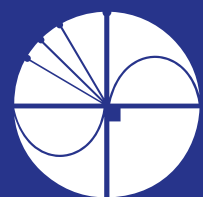
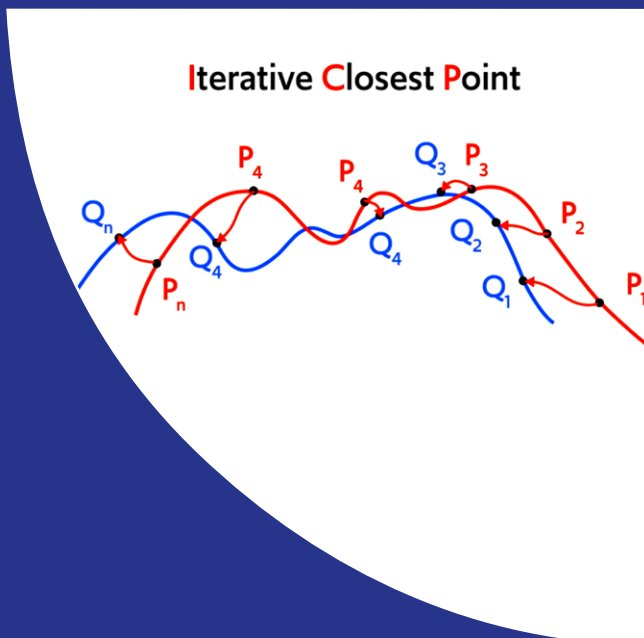
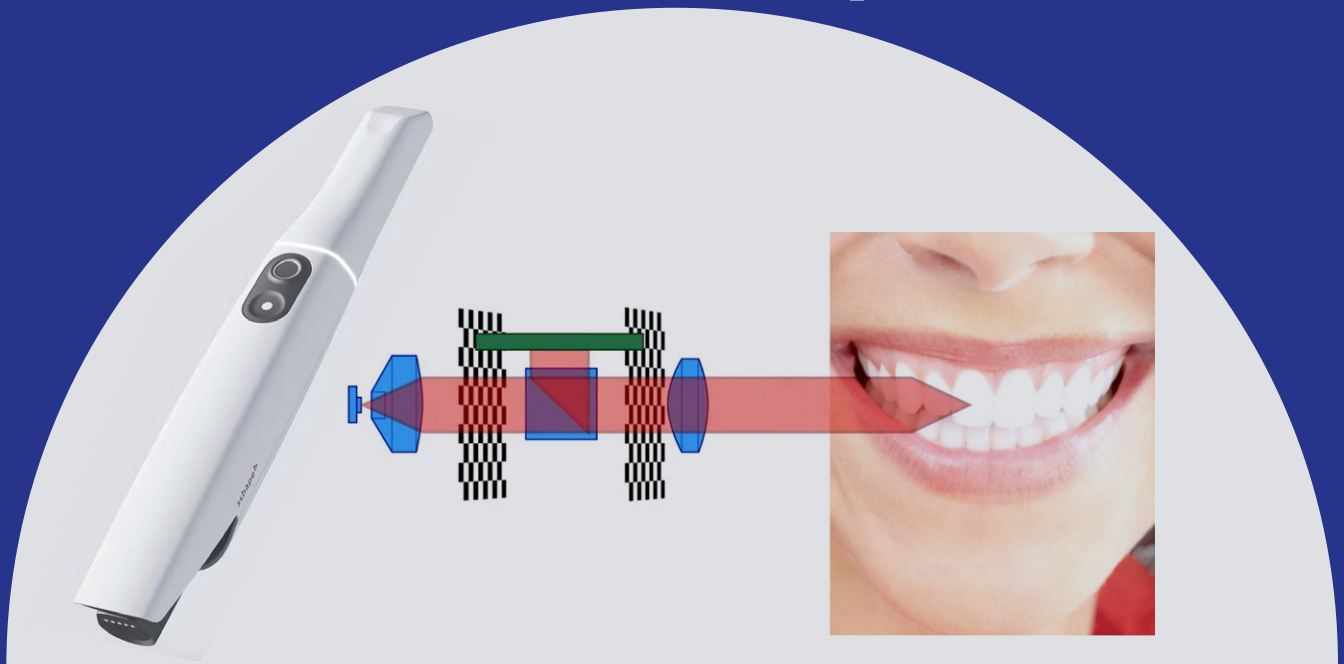


