadraters metode og bedste rette linje



I filmen fortæller Oscar Borris, at man meget ofte i en problemløsning har flere oplysninger end man skulle bruge, hvis opgaven var at finde eksakte løsninger. Man kan ikke bare smide data væk, men må i stedet udvikle løsningsmetoder, som tager hensyn til alle data. Kernen i disse forskellige metoder er den vi får præsenteret i filmen, og som kaldes 'mindste kvadraters metode'.

## 6. Regressionsanalyse, mindste kvadraters metode og bedste rette linje

Data, som vi indsamler for at opnå viden om omverden, er i mange situationer behæftet med variation, eller støj, som vi også vil kalde det. Eller måske er der tale om, at der er skjulte variable på spil, hvis indflydelse ikke fanges af den matematiske model, vi lige nu anser som den bedste? Derfor er der i matematik også udviklet metoder til at "trænge igennem støjen" og nå ind til de underliggende sammenhænge. Metoderne går under den fælles betegnelse *regressionsanalyse*, og det grundlæggende værktøj, vi anvender, er den såkaldte *mindste kvadraters metode*.

Lad os introducere metoden med et praktisk eksempel:

### 6.1 Eksempel: Bedste rette linje gennem et sæt af datapunkter

(Dette afsnit er lånt fra HEM2, projekt 8.5)

<p>I 1880'erne indsamlede Francis Galton (1822-1911) et datasæt, der indeholdt sammenhørende målinger af fædres højder og deres førstefødte sønners højder som voksne. Der er målinger for i alt 952 par af fædre og sønner. Formålet med arbejdet var dengang at få en bedre indsigt i, hvordan egenskaber nedarves.</p> <p>Historisk set var det analysen af dette datasæt, hvor du nedenfor ser de første 10 målinger (angivet i cm), der gav anledning til det umiddelbart besynderlige navn "regressionsanalyse". Regression er det modsatte af progression og betyder tilbageskridt. Konklusionen på undersøgelsen var nemlig, at særligt høje fædre i gennemsnit fik knap så høje sønner – og det opfattede Galton som et tilbageskridt! Men samtidig fik små fædre sønner, der også var små, men dog lidt højere.</p>	nummer	fars højde	sønnens højde
	1	186,9	183,4
	2	184,6	172,0
	3	185,0	179,0
	4	182,1	165,4
	5	179,4	155,4
	6	178,4	160,3
	7	179,7	165,0
	8	179,7	168,7
	9	176,5	160,3
	10	173,4	157,5

De første 10 ud af Galtons datasæt på i alt 952

#### Øvelse 6.1 Udfør lineær regression ved hjælp af et matematisk værktøjsprogram

- Udfør et punktplot af datasættet her, og kommenter, om plottet giver anledning til at tro på, at der findes en bagvedliggende lineær sammenhæng.
- Udfør lineær regression på datasættet. Du skal få en linje nogenlunde som den røde linje nedenfor. Samtidig giver programmet dig formlen:  $y = 1.94x - 183.58$ . Hvor kommer den fra?

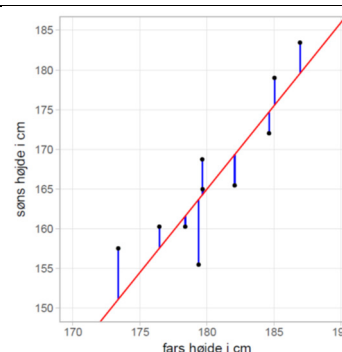
Fremgangsmåden er følgende:

1. Vi måler **den lodrette afstand** mellem linjen og datapunkterne – det er længden af de blå linjestykker.

Kalder vi fædrenes højder for  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  og sønnernes højder for  $y_1, y_2, \dots, y_{10}$ , og er regressionslinjens forskrift  $y = a \cdot x + b$ , så er den lodrette afstand for det første datapunkt:

$$y_1 - (a \cdot x_1 + b) \quad (*)$$

Overvej selv dette!



2. Vi ønsker ét samlet tal, der skal måle afstanden mellem linjen og datasættet. Læg mærke til, at nogle gange, fx ved punkt nr 3 og 4, vil formlen (\*) give et negativt tal. Men hver afstand skal give et positivt bidrag. Derfor vælger vi at kvadrere disse tal og bagefter summere. (I videregående statistik argumenteres for denne fremgangsmåde).

3. Det samlede udtryk for afstanden mellem linjen og datasættet er derfor:

$$S = (y_1 - (a \cdot x_1 + b))^2 + (y_2 - (a \cdot x_2 + b))^2 + \dots + (y_{10} - (a \cdot x_{10} + b))^2$$

4. Udtrykket i punkt 3 kan skrives op med *ethvert* lineært udtryk,  $y = a \cdot x + b$ . Blandt alle disse uendeligt mange udtryk for  $S$ , vælger vi nu den linje, der giver *det mindste tal*. Det var det samme Oscar og Casper søgte efter med øjemål i øvelsen på tavlen. Når vi skal være mere præcise, kommer differentialregningen på banen – det sker i afsnit 6.3

**Bemærk:** Der ligger i det foregående nogle subjektive valg, der ikke kan begrundes alene ud fra den matematik vi har kendskab til.

- For det første vælger vi at måle afstanden lodret. Men den mindste afstand fra et punkt til en linje findes som den *vinkelrette* afstand. Dette giver imidlertid nogle ganske klodsede udtryk, som det er svært at regne på. Endvidere er det svært at generalisere metoden til fx polynomisk regression. Så vi *vælger* at se på den lodrette afstand. Det giver ikke alene en fordel mht udregninger, men betyder også, at vi ser på forskellen mellem den empiriske dataværdi og modelværdien.

- For det andet vælger vi at se på kvadratet på afstanden og ikke kun afstanden. Det er også et valg, der bl.a. er bestemt af, at afstand måles som den *numeriske værdi*, og denne størrelse er svær at håndtere i store udtryk. Men det betyder, at *afvigere* kan komme til at betyde uforholdsmæssigt meget, da afstandene kvadreres.

I den gren af matematik, der hedder *Lineær algebra* opdager man, at den samlede sum af afstandskvadrater mellem et datasæt og en linje er et udtryk for en afstand i et  $n$ -dimensionalt rum, *nemlig afstanden fra det punkt, som datasættet repræsenterer til linjen*. Hvorfor kvadrater? Fordi afstande også i  $n$  dimensioner findes vha. Pythagoras sætning! Du kan læse mere herom i HEM3 kapitel 9.

### Definition: Regressionslinje

Den linje, der passer bedst muligt til givne dataværdier, kaldes *regressionslinjen* (af og til *tendenslinjen*), og vi siger, at linjen er fremkommet ved at lave *lineær regression*. *Bedst muligt* er bestemt ved *mindste kvadraters metode*, se nedenfor.

## 6.2 Hvor god er tilnærmelsen - residualplot

Selv om regressionslinjen passer nogenlunde til punkterne, så kan vi ikke vide med sikkerhed, at der også er en egentlig årsagssammenhæng. Ofte skal andre fag bidrage til at afgøre, om der faktisk er tale om en årsagssammenhæng og ikke kun en matematisk sammenhæng.

Et værktøj til at svare på, hvor godt modelværdierne passer med måledata, er det såkaldte *residualplot*. Et residualplot giver et grafisk billede af forskellen mellem *dataværdierne* og de beregnede *modelværdier*, dvs længden (regnet med fortegn) af de blå linjestykker. Vi kan derved få et visuelt indtryk af, om forskellen mellem model og virkelighed kan tilskrives tilfældigheder eller synes at være systematiske og dermed udtryk for, at der er nogle sammenhænge, vi ikke har styr på.

### Øvelse 6.2: Residualer og residualplottet på datasættet

- Opstil selv en tabel over residualerne, dvs. forskellen mellem *dataværdierne* og de beregnede *modelværdier*.
- Undersøg, hvordan dit værktøjsprogram kan gøre det pr automatik.
- Tegn residualplottet. Kommentér



### 6.3. Formlen for lineær regression

$S$ , der er skrevet op i afsnit 6.1, og som måler kvadratsummen af afvigelserne, kan betragtes som en funktion af de to variable  $a$  og  $b$ ,  $S(a, b)$ , og de værdier af  $a$  og  $b$ , der giver den mindste kvadratsum, findes som et minimumssted for funktionen  $S(a, b)$ . Funktioner af to variable behandles med principielt samme metode, som vi kender fra funktioner af én variabel:

- Vi differentierer først mht  $b$  og løser ligningen:  $S'_b(a, b) = 0$
- Vi differentierer dernæst mht.  $a$  og løser ligningen  $S'_a(a, b) = 0$

Resultatet af det hele kan sammenfattes i denne sætning, som vi beviser nedenfor

**Sætning 7: Formlen for den lineære regressionslinje**

Lad der være givet et datasæt bestående af  $n$  punkter,  $(x_i, y_i)$ , hvor  $i = 1..n$ .

Vi indfører betegnelserne  $\bar{x}$  og  $\bar{y}$  for middelværdierne (gennemsnittene):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n x_i, \quad \text{og} \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \cdot (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n y_i$$

Koefficienterne i regressionslinjen (*den bedste rette linje*) betegnes  $\hat{a}$  og  $\hat{b}$  og beregnes således:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) \cdot (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \qquad \hat{b} = \bar{y} - \hat{a} \cdot \bar{x}$$

**Bevis.**

Las os nu sige, vi har  $n$  datapunkter. Vi opskriver udtrykket for  $S$ :

$$S = (y_1 - (a \cdot x_1 + b))^2 + (y_2 - (a \cdot x_2 + b))^2 + \dots + (y_n - (a \cdot x_n + b))^2 = \sum_{k=1}^n (y_k - (a \cdot x_k + b))^2$$

Sumtegnet er en kompakt og overskuelig måde at skrive lange udtryk på. Men man skal lige vænne sig til det, så vi vil veksle.

Først vil vi gange parenteserne ud. Den generelle parentes udregnes:

$$\begin{aligned} &(y_k - (a \cdot x_k + b))^2 && \text{Benyt kvadratsætningen på de to led:} \\ &= y_k^2 + (a \cdot x_k + b)^2 - 2 \cdot y_k \cdot (a \cdot x_k + b) && \text{Benyt kvadratsætningen på } (a \cdot x_k + b)^2: \\ &= y_k^2 + ((a \cdot x_k)^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot x_k \cdot b) - 2 \cdot y_k \cdot (a \cdot x_k + b) && \text{Hæv de første og gange ind i den sidste parentes} \\ &= y_k^2 + a^2 \cdot x_k^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot x_k \cdot b - 2 \cdot y_k \cdot a \cdot x_k - 2 \cdot y_k \cdot b \quad (*) \end{aligned}$$

Vi skal bestemme  $a$  og  $b$  så dette udtryk minimeres. Læg mærke til, at  $x$ 'erne og  $y$ 'erne er konstanter. Det er jo de givne datapunkter. Det betyder, at udtrykket kan ses som en funktion af to variable,  $a$ , og  $b$ .

Grafen for funktionen  $S(a,b)$  er en flade der ligger over  $(a,b)$ -planen, hvor  $a$  og  $b$  er de uafhængige variable afsat ud af henholdsvis 1. og 2. akse. Vi leder efter et minimum for denne flade.

Men det er klart, at findes et sådant minimum, hvor hele fladen er "nede i en bølgedal", så er dette minimumspunkt også minimum for den funktion af  $a$ , hvis graf vi får ved at lægge et lodret snit gennem minimumspunktet og parallel med  $a$ -aksen. Og tilsvarende er det minimumspunkt for den funktion af  $b$  hvis graf vi får ved at lægge et lodret snit gennem minimumspunktet og parallel med  $b$ -aksen.