Matematikken bag Moderne Dental Teknologi hos 3Shape



Matematikken bag Moderne Dental Teknologi hos 3Shape

Undervisnings og Projektmaterialer
til filmen

Bjørn Grøn (red.), Martin Lyhne Hansen,
Per Rosenqvist og Mads Peter Steenstrup

© 2020 Konceptet: *Træk virksomhederne ind i undervisningen* tilhører forfatterne til lærebogssystemet *Hvad er matematik?* Bjørn Grøn, Bodil Bruun og Olav Lyndrup.

© 2025 undervisningsmaterialer til filmen *Matematikken bag Moderne Dental Teknologi hos 3Shape* er produceret af *HEM – Produktion og Formidling*.

Grafisk koncept: Ulla Korgaard, Designeriet.

Filmene og de tilhørende projektmaterialer hostes af Lindhardt og Ringhof / Praxis på websitet:

[Træk virksomhederne ind i undervisningen \(praxis.dk\)](https://praxis.dk/træk-virksomhederne-ind-i-undervisningen)

Filmene og de tilhørende projektmaterialer kan frit downloades og anvendes til selvstudium og i undervisningen. Hverken film eller projektmaterialer må gøres til genstand for kommerciel udnyttelse. Henvendelser om materialerne kan rettes til Bjørn Grøn: bjgro1@gmail.com.

Undervisningsmaterialer til filmen *Matematikken bag Moderne Dental Teknologi hos 3Shape*.

Forfattere: Bjørn Grøn (red.), Martin Lyhne Hansen, Per Rosenqvist og Mads Peter Steenstrup

Vi har forsøgt at finde eventuelle rettighedsindehavere, som kan tilkomme honorar i henhold til loven om op-havsret. Skulle der mod forventning være rettighedsindehavere, som måtte have krav på vederlag, vil dette blive håndteret, som om der var indgået en aftale.

Projektet *Træk virksomhederne ind i undervisningen* er forankret på Rysensteen Gymnasium.

Film og tilhørende materialer er produceret med støtte fra Novo Nordisk Fonden

Indholdsfortegnelse

0. Indledning.....	7
1. Analytisk geometri i 2d og 3d.....	8
1.1. Vektorer i rummet.....	9
1.2 Skalarprodukt og vinkler	11
1.3 Linjer i rummet	12
1.3.1 Skæringen mellem to linjer.....	12
1.4 Afstande og midtpunkter af linjestykker	13
1.4.1 Afstanden mellem to punkter.....	14
1.4.2 Afstand fra punkt til linje.....	14
1.4.3 Afstand mellem to linjer	15
1.4.4 Midtpunkt af et linjestykke	18
2. Lineære ligningssystemer.....	20
2.1 Lighedstegnet	21
2.1.1 Formler: Lighedstegnet som et statement	21
2.1.2 Reduktioner: Lighedstegn som proces.....	23
2.1.3 Ligninger: Lighedstegnet som et åbent udsagn	24
2.2 Ligningssystemer	24
2.2.1 Lige store koefficienters metode.....	25
2.2.2 Lige store koefficienters metode – på symbolsk form	26
2.3 Vektoriel beskrivelse af ligningssystemer (især for A-niveau)	27
2.4 Løsning af 3 ligninger med 3 ubekendte med determinantmetoden.....	30
2.5 Kan metoden generaliseres?	32
3. Matrix-algebra.....	33
3.1 Matricer	34
3.2 Regning med matricer.....	34
3.2.1 Enhedsmatricen	36
3.2.2 Invers matrix.....	36
3.3 Determinanter.	39
3.3.1 n ligninger med n ubekendte og Cramers formler	40
4. Lineære afbildninger – intro til lineær algebra.....	43
4.1 Matrix-vektor-multiplikation.....	44
4.2 Lineære afbildninger og Matricer	46
4.2.1 Matricen hørende til en lineær afbildning	47
4.2.2. Eksempler på anvendelse af den specielle søjleregul	48
4.3 Inverse matricer og inverse afbildninger.....	50
5. Rotationer i 2D.....	53
5.1 Rotationer i 2D (B-niveau).....	54
5.1.1 Rotation af gebisset.....	54
5.1.2 Procedure: Koordinater for et punkt i det roterede koordinatsystem	56
5.2 Rotationer i 2D (A-niveau).....	58
5.2.1 Koordinatsystemer og koordinatskifte matrix	58
6. Flytninger og rotationer i 3D	61
6.1 Parallelforskydning i 3D.....	62