Derfor vil vi nu bestemme først  $b$  ved at holde  $a$  fast (dvs vi ser på snitkurven parallel med  $b$ -aksen). Og derefter  $a$  efter samme opskrift. (*Gjorde vi det i den modsatte rækkefølge, ville udregningerne blive meget mere komplicerede!*)

Vi differentierer udtrykket (\*) mht  $b$ :

$$\frac{d}{db}(y_k^2 + a^2 \cdot x_k^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot x_k \cdot b - 2 \cdot y_k \cdot a \cdot x_k - 2 \cdot y_k \cdot b)$$

$$= 2 \cdot b + 2 \cdot a \cdot x_k - 2 \cdot y_k$$

Det var det  $k$ 'te led, og nu summerer vi og sætter lig med 0 – overvej nøje, at vi kan gøre det, ved fx at skrive det ud som en stor sum:

$$\sum_{k=1}^n (2 \cdot b + 2 \cdot a \cdot x_k - 2 \cdot y_k) = 0$$

Vi summerer de tre led hver for sig, og rykker det sidste over:

$$\sum_{k=1}^n 2 \cdot b + \sum_{k=1}^n 2 \cdot a \cdot x_k = \sum_{k=1}^n 2 \cdot y_k$$

Vi forkorter med 2:

$$\sum_{k=1}^n b + \sum_{k=1}^n a \cdot x_k = \sum_{k=1}^n y_k$$

Vi sætter  $a$  udenfor sumtegn, dvs parentes, og tæller antal  $b$ :

$$n \cdot b + a \cdot \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n y_k$$

Vi dividerer med:  $n$

$$b + a \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k$$

Vi anvender definitionen på gennemsnit, som kaldes  $\bar{x}$  og  $\bar{y}$

:

$$b + a \cdot \bar{x} = \bar{y}$$

Vi isolerer  $b$ :

$$b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$$

Det er formelen for  $b$  i sætningen.

Derefter vil vi nu bestemme  $a$  ved at holde  $b$  fast (dvs vi ser på snitkurven parallel med  $a$ -aksen): Men først indsættes den  $b$ -værdi, som vi nu kender i udtrykket (\*)

$$S(a) = y_k^2 + a^2 \cdot x_k^2 + (\bar{y} - a \cdot \bar{x})^2 + 2 \cdot a \cdot x_k \cdot (\bar{y} - a \cdot \bar{x}) - 2 \cdot y_k \cdot a \cdot x_k - 2 \cdot y_k \cdot (\bar{y} - a \cdot \bar{x})$$

Gang parenteserne ud:

$$S(a) = y_k^2 + a^2 \cdot x_k^2 + \bar{y}^2 + a^2 \cdot \bar{x}^2 - 2 \cdot \bar{y} \cdot a \cdot \bar{x} + 2 \cdot a \cdot x_k \cdot \bar{y} - 2 \cdot a^2 \cdot x_k \cdot \bar{x} - 2 \cdot y_k \cdot a \cdot x_k - 2 \cdot y_k \cdot \bar{y} + 2 \cdot y_k \cdot a \cdot \bar{x}$$

Dette udtryk differentieres:

$$\frac{d}{da}(y_k^2 + a^2 \cdot x_k^2 + \bar{y}^2 + a^2 \cdot \bar{x}^2 - 2 \cdot \bar{y} \cdot a \cdot \bar{x} + 2 \cdot a \cdot x_k \cdot \bar{y} - 2 \cdot a^2 \cdot x_k \cdot \bar{x} - 2 \cdot y_k \cdot a \cdot x_k - 2 \cdot y_k \cdot \bar{y} + 2 \cdot y_k \cdot a \cdot \bar{x})$$

$$= 2 \cdot a \cdot x_k^2 + 2 \cdot a \cdot \bar{x}^2 - 2 \cdot \bar{y} \cdot \bar{x} + 2 \cdot x_k \cdot \bar{y} - 4 \cdot a \cdot x_k \cdot \bar{x} - 2 \cdot y_k \cdot x_k + 2 \cdot y_k \cdot \bar{x}$$

Saml  $a$ -leddene

$$\begin{aligned}
 &= 2 \cdot a \cdot (x_k^2 + \bar{x}^2 - 2 \cdot x_k \cdot \bar{x}) - 2 \cdot \bar{y} \cdot \bar{x} + 2 \cdot x_k \cdot \bar{y} - 2 \cdot y_k \cdot x_k + 2 \cdot y_k \cdot \bar{x} \\
 &= 2 \cdot a \cdot (x_k - \bar{x})^2 - 2 \cdot \bar{y} \cdot \bar{x} + 2 \cdot x_k \cdot \bar{y} - 2 \cdot y_k \cdot x_k + 2 \cdot y_k \cdot \bar{x} \\
 &= 2 \cdot a \cdot (x_k - \bar{x})^2 - 2 \cdot \bar{y} \cdot (\bar{x} - x_k) + 2 \cdot y_k \cdot (\bar{x} - x_k) \\
 &= 2 \cdot a \cdot (x_k - \bar{x})^2 - 2 \cdot (\bar{x} - x_k) \cdot (\bar{y} - y_k)
 \end{aligned}$$

Anvend en kvadratsætning:

Sæt henh.  $-2 \cdot \bar{y}$  og  $+2 \cdot y_k$  uden for parentes

Kontroller! – og sæt nu  $(\bar{x} - x_k)$  udenfor

Det var det k'te led, og nu summerer vi og sætter lig med 0.

$$\sum_{k=1}^n (2 \cdot a \cdot (x_k - \bar{x})^2 - 2 \cdot (\bar{x} - x_k) \cdot (\bar{y} - y_k)) = 0$$

Summen splittes op og vi rykker over:

$$\sum_{k=1}^n 2 \cdot a \cdot (x_k - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^n 2 \cdot (\bar{x} - x_k) \cdot (\bar{y} - y_k)$$

Forkort med 2 og sæt  $a$  uden for:

$$a \cdot \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^n (\bar{x} - x_k) \cdot (\bar{y} - y_k)$$

Isoler  $a$ :

$$a = \frac{\sum_{k=1}^n (\bar{x} - x_k) \cdot (\bar{y} - y_k)}{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}$$

Det er formlen for  $a$  i sætningen

### Øvelse 6.3 Udfør lineær regression ved at beregne koefficienterne

Anvend sætning 2 til at beregne formlen for den lineære regression på de 10 datapunkter, og sammenlign med resultatet i øvelse 6.1. Det er lettest at opstille beregningen i et regneark, hvor dataværdierne er skrevet ind i to kolonner.

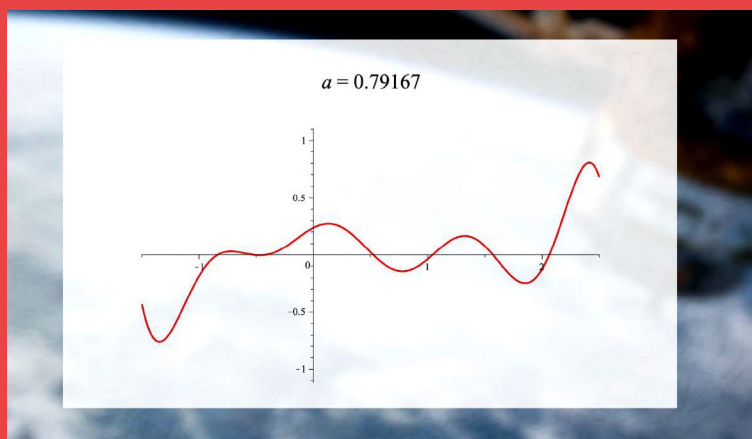
### Øvelse 6.4 Undersøg et datasæt med regression og residualplot

Du kan [her](#) (link til 13) finde et andet lille datasæt, som du skal undersøge ved at udføre lineær regression og tagen et residualplot.



# 7.

## Tilnærmelser med polynomier og trigonometriske funktioner



TICRA fremstiller ikke selv rent fysisk de parabler, der sættes på kommunikationssatellitterne. Men de udvikler den matematik, der sikrer, at signalerne modtages oppe på satellitten og derfra sendes ned præcis, hvor det ønskes. Den bulede overflade på paraboldisken, der sikrer dette, er et grafiske billede af en meget kompliceret, men samtidig meget effektiv matematisk funktion. En parabol med en bulet overflade er en figur i 3d, så de funktioner, der er i spil, er funktioner af to variable. For bedre at forstå processen ser vi i dette kapitel først på funktioner af én variabel. I kapitel 8 ser vi på det fulde billede med funktioner i to variable.

## 7. Tilnærmelser med polynomier og trigonometriske funktioner

I dette kapitel vil vi kort se på, hvordan store datasæt, eller kurver, der er frit tegnet i hånden, kan tilnærmes med stor nøjagtighed med matematisk definerede funktioner af én variabel, specielt polynomier og summer af trigonometriske funktioner

### 7.1 Kast med en bold analyseret med andengradsregression

Har vi tre datapunkter, der ikke ligger på en vandret linje, og hvor 1. koordinaterne er forskellige, så kan vi bestemme et andengradspolynomium, hvis graf går gennem de tre punkter. Det skyldes, at vi har tre oplysninger og skal bestemme tre parametre. Dvs. vi kan opstille tre ligninger med tre ubekendte.

Men har vi flere end tre punkter vil det normalt ikke kunne lade sig gøre. Men i stedet kan vi bestemme det andengradspolynomium der tilnærmer datapunkterne bedst muligt. Det gøres med samme teknik som ved linjer, altså anvendelse af mindste kvadraters metode.

Andengradsregression er indbygget i de matematiske værktøjsprogrammer. Du kan [her](#) (link til 14) finde et dokument, hvor du kan afprøve dette med to eksempler – at bestemme den kurve en vandstråle i et springvand følger, og at bestemme den kurve som en bold der kastes følger. Dataværdierne i eksemplerne er optaget med videopoint, men du kan selv lave samme eksperiment, ved med din mobiltelefon at optage et kast, og lægge filmstumpen ind i et program som fx loggerpro.



### 7.2 Løbemønster analyseret med polynomisk regression

Selv om der ikke findes nogen velbegrundede matematiske modeller for elite-idrætsfolks præstationer, så anvendes matematik alligevel i høj grad til at analysere f.eks. et løb.

Vi har brug for en matematisk defineret kurve, der kan fitte dataværdierne, og man anvender her ofte polynomier af højere grad. Hvorfor en matematisk defineret kurve? Fordi vi har brug for at kunne beregne hastighed og acceleration, maks og min for disse osv. Og her anvendes differentialregning. Så vi skal have en glat kurve. Du kan se et eksempel herpå i et miniprojekt, hvor man analyserer Usain Bolts verdensrekordløb ved hjælp af et fjerdegradspolynomium. Du kan hente dokumentet [her](#) (link til 15)



Usain Bolt vinder 100m finalen ved OL i 2008 i overlegen stil. Hans reaktionstid på 0,165 viser, at han var en relativt langsom starter.

### 7.3 Bezierkurver – design med tredjegradspolynomier

Når man skal designe biler, både og flyvemaskiner, eller en elegant ny skrifttype, har man brug for at kunne tegne bløde kurver. Før computerens tid var overgangen mellem designerens arbejde og produktion af prototyper, at man tegnede kurverne op ved at benytte lange fleksible metal- eller trælinealer, der kunne formes til den ønskede kurve.

Sådanne linealer kaldte man for *splines*. Når den ønskede form var fremkommet, holdt man linealen fast med en stribe *ducks*. Da processen ofte foregik på loftet af store fabrikshaller eller hangarer kaldtes den *lofting*. Det var en langsommelig affære, men var længe den eneste praktiske mulighed for at forme skibsskrog og lignende. Der var mange svagheder ved metoden – man kunne ikke let gå ind og justere tegningen, man kunne ikke ved hjælp af en formel tage kurven med et andet sted hen eller skalere op og ned.

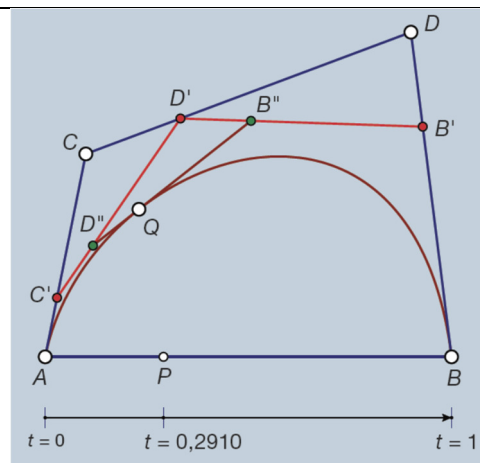
Med computerens fremvækst i 60'erne opstår blandt matematikerne på flyfabrikker og i bilindustrien ideer om mere fleksible tegneredskaber. Men alle holdt kortene tæt ind til kroppen som industrihemmeligheder – bortset fra Renault fabrikkerne, hvor en af deres ledende matematik-ingeniører Pierre Bézier (1910-1999) får lov af sine overordnede til at offentliggøre sin revolutionerende tegnemetode.



Han fortæller selv i sine erindringer, at hans overordnede ikke troede på, at Beziers metode duede til noget. Han skulle have sagt: "*Hr. Bézier, hvis dette virkede, ville Amerikanerne allerede være i gang med at bruge det*". Det var de også, i al hemmelighed.

Derfor har Bézier lagt navn til metoden, der idag er implementeret i stort set alle tegneprogrammer, og som anvendes i alle pdf-filer. Det skyldes blandt meget andet, at metoden kan skalere fonte og andet op og ned uden at det mister i skarphe. Historien om Bezier er indledende fortælling i HEM2 til kapitlet om tredjegradspolynomier. Metoden går nemlig ud på, at både  $x$  og  $y$  koordinaterne til en kurve er repræsenteret af tredjegradspolynomier.

Bezier-kurven genereres ved at fastlægge et start- og slutpunkt,  $A$  og  $B$ , og afsætte to kontrolpunkter,  $C$  og  $D$ .



Styrepointet  $P$  fastlægger nu et tal  $t$ , som er det forhold  $P$  deler linjestykket  $AB$  i. På tegningen er  $t=0.2910$ . Sættes  $|AB|=1$  er  $t=|AP|$ . Punkterne  $B', C'$  og  $D'$  deler de respektive linjestykker i samme forhold. De giver anledning til nye linjestykker  $C'D'$  og  $D'B'$ . Punkterne  $B''$  og  $D''$  deler nu igen de respektive linjestykker i samme forhold  $t$ , og giver derved anledning til linjestykket  $D''B''$ . Og nu endelig får vi *følgepunktet*  $Q$ , som er det, der tegner Bezierkurven.

For når  $P$  trækkes fra  $A$  til  $B$  og dermed parameteren  $t$  bevæger fra 0 til 1, tegner følgepunktet  $Q$  en kurve op, *Bezierkurven*.

Det er klart ud fra tegningen, at Kontrolpunkterne  $C$  og  $D$  bestemmer kurvens form. Du kan fordybe dig mere i Bezierkurver i et miniprojekt, som hentes [her](#) (link til 16)

## 7.4. Styrken og svagheden ved at anvende polynomier i en tilnærmelse

En af de store fordele ved at anvende polynomielle udtryk af typen:

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

som modelfunktioner for tilnærmelser til givne datapunkter er, at de er så enkle at regne med. Vi anvender kun elementære regningsarter, det er en enkel sag at differentiere og integrere dem, så de er lette at implementere i algoritmer. De er specielt velegnede som tilnærmelse til mere komplicerede funktioner som eksponentialfunktioner, logaritmiske og trigonometriske funktioner, hvor der er udviklet en hel teori for disse særlige *Taylorpolynomier*:

Hvis en funktion  $f$  har afledede funktioner af enhver orden i et interval omkring tallet  $x_0$ , så kan funktionen tilnærmes med polynomiet:

$$T_k(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Det vil normalt være en god tilnærmelse indenfor et ikke for stort interval: Der findes helt præcise formler for, hvor god tilnærmelsen er. Læg mærke til, at de første to led:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

er ligningen for tangenten til grafen i  $x_0$ , som netop er bestemt som *den bedste lineære tilnærmelse til grafen*. Med de næste led får vi: Den bedste andengradstilnærmelse, den bedste tredjegradstilnærmelse osv. Så Taylorpolynomierne er en generalisering af tangenten!

Hvis  $x_0 = 0$  bliver udtrykket særlig simpelt:

$$T_k(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$$

Og hvis funktionen  $f$  er let at differentiere, så er det ikke svært at opskrive deres Taylorpolynomier.

### Øvelse 7.1: Taylorpolynomier til kendte funktioner

Bestem Taylorpolynomier med udgangspunkt i  $x_0 = 0$ , for de følgende funktioner, og tegn hver gang grafen for funktionen sammen med nogle af polynomierne – eksperimenter selv med at tage flere led med.

a)  $f(x) = e^x$  (Du skal få  $T_k(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!}$ )

b)  $f(x) = \sin(x)$

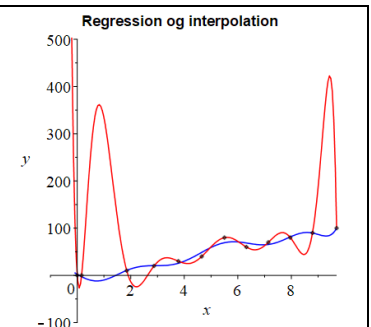
c)  $f(x) = \cos(x)$

d)  $f(x) = \ln(x)$ , med  $x_0 = 1$  (skriv den afledede af  $\ln(x)$  som  $x^{-1}$ , det gør resten lettere)

Du kan [her](#) (link til 17) finde et materiale hvor du kan fordybe dig i projekter om Taylor-polynomier.

Hvorfor så ikke blot anvende polynomier i tilnærmelser? Der er to grundlæggende problemer, hvis vi "nøjes" med at anvende polynomier:

1) Polynomiers udsving er svære at styre, hvilket fx illustreres af det såkaldtes *Runges eksempel*, som er omtalt i HEM2, i den indledende fortælling til kapitel 8 om numeriske metoder. Omkring år 1900 gav Carl Runge en række eksempler på, hvor galt det kan gå, hvis man anvender polynomier med stadigt større grad ved en tilnærmelse til dataværdier. Vi har illustreret det med et moderne eksempel, nemlig modellering af Usain Bolts løbemønster med et 11. gradspolynomium. Modelfunktionens graf går gennem alle datapunkter, men opfører sig jo helt skørt ude i kanten.



2) I virkelighedens verden har vi data og ikke pæne funktioner, som vi så på under afsnittet om Taylor-funktioner. Og regressionstilnærmelserne har ikke pæne udtryk – se afsnit 6.3 hvor kompliceret det er bare for en lineær regression.

Man kan forstå denne situation lidt klarere ved at betragte *koefficienterne* til et polynomium som *koordinater* til "vektorerne":  $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^k\}$ . Taylorpolynomiet  $T_k(x)$  af grad  $k$  for funktionen  $f(x) = e^x$  har *koordinaterne*  $(1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \dots, \frac{1}{k!})$ . Overvej selv dette!

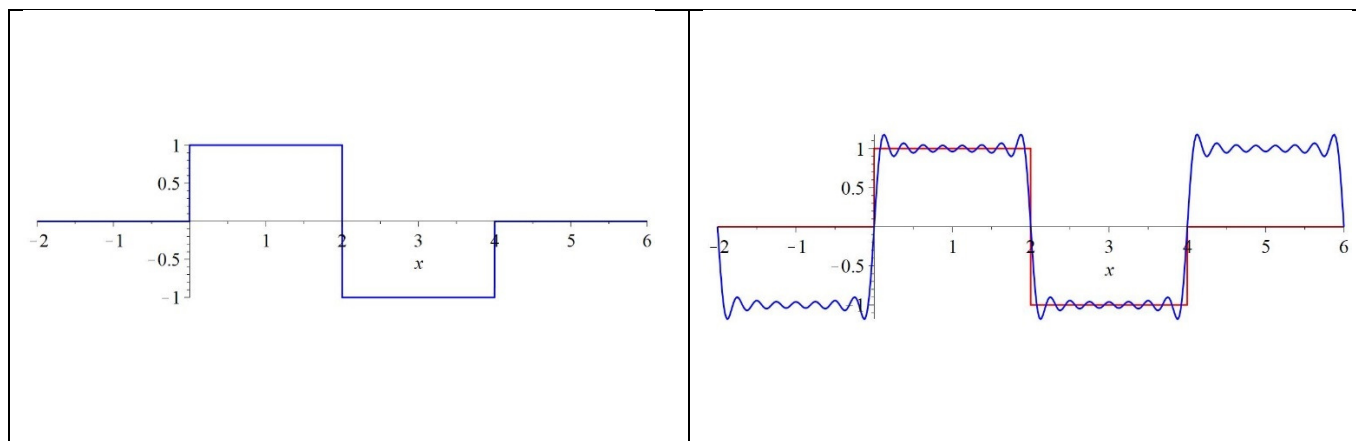
Hvis vi fortsætter denne tankegang, så ved vi fra vektorregning, at fx 2. koordinaten til en vektor er projektionen af denne vektor på 2. aksens enhedsvektor. *Og der findes en formel for projektionen.* Vi kan faktisk oversætte funktioner til vektorer, og her indføre begreber som projektioner og definere koordinater - det er grundlaget for de næste afsnit om tilnærmelser. Problemet med polynomierne er, at giver vi fx polynomiet  $p(x) = 2 + 3x - 5x^2$  de naturlige koordinater  $(2, 3, -5)$ , så ville disse *ikke* kunne fås ved at "projicere"  $p(x)$  ned på "vektorerne":  $\{1, x, x^2\}$ . Der er ingen simpel formel til at få koefficienterne i det polynomium af grad 4 eller 8 eller  $k$ , der tilnærmer data bedst. Men der er andre veje frem.

## 7.5 Fouriertransformationer – tilnærme med trigonometriske funktioner

De første fire eksempler handlede om at skabe tilnærmelser med brug af polynomier. I afsnit 7.4 antydede vi, hvorfor polynomier ikke kan være hele løsningen.

En meget vigtig klasse af funktioner, der er velegnet til at producere grafer, der kan tilnærme datapunkter eller kantede figurer, er de trigonometriske funktioner.

Eksempelvis kan en firkantbølge (figuren tv) (eller bare en firkant, som Oscar tegner) tilnærmes med summer af funktioner af typen  $a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)$  (figuren th):



Når denne klasse af funktioner  $\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \cos(3x), \sin(3x), \dots, \cos(nx), \sin(nx), \dots\}$  er så velegnede til at skabe tilnærmelser, så skyldes det bl.a. at de løser det problem vi beskrev i afsnit 7.4: Hvis en funktion  $f$  skal skrives som en kombination af disse trigonometriske funktioner, så kan vi ved at oversætte til vektorsprog finde koefficienterne  $a_n$  og  $b_n$  i leddene  $a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)$  som projekti- oner ned på "vektorerne"  $\cos(n \cdot x)$  og  $\sin(n \cdot x)$ . Det skyldes, at i denne vektor-verden er disse trigonome- triske funktioner *ortogonale*, som vi kender fra de retvinklede koordinatsystemer.

Betragter vi alle kontinuerte funktioner defineret på et interval  $[a; b]$ , så kan man opfatte disse funktioner som *vektorer*, og man kan indføre et *skalarprodukt* af to funktioner  $f$  og  $g$  som integralet:

$$f \bullet g := \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$$



$f$  og  $g$  kaldes naturligtvis ortogonale, hvis  $f \cdot g = 0$

Hvis vi vælger intervallet  $[a; b]$  til at være  $[-\pi; \pi]$  eller  $[0; 2\pi]$ , eller en anden hel periode for sin og cos, så er alle funktionerne i  $\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \cos(3x), \sin(3x), \dots, \cos(nx), \sin(nx), \dots\}$  indbyrdes ortogonale.

**Øvelse 7.2. Ortogonale funktioner**

Vi ser på kontinuerte funktioner og begrænser definitionsmængden til intervallet  $[0; 2\pi]$ . Argumenter ud fra en grafisk betragtning for, at:

1)  $\int_0^{2\pi} \sin(x) \cdot \cos(x) dx = 0$       2)  $\int_0^{2\pi} \sin(x) \cdot \sin(2x) dx = 0$       3)  $\int_0^{2\pi} \cos(x) \cdot \cos(3x) dx = 0$

Kontroller på dit værktøjsprogram

Beviser for, at dette gælder for alle de nævnte funktioner, findes i materialerne, der omtales nedenfor.

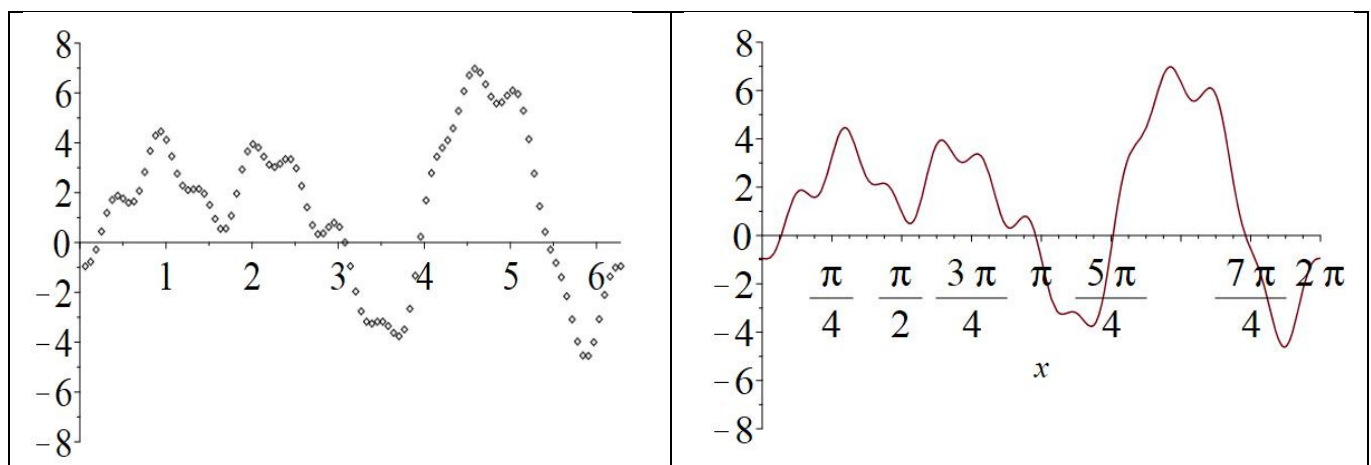
Og det viser sig, at alle kontinuerte funktioner, defineret i dette interval, kan skrives på formen:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x))$$

Og koefficienterne, eller som vi også kan opfatte dem: koordinaterne er nemme at beregne. De bestemmes nemlig som projektionen på disse vektorer med brug af den projektionsformel vi kender fra vektorregningen!

Alt dette forklares nærmere i nogle kapitler om Fourier-teori i studieretningskapitlerne til matematik-fysik og til matematik-musik, som du finder på website for HEM3, der kan tilgås [her](#) (link til 18)

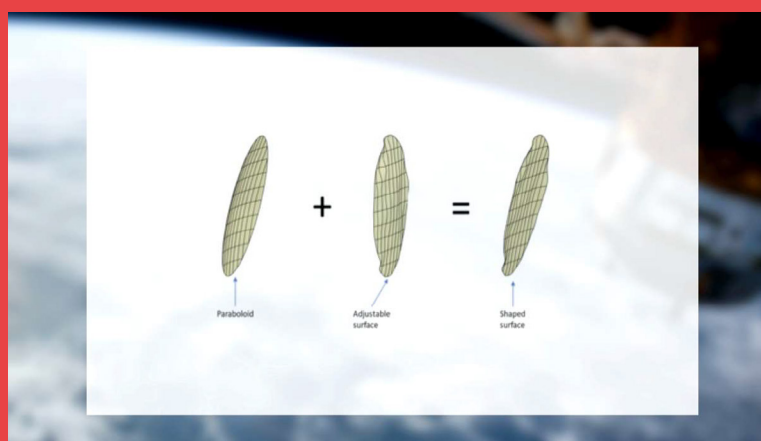
Styrken i Fourieranalyse ses blandt andet ved, at også spredte dataværdier kan tilnærmes med sådanne summer. Hvis dataværdierne er samlet fra bølgefænomener, uanset om det er musik eller målinger af tidevandsbevægelser, så kan vi finde en tilnærmelse der tenderer mod at være helt præcis, når vi tager mange led med. Det venstre billede nedenfor er samlede data, mens det højre er den såkaldte *fourier-transformerede* funktion af datasættet.



Rigtig mange fænomener er kombinationer af bølgefænomener. Vi kan derfor i mange situationer finde tilnærmelser med fourierrækker, der er meget præcise. Teknikken har navn efter den franske matematiker og fysiker Joseph Fourier (1768 – 1830), der præsenterede det eftertiden betegnede Fourieranalyse i 1822. Teknikken og metoderne kan undersøges nærmere [her](#) (link til 19), hvor du kan finde et projekt i Maple om Fourieranalyse.

## 8.

# Matematikken slår buler ikke-lineære tilnærmelser i to variable

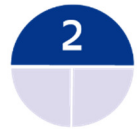


TICRA fremstiller ikke selv rent fysisk de paraboler, der sættes på kommunikationssatellitterne. Men de udvikler den matematik, der sikrer, at signalerne modtages oppe på satellitten og derfra sendes ned præcis, hvor det ønskes. Den bulede overflade på paraboldisken, der sikrer dette, er et grafisk billede af en meget kompliceret, men samtidig meget effektiv matematisk funktion. En parabol med en bulet overflade er en figur i 3d, så de funktioner, der er i spil, er funktioner af to variable. Da grafikken skal lægges på noget næsten cirkulært, er det ofte en fordel at anvende andre koordinatsystemer, end de traditionelle med ortogonale akser. De introduceres i første del og anvendes derefter i anden del.

Med  
matematik  
på  
arbejde

## 8. Matematikken slår buler – ikke-lineære tilnærmelser i to variable

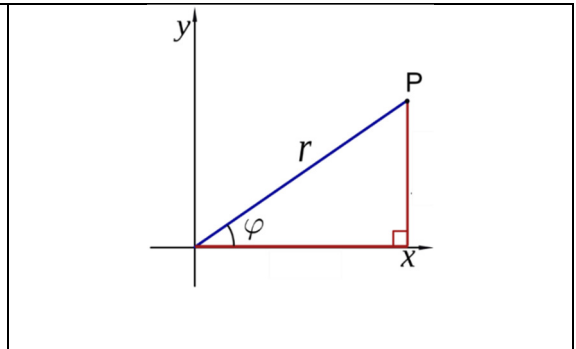
### 8.1 Kartesiske, sfæriske og cylinderkoordinater



Hvis vi skal beskrive overfladen på paraboloiden, har vi som beskrevet i afsnit 1.5 brug for en funktion af to variable,  $f(x, y)$ . Hvis vi skal tegne grafen for funktionen, skal vi bruge tre dimensioner, hvor vi sætter variabelen  $z = f(x, y)$ . Det tredimensionelle ortogonale, eller som det også kaldes: *kartesiske koordinatsystem* er så givet ved variablene,  $x, y, z$  og et punkt eller den tilsvarende stedvektor kan beskrives med enhedsvektorerne,  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  og  $\vec{e}_z$ . Men der er andre koordinatsystemer, og man vælger det, som bedst passer til opgaven.

#### 8.1.1 Polære koordinater

I 2d er det kartesiske koordinatsystem især godt hvis vi gerne vil tegne grafer på fladt papir, hvor akserne helt naturligt er vandret og lodret. Men somme tider er det mere naturligt, at se på følgende:  
I figuren kan punktet,  $P$ , findes ved at give koordinaterne  $(x_0, y_0)$  eller ved at give afstanden til origo,  $r$ , og vinklen til x-aksen,  $\varphi$ . Hvis vi bruger afstanden og vinklen kaldes det *polære koordinater*,  $(r, \varphi)$ .



#### Øvelse 8.1: Omskrivning mellem polære og kartesiske koordinater

a) Brug egenskaberne for en retvinklet trekant til at vise, at de kartesiske koordinater til  $P$  er:

$$x = r \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\varphi)$$

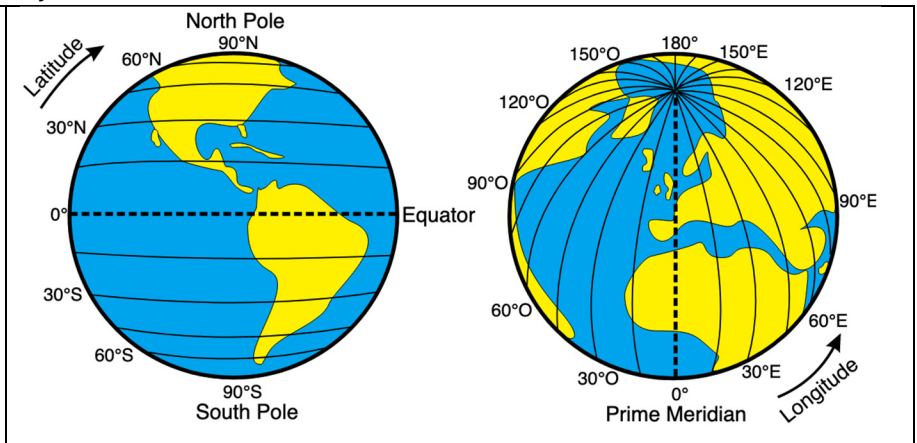
a) Brug Pythagoras sætning og en invers trigonometrisk funktion til at vise hvordan man omskriver fra kartesiske til polære koordinater.

#### 8.1.2 Sfæriske koordinater

Hvis vi gerne vil beskrive positionen på Jorden bruger vi normalt længde og breddegrader. Hvis vi får givet en længdegrad, (**Longitude** på engelsk), og en breddegrad, (**Latitude**), så ved vi præcis hvor vi er på Jorden. Her udnytter vi at Jorden tilnærmelsesvist er en kugle og vi behøver derfor ikke at angive den tredje koordinat, radius  $r$ .



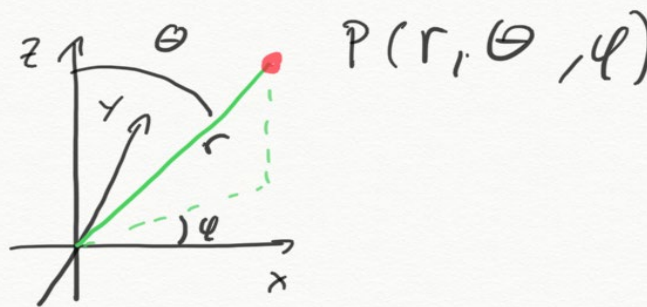
Længdegraderne er angivet i antal grader øst eller vest fra Meridianen (gennem Greenwich) og breddegraderne i antal grader nord eller syd for Ækvator, se figuren. Matematisk udnytter vi at systemet har en symmetri til at forenkle beskrivelsen. Jorden er tilnærmelsesvist kuglesymmetrisk og de sfæriske koordinater tager udgangspunkt i denne symmetri.





**Standardmåden at definere sfæriske koordinater på er:**

- 1) radius  $r$  er afstanden fra Jordens centrum.
- 2) vinkel  $\theta$  måles fra  $z$ -aksen til retningsvektoren for punktet. Bemærk, at  $\theta$  ikke er breddegraden, men  $90 -$  breddegraden på nordlige halvkugle,  $90 +$  breddegraden på sydlige halvkugle..
- 3) vinklen  $\varphi$  i  $xy$ -planen måles fra  $x$ -aksen i omløbsretningen. Bemærk vi måler hele vejen rundt og ikke som på kloden "østlig længde" og "vestlig længde"



Definitionsmængden for sfæriske koordinater er:  
 $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 180^\circ, 0 \leq \varphi \leq 360^\circ$

**Øvelse 8.2: Et punkt i Danmark**

Et punkt i Danmark ligger på  $56^\circ$  nordlig bredde og  $9,5^\circ$  østlig længde.

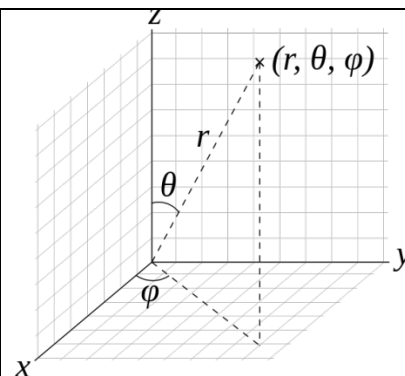
Bestem punktet  $P(r, \theta, \varphi)$  i sfæriske koordinater.

**Øvelse 8.3: Omskrivningen fra sfæriske til kartesiske koordinater**

Vi vil i denne øvelse vise omskrivningen fra sfæriske til kartesiske koordinater.

- a) Vis, at den stiplede linje, i  $xy$ -planen, som vi kalder  $l$ , og som svarer til den grønne stiplede ovenfor, kan skrives som  $l = r \cdot \sin(\theta)$
- b) Brug dette til at vise, at
 
$$x = r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi)$$
- c) Vis, at  $z$ - koordinaten, der svarer til den lodrette stiplede linje parallel med  $z$ -aksen, kan skrives som
 
$$z = r \cdot \cos(\theta)$$



**Øvelse 8.4**

Brug visualiseringen her: [sfæriske koordinater](#) til at overbevise jer om, at man kan nå alle punkter på en sfære med koordinaterne.

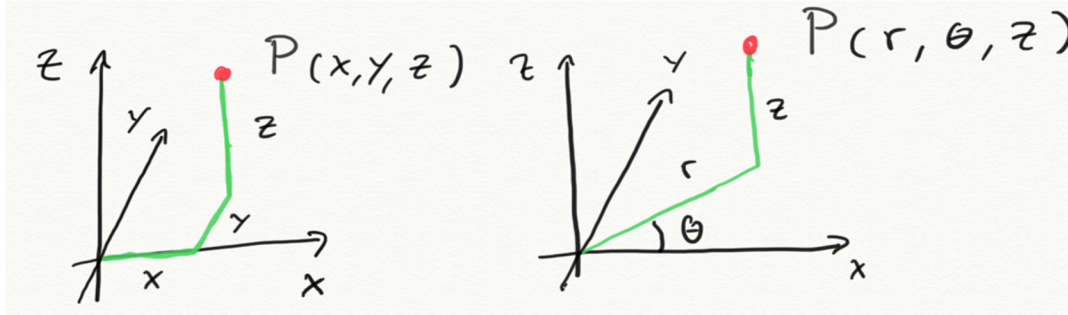
For satellitter er sfæriske koordinater også praktiske at bruge. Satellitterne bevæger sig ofte i baner med samme afstand til Jorden og deres position kan derfor beskrives med kun to variable  $\theta$  og  $\varphi$ . Hvis vi skal vide, hvornår en satellit er over Danmark, skal vi blot vide, hvornår den har samme længde og breddegrad som Danmark.

**Øvelse 8.5**

Den korteste afstand mellem to punkter på Jorden findes ved at følge en såkaldt *storcirkel* mellem punkterne. En storcirkel fremkommer, når planen bestemt af de to punkter og Jordens centrum skærer jordkuglen. Afstanden langs storcirklen kan findes ved hjælp af sfærisk trigonometri. Du kan læse mere om det, og finde opgaver om det i et projekt, du kan hente [her](#) (link til 20)

### 8.1.3 Cylinder-koordinater

Når vi skal designe paraboloider, er et andet koordinatsystem det mest oplagte valg. Paraboloiden er symmetrisk omkring z-aksen, hvilket gør cylinderkoordinater gode. Figuren viser venstre punkt  $P$  i kartesiske koordinater og til højre i cylinderkoordinater.



Vi kan altså bestemme punktet  $P$  ved enten at angive  $(x, y, z)$  koordinaterne eller ved at angive  $(r, \theta, z)$ . Her angiver  $r$  afstanden i  $xy$ -planen og  $\theta$  vinklen regnet fra  $x$ -aksen og  $z$  er højden over  $xy$ -planen. Cylinderkoordinaterne er de samme som de polære plus en  $z$ -akse.

#### Øvelse 8.6: Omskrivninger mellem cylinderkoordinater og kartesiske koordinater

Vis, at omskrivningen mellem cylinderkoordinaterne  $(r, \theta, z)$  og kartesiske koordinater er:

	$x = r \cdot \cos(\theta)$		$r^2 = x^2 + y^2$
Fra cylinder til kartesisk:	$y = r \cdot \sin(\theta)$	Fra kartesisk til cylinder:	$\theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$
	$z = z$		$z = z$

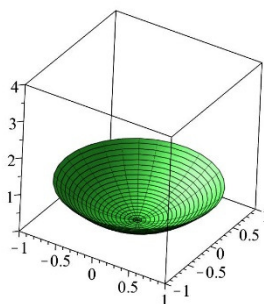
Standardparaboloiden  $f(x, y) = x^2 + y^2$  kan omskrives til  $f(r, \theta) = r^2$ . Når funktionen er givet i cylinderkoordinater, og grafen skal tegnes i et matematikprogram, skal vi først indføre de nye koordinater. I Maple er kommandoerne sådan:

```
addcoords(z_cylindrical, [z, r, theta], [r*cos(theta), r*sin(theta), z])
```

[Warning, coordinates already exists, system redefined.](#)

```
plot3d(r^2, r=0..1, coords=z_cylindrical, view=[-1..1, -1..1, 0..4], axes=boxed, grid=[100, 100])
```

Warning kommer op, fordi vi skifter koordinater fra traditionelle til cylinder



## 8.2 At deformere og slå buler med matematik

En parabolantenne er som udgangspunkt et stykke af en paraboloid, som på sin simpleste form skrives som

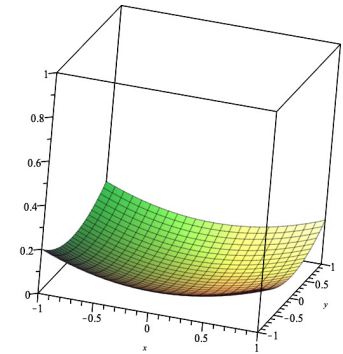
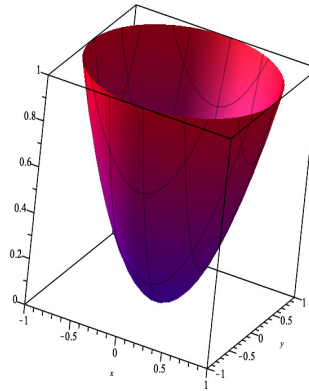
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Grafen er figuren i midten

Vi kan få den til bedre at ligne en del af en parabol ved gøre den fladere. Det gøres som ved en parabel ved at gange koefficienter på. Eksempelvis giver

$$f(x, y) = \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{10}$$

figuren til højre.



Hvis vi vil eksperimentere med at deformere paraboloiden, kan vi fx gange en lineær funktion på, og eksperimentere med koefficienterne.

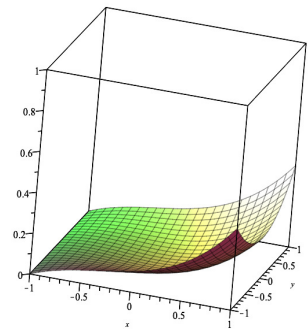
### Øvelse 8.8. Deformere paraboloiden ved hjælp af polynomier

Vi ganger en lineær funktion på den overordnede paraboloid.

a) Tegn grafen for  $f(x, y) = \left(\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{10}\right) \cdot (x+1)$ . Du skal få noget som vi ser på figuren her:

b) Undersøg effekten af den lineære del ved at indsætte en parameter,  $a$  og undersøg med brug af skydere et udtryk som:

$$f(x, y) = \left(\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{10}\right) \cdot (a \cdot x + 1)$$



I praksis er bulernes størrelse nede på micrometer skalaen.

### Øvelse 8.9. Deformere paraboloiden ved hjælp af trigonometriske funktioner

De trigonometriske funktioner er gode til at give buler.

a) Tegn grafen for følgende funktion:

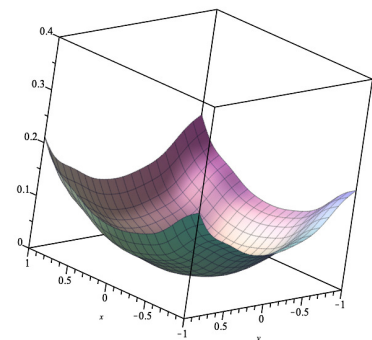
$$f(x, y) = \frac{x^2}{10} \cdot (1 - 0,1 \cdot \sin(10 \cdot x)) + \frac{y^2}{10} (1 - 0,1 \cdot \sin(10 \cdot y))$$

Du skal få et grafisk billede som du ser her.

Her kan vi bruge vores viden om amplitude og periode for trigonometriske funktioner til at forme vores overflade.

b) Undersøg med brug af skydere et udtryk som:

$$f(x, y) = \frac{x^2}{10} \cdot (1 - a \cdot \sin(b \cdot x)) + \frac{y^2}{10} (1 - a \cdot \sin(b \cdot y))$$



### 8.3 Zernikepolynomier

Øvelserne giver et indtryk af, at vi kan opnå meget mht. "at slå buler" ved denne kombination af polynomier og trigonometriske funktioner. I praksis lader man paraboloverfladen være stort set den vi kender, og udformer så et landskab ved hjælp af smarte funktioner, som vi derefter lægger på paraboloverfladen. Og her lader vi os inspirere af det man har vidst om Fourierrækker i 200 år. Vi tænker på funktioner som vektorer, og ønsker at opbygge et ortogonalt sæt af "enhedsvektorer", der ikke kun består af de trigonometriske funktioner, men kombinerer disse med polynomier. Dette er Zernike-polynomierne, som blev udviklet af den hollandske nobelpristager Fritz Zernike (1888-1966) i en periode fra 1930'erne til omkring 1960, hvorfra de kom til at spille en stor rolle i optik, i meteorologi og i fx udformningen af parabolantener.

Zernikepolynomier  $Z_n^m(\rho, \theta)$  beskrives som udgangspunkt i cylinderkoordinater. Det angives med to indices,  $n$  og  $m$  der er hele tal, og hvor  $n \geq m \geq 0$ . De to variable,  $\rho$  og  $\theta$  er cylinderkoordinater, hvor  $\rho$  ("rho") er *radialdelen*, dvs. afstanden til origo (svarende til *modulus* for komplekse tal) og  $\theta$  ("theta") er vinklen med 1. akse i det bagvedliggende kartesiske koordinatsystem (svarende til *argumentet* for komplekse tal). Selv om der ikke i definitionerne ligger begrænsninger på radialdelens størrelse, så gælder i alle praktiske anvendelser af Zernikepolynomier, at  $\rho \leq 1$ , dvs. vi befinder os i enhedscirklen.

$Z_n^m(\rho, \theta)$  har formen:  $Z_n^m(\rho, \theta) = a_n^m \cdot R_n^m(\rho) \cdot \cos(m \cdot (\theta - \theta_n^m))$ , hvor:

- $a_n^m$  er en koefficient, der repræsenterer amplituden af svingningen,
  - $\theta_n^m$  er en fastlagt reference-retning i rummet,
  - $R_n^m(\rho)$  er et polynomium i  $\rho$  af grad  $n$ , og som ikke indeholder potenser af lavere grad end  $m$
- (Bemærk: Man arbejder også med udtryk, hvor  $\cos$  er erstattet af  $\sin$ , og som betegnes:  $Z_n^m(\rho, \theta)$ )

#### Eksempel på et Zernikepolynomium

Formlen, der genererer polynomierne  $R_n^m(\rho)$  er ganske kompliceret, og den vil vi ikke komme ind på her.

Men vi oplister en række af polynomierne nedenfor, hvor vi fx kan se, at  $R_4^2(\rho) = 4 \cdot \rho^4 - 3\rho^2$ .

Derved bliver  $Z_4^2(\rho, \theta) = a_4^2 \cdot R_4^2(\rho) \cdot \cos(m \cdot (\theta - \theta_n^m)) = a_4^2 \cdot (4 \cdot \rho^4 - 3\rho^2) \cdot \cos(2 \cdot (\theta - \theta_n^m))$ .

Amplituden kan vi så skrue på.

Zernikepolynomierne er konstrueret således, at hvis *forskellen*  $n - m$  er *ulige*, så er  $R_n^m(\rho) = 0$ , og dermed også  $Z_n^m(\rho, \theta) = 0$ . Derfor vil man i lister over disse polynomier ikke finde noget der hedder

$R_3^2(\rho)$ ,  $R_7^4(\rho)$ ,  $Z_2^1(\rho)$  osv.

Alle de øvrige Zernikepolynomier  $Z_n^m(\rho, \theta)$  med definitionsmængde i enhedscirklen, og hvor  $n - m$  er et lige tal, er indbyrdes *ortogonale*, når vi opfatter dem som vektorer. Dvs. deres *skalarprodukt* er 0. Når vi har to variable, så er skalarproduktet et "dobbelt-integral", dvs. vi integrerer først efter den ene variable, så efter den anden:

$$\iint_D Z_n^m(\rho, \theta) \cdot Z_{n'}^{m'}(\rho, \theta) d\rho d\theta = 0, \text{ når } Z_n^m(\rho, \theta) \neq Z_{n'}^{m'}(\rho, \theta), \text{ hvor } D \text{ er enhedscirklen}$$

#### Eksempel på Radial-polynomier $R_n^m(\rho)$

$m \setminus n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1		$2\rho^2 - 1$		$6\rho^4 - 6\rho^2 + 1$		$20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1$		$70\rho^8 - 140\rho^6 + 90\rho^4 - 20\rho^2 + 1$
1		$\rho$		$3\rho^3 - 2\rho$		$10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho$		$35\rho^7 - 60\rho^5 + 30\rho^3 - 4\rho$	
2			$\rho^2$		$4\rho^4 - 3\rho^2$		$15\rho^6 - 20\rho^4 + 6\rho^2$		$56\rho^8 - 105\rho^6 + 60\rho^4 - 10\rho^2$
3				$\rho^3$		$5\rho^5 - 4\rho^3$		$21\rho^7 - 30\rho^5 + 10\rho^3$	
4					$\rho^4$		$6\rho^6 - 5\rho^4$		$28\rho^8 - 42\rho^6 + 15\rho^4$
5						$\rho^5$		$7\rho^7 - 6\rho^5$	
6							$\rho^6$		$8\rho^8 - 7\rho^6$
7								$\rho^7$	
8									$\rho^8$

**Den store fordel ved cylinderkoordinater** er, at det giver et klart billede af, hvad der grafisk er i spil for det enkelte Zernikepolynomium. Et lodret snit, hvor vinklen  $\theta$  ligger fast, vil give en konstant, nemlig  $\cos(m \cdot (\theta - \theta_n^m))$  ganget på *det samme radiale polynomium*, fx  $3\rho^3 - 2\rho$  for  $Z_3^1(\rho, \theta)$  (se tabellen). Og vi har en god fornemmelse for det grafiske forløb af tredjegrads- og andre polynomier. Det ser vi på i nogle øvelser nedenfor.

**Men der er også noget vi taber, og som kartesiske koordinater giver os.** Vi viser nedenfor, at

$$Z_3^1(\rho, \theta) \text{ faktisk kan skrives som et polynomium i } x \text{ og } y: \quad Z_3^1(\rho, \theta) = 3x^3 + 3y^2x - 2x$$

Her vil de færreste kunne overskue grafen (selv om vi for  $y=0$  ser det samme polynomium). Men derimod kan vi her forholdsvis let få *tangentflader* frem. Og med tangentfladen i et punkt får vi en *normal* til fladen. Når et signal rammer fladen i det punkt, vil den reflekteres i en retning bestemt af normalen. Det ser vi også på nedenfor.

Når man ser lister over Zernikepolynomier, så vil man normalt se begge former angivet.

### Eksempel og Øvelse 8.10: Omskrivning af Zernikepolynomier til kartesiske polynomier

Udtrykket for  $Z_n^m(\rho, \theta)$  indeholder  $R_n^m(\rho)$  der er et polynomium i  $\rho$ . Men Zernikepolynomiet er også selv et polynomium - i  $x$  og  $y$ . Det kan vi se ved en omskrivning. Lad os se bort fra  $a_n^m$  og se på  $Z_2^0(\rho, \theta)$ :

$$\begin{aligned} Z_2^0(\rho, \theta) &= R_2^0(\rho) \cdot \cos(0 \cdot \theta) \\ &= R_2^0(\rho) \cdot 1 \\ &= 2\rho^2 - 1 \\ &= 2(x^2 + y^2) - 1 \\ &= 2x^2 + 2y^2 - 1 \end{aligned}$$

Udnyt at for polære koordinater gælder:  $\rho^2 = x^2 + y^2$

a) Vis selv efter samme mønster:

$$Z_4^0(\rho, \theta) = 6x^4 + 6y^4 + 12x^2y^2 - 6x^2 - 6y^2 + 1$$

b) Vis, at:  $Z_3^1(\rho, \theta) = 3x^3 + 3y^2x - 2x$

(Hint: Sæt  $\rho$  uden for parentes, og udnyt:  $\rho \cdot \cos(\theta) = x$ )

c) Vis, at  $Z_2^2(\rho, \theta) = x^2 - y^2$

(Hint: Udnyt additionsformlerne:  $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ , samt "Pythagoras":  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ )

**Øvelse 8.11: Radialpolynomierne**

a) Plot radialpolynomierne  $R_1^1(\rho)$ ,  $R_2^0(\rho)$ , og  $R_3^1(\rho)$  i samme koordinatsystem, hvor  $\rho$  løber fra 0 til 1. (Begrund dette!).

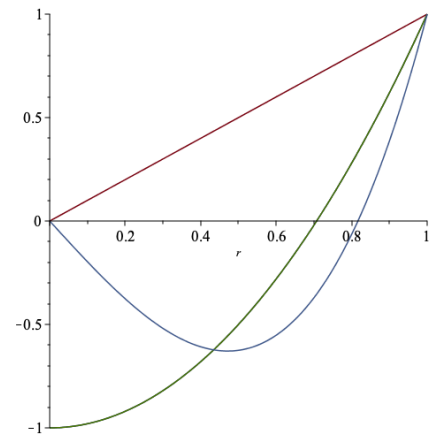
Du kan hente polynomierne i tabellen.

b) Undersøg nu en sum af disse:

$$a \cdot R_1^1(\rho) + b \cdot R_2^0(\rho) + c \cdot R_3^1(\rho)$$

ved hjælp af dit værktøjsprogram, hvor parametrene kan skydes mellem -1 og 1.

c) Plot radialpolynomierne  $R_1^1(\rho)$ ,  $R_3^1(\rho)$ ,  $R_5^1(\rho)$  og  $R_7^1(\rho)$  i samme koordinatsystem, hvor  $\rho$  løber fra 0 til 1. Du kan hente polynomierne i tabellen.



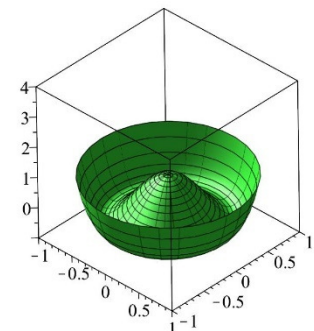
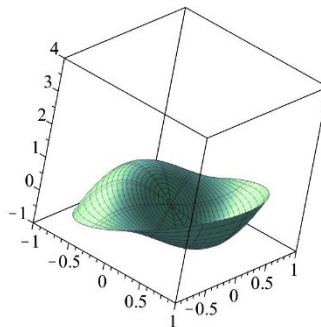
**Øvelse 8.12: Grafiske billeder af Zernikepolynomier**

a) Udfør et plot i cylinderkoordinater af  $Z_3^1(\rho, \theta)$

b) Udfør et plot i cylinderkoordinater af  $Z_4^0(\rho, \theta)$

Du skal få billeder som du ser her:

c) Vælg selv andre Zernikepolynomier, du plotter.



**Øvelse 8.13: Tangentplaner og normaler til Zernikepolynomier**

Vælg et af de Zernikepolynomier, du har plottet ovenfor i øvelse 8.12, og hvor du har en fremstilling i xy-koordinater, fx  $Z_3^1(\rho, \theta) = 3x^3 + 3y^2x - 2x$ . Eller vælg selv fra tabellen over polynomier i bilaget.

a) Plot grafen i kartesiske koordinater.

b) Vælg et punkt på grafen og afsæt det (synligt!).

c) Bestem ligningen for tangentplanen i punktet.

d) Angiv normalvektoren til planen, og anvend denne til at opskrive parameterfremstillingen for en normal til fladen i punktet.

e) Tegn normalen sammen med fladen.

f) Indfør en parameter, der ganges på formeludtrykket, fx:  $z = p \cdot (3x^3 + 3y^2x - 2x)$ , gennemfør c) og d) som ovenfor, og gennemfør punkt e), nu med en explore, hvor  $p$  varierer.

g) Forklar hvad der sker, og hvordan et signal der rammer i punktet vil blive reflekteret.

På Wikipedia og websites om Zernikepolynomier finder man dem ofte oplistet i trekanter med konturplot-agtige skitser. Se fx her: [https://en.wikipedia.org/wiki/Zernike\\_polynomials](https://en.wikipedia.org/wiki/Zernike_polynomials).

Man skal nok være vant til at arbejde med dem, for at det bliver et redskab til at lade efter, hvad man skal bruge. Men ideen bag de stiliserede er måske bedre illustreret her, i et klip fra en artikel af Vasudevan Lakshminarayanan og Andre Fleck i *Journal of Optics*:



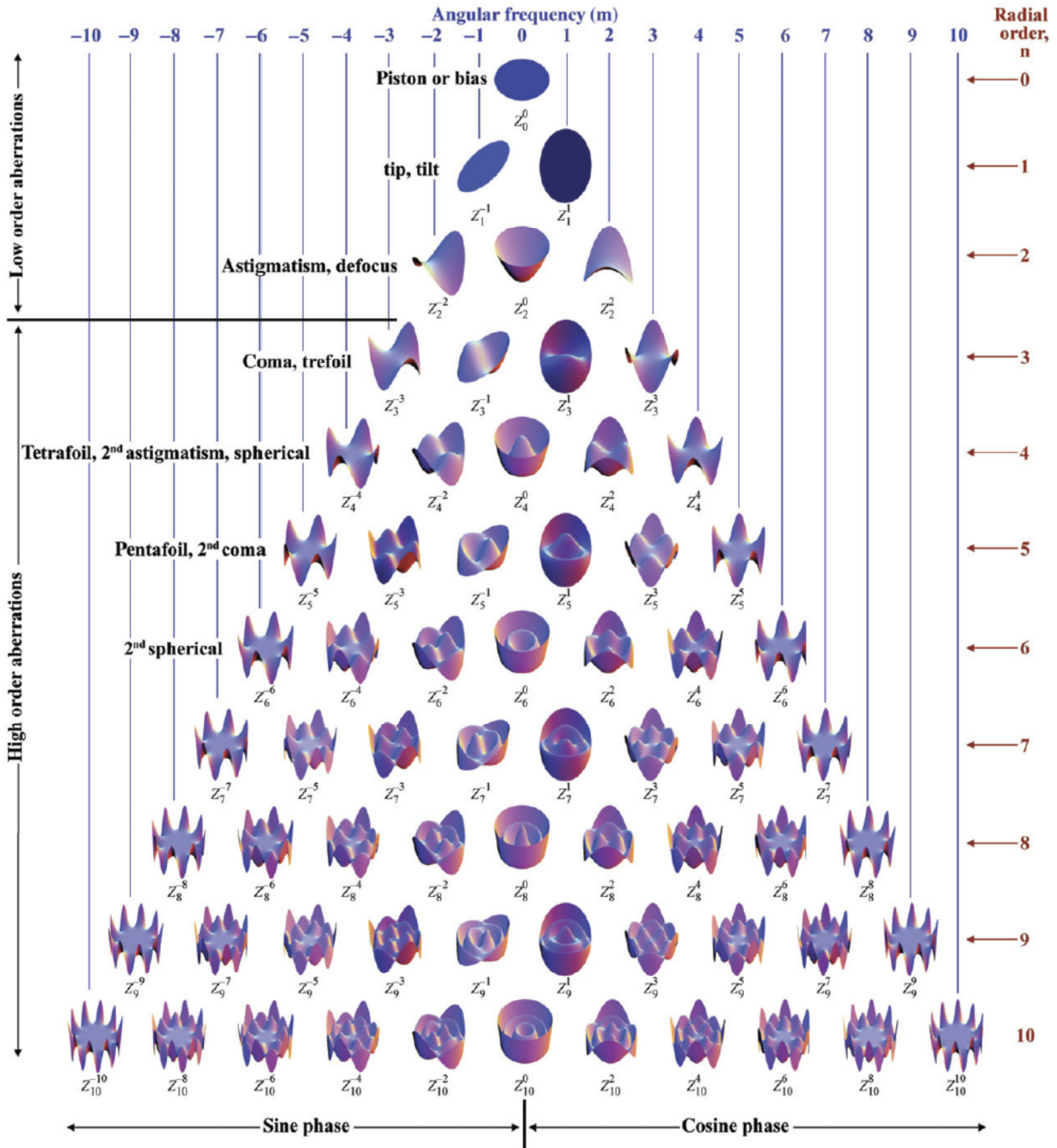


Figure 4. Surface plots of the Zernike polynomial sequence up to 10 orders. The name of the classical aberration associated with some of them is also provided. (The color version of this figure is included in the online version of the journal.)

Ticra har et stort katalog af funktioner, som de trækker på, når de skal bestemme overflader på en given parabol. Som Oscar Borries antyder, så er de store funktionsudtryk summer af mere "simple" funktioner – selv om disse ikke er simple i vores opfattelse. Men det betyder, at de kan håndtere de enkelte udtryk "lokalt" på paraboloverfladen – ændringer på parametre for det ene udtryk, får ikke nødvendigvis konsekvenser ud over hele fladen. Parametrene fastlægges fx med brug af differentialregning, der giver mulighed for at styre krumningen af de "buler" der skal defineres.

Ortogonaliteten, som vi omtalte ovenfor, har samme konsekvens som i teorien for fourierrækker, nemlig at enhver nogenlunde pæn funktion kan skrives som *en vægtet sum af Zernikepolynomier*. Og datapunkter kan tilnærmes med en sådan sum, så den overflade, TICRA lægger på deres parabler, er graf for en funktion af typen:

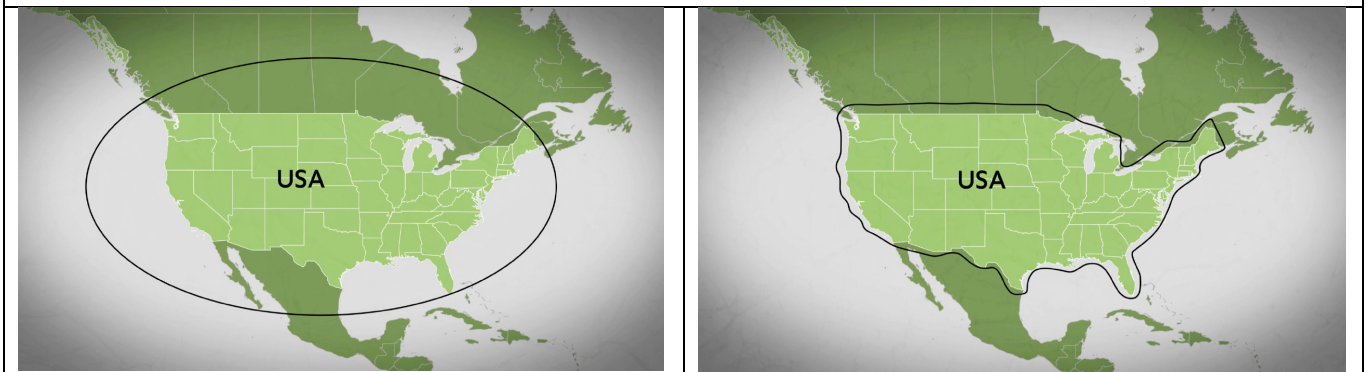
$$s(x, y) = \sum_{n,m} a_n^m \cdot Z_n^m(\rho, \theta), \text{ hvor der i princippet er uendelig mange led, men i praksis selvfølgelig ikke.}$$

Vi så i øvelsen ovenfor, at der er en veldefineret sammenhæng mellem de traditionelle kartesiske koordinater og cylinderkoordinaterne, så vi tillader os at have begge typer i sil i samme formel.

### Øvelse 8.14: Kombination af Zernikepolynomier

Vælg selv fra tabellen med *Eksempler på Radial-polynomier*  $R_n^m(\rho)$  tre af disse og plot graferne i cylinderkoordinater. Kombiner dem ved at indføre parametre  $a$ ,  $b$  og  $c$  som koefficienterne  $a_n^m$ . Gennemfør nu en undersøgelse af hvilke grafiske udtryk vi kan få frem blot med tre.

Kombinationen af Zernike polynomier foregår selvfølgelig ikke ved at TICRA prøver sig frem. Hvis de vil få polynomierne til at passe bedst muligt til en række datapunkter, svarer det til at minimere kvadratafstanden mellem datapunkterne og polynomieværdierne. En glat parabol, der er "defokuseret" en smule, dvs signalerne udsendes ikke helt parallelt med symmetriaksen, men spredes en smule, dens samlede signal vil dække et elliptisk formet område, som angivet til venstre. I filmen illustreres hvordan de mange led, der udgør den samlede store funktion, vil resultere i et signal der følger grænserne relativt tæt.



### Projekt: Ortogonalitet af Zernikepolynomier



Gennemfør en udredning af og et bevis for påstanden, at Zernikepolynomier  $Z_n^m(\rho, \theta)$  med definitionsmængde i enhedscirklen, og hvor  $n - m$  er et lige tal, er indbyrdes *ortogonale*, når vi opfatter dem som vektorer. Dvs deres *skalarprodukt* er 0.

Du kan lade dig inspirere af den tilsvarende udledning af orthogonaliteten i teorien for Fourierrækker.



## Bilag: Zernikepolynomier i cylinderkoordinater og i kartesiske koordinater

Table 1. Algebraic expansion of the Zernike polynomial sequence, orders one through seven [2].

$n$	$m$	$Z_n^m$	RMS	Polar form ( $dx^2 \rightarrow rd\theta dr$ )	Cartesian form ( $dx^2 \rightarrow dxdy$ )
	0	$Z_0^0$	$\sqrt{2}$	1	1
	-1	$Z_1^{-1}$	2	$r\sin\theta$	$x$
	1	$Z_1^1$	2	$r\cos\theta$	$y$
	-2	$Z_2^{-2}$	$\sqrt{6}$	$r^2\sin 2\theta$	$2xy$
	0	$Z_2^0$	$\sqrt{3}$	$2r^2 - 1$	$-1 + 2x^2 + 2y^2$
	2	$Z_2^2$	$\sqrt{6}$	$r^2\cos 2\theta$	$-x^2 + y^2$
	-3	$Z_3^{-3}$	$2\sqrt{2}$	$r^3\sin 3\theta$	$-x^3 + 3xy^2$
	-1	$Z_3^{-1}$	$2\sqrt{2}$	$(3r^3 - 2r)\sin\theta$	$-2x + 3x^3 + 3xy^2$
	1	$Z_3^1$	$2\sqrt{2}$	$(3r^3 - 2r)\cos\theta$	$-2y + 3y^3 + 3x^2y$
	3	$Z_3^3$	$2\sqrt{2}$	$r^3\cos 3\theta$	$y^3 - 3x^2y$
	-4	$Z_4^{-4}$	$\sqrt{10}$	$r^4\sin 4\theta$	$-4x^3y + 4xy^3$
	-2	$Z_4^{-2}$	$\sqrt{10}$	$(4r^4 - 3r^2)\sin 2\theta$	$-6xy + 8x^3y + 8xy^3$
	0	$Z_4^0$	$\sqrt{5}$	$6r^4 - 6r^2 + 1$	$1 - 6x^2 - 6y^2 + 6x^4 + 12x^2y^2 + 6y^4$
	2	$Z_4^2$	$\sqrt{10}$	$(4r^4 - 3r^2)\cos 2\theta$	$3x^2 - 3y^2 - 4x^4 + 4y^4$
	4	$Z_4^4$	$\sqrt{10}$	$r^4\cos 4\theta$	$x^4 - 6x^2y^2 + y^4$
	-5	$Z_5^{-5}$	$2\sqrt{3}$	$r^5\sin 5\theta$	$x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$
	-3	$Z_5^{-3}$	$2\sqrt{3}$	$(5r^5 - 4r^3)\sin 3\theta$	$4x^3 - 12xy^2 - 5x^5 + 10x^3y^2 + 15xy^4$
	-1	$Z_5^{-1}$	$2\sqrt{3}$	$(10r^5 - 12r^3 + 3r)\sin\theta$	$3x - 12x^3 - 12xy^2 + 10x^5 + 20x^3y^2 + 10xy^4$
	1	$Z_5^1$	$2\sqrt{3}$	$(10r^5 - 12r^3 + 3r)\cos\theta$	$3y - 12y^3 - 12x^2y + 10y^5 + 20x^2y^3 + 10x^4y$
	3	$Z_5^3$	$2\sqrt{3}$	$(5r^5 - 4r^3)\cos 3\theta$	$-4y^3 + 12x^2y + 5y^5 - 10x^2y^3 - 15x^4y$
	5	$Z_5^5$	$2\sqrt{3}$	$r^5\cos 5\theta$	$y^5 - 10x^2y^3 + 5x^4y$
	-6	$Z_6^{-6}$	$\sqrt{14}$	$r^6\sin 6\theta$	$6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5$
	-4	$Z_6^{-4}$	$\sqrt{14}$	$(6r^6 - 5r^4)\sin 4\theta$	$20x^3y - 20xy^3 - 24x^5y + 24xy^5$
	-2	$Z_6^{-2}$	$\sqrt{14}$	$(15r^6 - 20r^4 + 6r^2)\sin 2\theta$	$12xy - 40x^3y - 40xy^3 + 30x^5y + 60x^3y^3 - 30xy^5$
	0	$Z_6^0$	$\sqrt{7}$	$20r^6 - 30r^4 + 12r^2 - 1$	$-1 + 12x^2 + 12y^2 - 30x^4 - 60x^2y^2 - 30y^4 + 20x^6 + 60x^4y^2 + 60x^2y^4 + 20y^6$
	2	$Z_6^2$	$\sqrt{14}$	$(15r^6 - 20r^4 + 6r^2)\cos 2\theta$	$-6x^2 + 6y^2 + 20x^4 - 20y^4 - 15x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 + 15y^6$
	4	$Z_6^4$	$\sqrt{14}$	$(6r^6 - 5r^4)\cos 4\theta$	$-5x^4 + 30x^2y^2 - 5y^4 + 6x^6 - 30x^4y^2 - 30x^2y^4 + 6y^6$
	6	$Z_6^6$	$\sqrt{14}$	$r^6\cos 6\theta$	$-x^6 + 15x^4y^2 - 15x^2y^4 + y^6$
	-7	$Z_7^{-7}$	4	$r^7\sin 7\theta$	$-x^7 + 21x^5y^2 - 35x^3y^4 + 7xy^6$
	-5	$Z_7^{-5}$	4	$(7r^7 - 6r^5)\sin 5\theta$	$-6x^5 + 60x^3y^2 - 30xy^4 + 7x^7 - 63x^5y^2 - 35x^3y^4 + 35xy^6$
	-3	$Z_7^{-3}$	4	$(2r^7 - 30r^5 + 10r^3)\sin 3\theta$	$-10x^3 + 30xy^2 + 30x^5 - 60x^3y^2 - 90xy^4 - 21x^7 + 21x^5y^2 + 105x^3y^4 + 63xy^6$
	-1	$Z_7^{-1}$	4	$(35r^7 - 60r^5 + 30r^3 - 4r)\sin\theta$	$-4x + 30x^3 + 30xy^2 - 60x^5 - 120x^3y^2 - 60xy^4 + 35x^7 + 105x^5y^2 + 105x^3y^4 + 35xy^6$
	1	$Z_7^1$	4	$(35r^7 - 60r^5 + 30r^3 - 4r)\cos\theta$	$-4y + 30y^3 + 30x^2y - 60y^5 - 120x^2y^3 - 60x^4y + 35y^7 + 105x^2y^5 + 105x^4y^3 + 35x^6y$
	3	$Z_7^3$	4	$(2r^7 - 30r^5 + 10r^3)\cos 3\theta$	$10y^3 - 30x^2y - 30y^5 + 60x^2y^3 + 90x^4y + 21y^7 - 21x^2y^5 - 105x^4y^3 + 63x^6y$
	5	$Z_7^5$	4	$(7r^7 - 6r^5)\cos 5\theta$	$-6y^5 + 60x^2y^3 - 30x^4y + 7y^7 - 63x^2y^5 - 35x^4y^3 + 35x^6y$
	7	$Z_7^7$	4	$r^7\cos 7\theta$	$y^7 - 21x^2y^5 + 35x^4y^3 - 7x^6y$

# 9. Satellitter



Filmen starter med et besøg på DMI, hvor Anja Fonseca forklarer hvordan DMI henter data ned fra kommunikations-satellitter, der bevæger sig i den geostationære bane. Vi får at vide, at disse befinder sig i baner over Ækvator, i en afstand på 36000 km. Det er på nogle af disse, at TICRA's paraboler er placeret. På TICRA fortæller Michael bl.a. hvorfor de lige befinder sig der. Det har at gøre med den fysiske lov, der kaldes Keplers 3. lov.

Med  
matematik  
på  
arbejde

## 9. Satellitter

En satellit er et objekt i kredsløb omkring en planet. Jordens største satellit er Månen efterfulgt af den internationale rumstation ISS. Videnskabelige satellitter som Hubble teleskopet peger ud i rummet og tager fantastiske billeder af fjerne galakser, men langt de fleste peger deres udstyr ned mod Jorden. Evnen til at måle på Jorden udefra er helt afgørende for klimamodeller og forståelsen af den globale dynamik som klimaforandringerne skubber til. Vi måler også Jordens magnetfelt med den danske Ørsted satellit og mange andre videnskabelige undersøgelser er helt afhængige af information fra satellitter. Satellitter kan også bruges til at hente store mængder data, som DMI blandt andre gør. Dette gøres med de geostationære satellitter, som også er dem der leverer Tv-signaler. Vi vil i dette afsnit arbejde med matematikken bag satellitters bevægelse rundt om Jorden.

### 9.1 Keplers 3. Lov og potensfunktioner

Hvis vi skal placere en satellit i kredsløb om Jorden er det vigtigt at vide hvor langt over Jorden dens bane skal være. Kepler udviklede sine tre love om planetbevægelser mellem 1609 og 1619, love som også gælder for satellitters bevægelse. Vi skal bruge Keplers 3. lov som forbinder hvor langt en satellit er fra planeten og hvor lang tid det tager for en at nå en hel omgang.

<p>Keplers 3. lov: <math>\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4 \cdot \pi^2}</math>, hvor</p> <p><math>r</math> er afstanden fra centrum af Jorden til satellitten,  <math>T</math> er perioden,  <math>G</math> er gravitationskonstanten og  <math>M</math> er Jordens masse.</p> <p>Keplers 3. lov kan udledes fra Newtons love, hvilket bliver gjort nedenfor.</p> <p>Fysiske størrelser:</p> $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$ $M_{\text{Jorden}} = 5,972 \cdot 10^{24} \text{kg}$ $r_{\text{Jorden}} = 6,371 \cdot 10^6 \text{m}$	
--	--

En anden måde at beskrive Keplers 3. lov er at forholdet mellem afstanden i tredje og perioden i anden er *konstant*.

#### Øvelse 9.1:

Vi vil vise, at der er en potenssammenhæng mellem perioden  $T$ , og afstanden  $r$ .

En potensfunktion skrives normalt som

$$f(x) = b \cdot x^a, \quad b > 0$$

a) Isoler  $T$  i Keplers 3. lov. Du skal få: 
$$T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2}{M \cdot G}} \cdot r^{\frac{3}{2}}$$

Sammenlign med standardmåden at skrive en potensfunktion og identificer,  $a$ ,  $b$  og  $x$ .

Hvis vi sætter  $b=1$ , kan vi undersøge funktionen ved at tegne den i et koordinatsystem.

b) Plot funktionen  $T$  som funktion af  $r$ , og beskriv hvordan perioden afhænger af afstanden.

c) Aflæs *perioden*  $T$  for  $r$ -værdierne 1, 2, 5 og 10.

d) Ved brug af grafen kan man også finde *radius*  $r$ , hvis man kender perioden. Undersøg hvad radius skal være, hvis perioden  $T$  har følgende værdier: 10, 50, 100.

Det er selvfølgelig ikke realistisk at  $b=1$

e) Beregn  $b$  og udfyld tabellen (*Bemærk enhederne, der som udgangspunkt er meter, sekund og kilogram*)

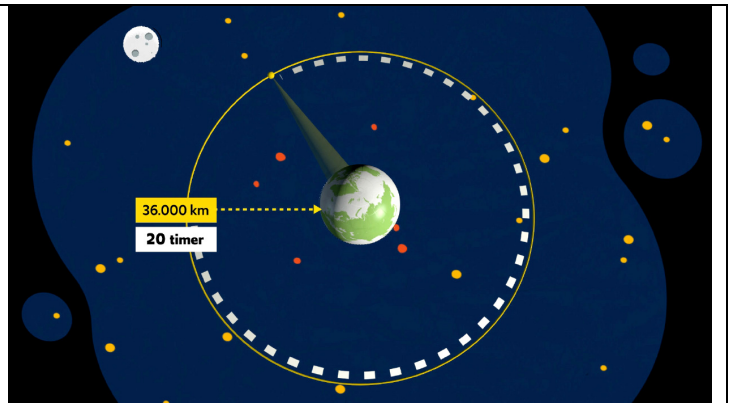
	ISS	Geostationær	Månen
Afstand, $r$ , [m]	$6,78 \cdot 10^6$	$4,24 \cdot 10^7$	$3,84 \cdot 10^8$
Periode, $T$ , [s]			
Periode, $T$ , [timer] eller [dage]			

Alle afstandene er til Jordens centrum.

f) Overvej hvor mange solopgange astronauterne på ISS oplever på 24 timer.

g) Overvej hvorfor satellitterne i afstanden på ca. 42.000 km kaldes geostationære.

h) De geostationære satellitter flyver i en bane over Ækvator. I filmen argumenterer både Anja og Michael for, at det skyldes, at parabolen på Jorden i så fald kan stå med en fast position. Prøv med en tegning eller på anden vis at begrunde, at det ikke ville være smart at flyve i en bane, der har en vinkel større end 0 grader med Ækvator-planet. Du kan evt starte med at se på satellitter der flyver i polarbaner, dvs rundt om Nordpolen og Sydpolen.



i) Hvorfor hedder det en måned?

**Øvelse 9.2: Hvor hurtigt flyver en satellit?**

Når vi kender flyvehøjden og perioden kan vi finde ud af hvor hurtigt satellitterne bevæger sig. Farten kan beregnes som afstanden tilbagelagt divideret med tiden. For en cirkelbevægelse er det:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$$

a) Beregn farten, idet du bruger tallene udregnet ovenfor:

	ISS	Geostationær	Månen
Fart			

b) Prøv at formulere en generel regel for sammenhængen mellem afstand og fart.

c) Indsæt udtrykket for  $T$  fra øvelse 9.1, og find en formel for sammenhængen mellem hastighed og afstand fra Jorden.

### 9.1.1 Horisonten

Jorden krummer som bekendt og horisonten er der hvor vores blik tangerer denne krumning.

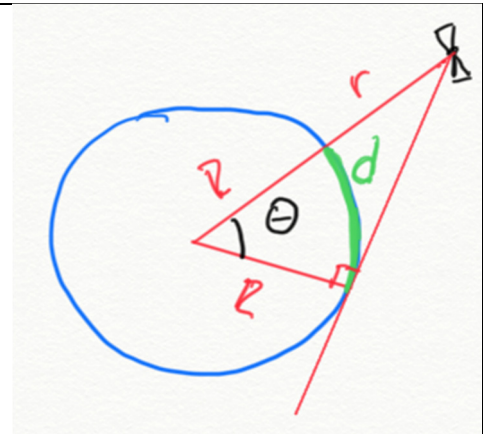
En satellit har også en horisont, da de ikke er uendelig langt væk. De geostationære satellitter der flyver over Ækvator, kan derfor ikke "se" Nord- og Sydpolen.

Figuren viser Jorden og en satellit. På figuren er:

$R$  Jordens radius

$r$  satellittens højde over jordoverfladen.

Det grønne afstanden til horisonten.



### Øvelse 9.3: Bestem satellittens horisont

På figuren er tegnet en retvinklet trekant hvor vinklen  $\theta$  kan bestemmes ved hjælp af trigonometri.

a) Bestem et udtryk for vinklen  $\theta$ .

b) Beregn værdien af vinklen målt i grader for en geostationær satellit.

c) Argumenter for, at afstanden til horisonten, den grønne del, kan bestemmes som

$$d = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{360^\circ} \cdot \theta, \text{ hvis vi regner i grader.}$$

d) Bestem afstanden til horisonten når du kigger ud over vandet. Du kan antage at dine øjne er 2 meter over havet.

Arealet af den del af Jorden som en satellit "kan se" kan beregnes som arealet af en "kuglekalot":

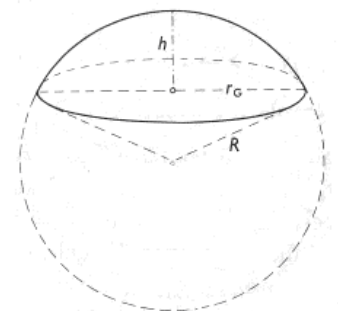
En kuglekalot er en del af en kugle, som angivet på figuren. Der findes naturligvis formler både for rumfang og for overfladeareal for kalotter:

Overfladearealet af en kuglekalot er:

$$O = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h,$$

hvor  $h$  som vist på figuren er højden over det vandrette snit

e) Benyt dit resultat fra b) til at beregne  $h$  for en geostationær satellit.



f) Gør det samme for ISS og for Månen. og udnyt endelig formlen for en kuglekalots areal til at udfylde skeamet nedenfor:

	ISS	geostationær	Månen
d [m]			
h [m]			
A [km <sup>2</sup> ]			

g) Spørgsmålet om en geostationær satellit vil kunne dække bestemte lande eller kontinenter afhænger naturligvis af tallet  $d$ , der angiver hvor mange grader satellitten kan se over og under Ækvator. Vil en geostationær satellit kunne se hele Europa? Vil den kunne dække hele Afrika? (For at besvare dette må du have fast i et atlas!)

## 9.2 Udledning af Keplers 3. lov

Ifølge Keplers 1. lov bevæger satellitter sig i ellipser, men vi vil se på den simplificering hvor banen i stedet er en cirkel. Vi skal bruge Newtons gravitationslov og centripetalkraften i en jævn cirkelbevægelse.

En jævn cirkelbevægelse betyder at objektets fart er konstant.

Newtons tyngdelov giver kraften mellem to objekter med masserne  $m$  og  $M$  og deres afstand  $r$ . Her vil lille  $m$  betegne satellittens masse, mens  $M$  betegner Jordens masse.

Tyngdeloven er givet ved:

$$F_{\text{tyngde}} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

Vi kan se at kraften aftager med afstanden i anden.

Centripetalkraft er givet ved

$$F_{\text{centripetalkraft}} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Da det er tyngdekraften som giver cirkelbevægelsen må den være lig med centripetalkraften

### Øvelse 9.4: Udledning af Keplers 3. lov

Farten i en cirkelbevægelse kan bestemmes ud fra perioden,  $T$ , og radius i cirkelbevægelsen,  $r$

- Vis at farten kan skrives som,  $v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$ .
- Brug at  $F_{\text{tyngde}} = F_{\text{centripetalkraft}}$  og udtrykket for farten til nu at udlede Keplers 3. lov!





Projektet **Træk virksomhederne ind i undervisningen** fortæller, hvordan matematik er uundværlig for avancerede virksomheder i et moderne samfund. I filmene besøger de YouTuber Casper fra "Spørg Casper" og science-influencer Maria fra "WTF er det" 12 forskellige virksomheder og lærer noget om den matematik, de anvender.

Casper og Maria møder ansatte, der er med helt i front af det matematiske arbejde: statistikere, ingeniører, matematik-økonomer eller epidemiologer m.fl. Alle har uddannelser med et betydelig matematisk indhold.

Til hver film kan du downloade undervisningsmaterialer. Her finder du øvelser, opgaveforløb, projekter og oplæg til studieretningsprojekter. Materialerne er opdelt i tre niveauer af sværhedsgrad fra 9 kl til 3 g. Emnerne er inspireret af filmen om virksomheden og den anvendte matematik, men man kan arbejde med materialet uden at have filmen kørende.

Hæftet om **Matematikken bag parabler og avancerede parabler** knytter sig til filmen **Avanceret Parabolteknologi** hos TICRA.