6.2 Rotationer i 3D.....	62
7. Optik og Trios fokusmetoden.....	66
7.1 Optik	67
7.1.1 Lysets brydning.....	67
7.1.2 Bevis for Snells lov ud fra Fermats princip	68
<i>Kritisk vinkel.....</i>	<i>69</i>
7.1.3 Samlelinse.....	70
7.1.4 Billeddannelse og den generelle linseformel	73
7.1.5 Brændpunkt og fokus.....	74
<i>I fokus eller ude af fokus på billedplanet</i>	<i>75</i>
7.2 Triosscanneren.....	76
7.2.1 3shapes opsætning af optikken i scanneren	76
<i>Optimering af kontrast.....</i>	<i>76</i>
7.2.2 Sådan foregår afstandsmålingen	79
<i>Glidende gennemsnit</i>	<i>79</i>
8. Foldning af kontinuerte funktioner.....	82
8.1 Definition, eksempler og eksperimenter	83
8.2 Matematiske egenskaber ved foldning.....	87
8.3 Anvendelser af foldning af kontinuerte funktioner	87
8.3.1 Glidende gennemsnit	87
8.3.2 Low Pass filter og High pass filter	89
9. icp-algoritmen sætter subscans sammen	90
9.1 Algoritmen Iterative Closest Point.....	91
9.2 Affine afbildninger	91
9.3 Drejning og parallelforskydning i 2D	92
9.3.1 Drejning og parallelforskydning af trekanter i 2D - Et spil i Geogebra.....	92
9.3.2 Parallelforskydning af subscans i 2D - Et spil i Geogebra	93
<i>Parallelforskydning af subscan med to punkter i 1D</i>	<i>93</i>
<i>Parallelforskydning af subscan med n punkter i 1D</i>	<i>94</i>
<i>Parallelforskydning af subscan med n punkter i 3D</i>	<i>95</i>
9.3.3 Rotationer af subscans i 2D	96
9.4 ICP i tre dimensioner	99
9.4.1 Numerisk differentiation	100

0. Indledning

I projektet *Træk virksomhederne ind i undervisningen* vil der blive produceret 12 film med tilhørende undervisningsmaterialer til hver film. Det foreliggende er skrevet i tilknytning til filmen **Matematikken bag Moderne Dental Teknologi hos 3Shape**. Enkelte steder opfordres til at se korte sekvenser i filmen, men hovedparten af materialet kan sagtens anvendes uafhængigt af filmen. Så man behøver ikke have filmen kørende, mens man arbejder med de matematiske problemer.

Materialet er opdelt i en række kapitler, der kan gennemgås hver for sig. Det enkelte kapitel bygger således ikke på de foregående. Med symboler er det markeret, at dette kapitel eller afsnit kan man arbejde med, når man er på pågældende niveau. Man kan naturligvis også have glæde af at se et stof på nye måder, selv om man selv nu befinder sig på et lidt højere niveau. Og man kan prøve at udfordre sig selv ved at gå i krig med et emne og øvelser, der er markeret til et højere niveau end ens eget. Niveauerne er markeret med symbolerne:

 9. klasse og 1.g	 Slut 1.g og 2.g	 3.g
---	--	--

Gå selv på opdagelse: Du vil finde mange forslag til mindre projekter som afleveringsopgaver, til SRP'er og til at eleverne kan arbejde eksperimenterende med stoffet. For nogle af de mere komplicerede matematiske emner, som fx ICP-algoritmen – Iterative Closest Point – har vi valgt at lade eleverne "lege" og eksperimentere sig frem.

Film og materialer er til fri download og anvendelse i undervisning og selvstudier. Bliver undervisningsmaterialet downloadet og dele af det kopieret, skal der angives kilde.

Forkortelsen HEM står for lærebogssystemet: *Hvad er matematik?* Fra HEM's website: [Hvad er matematik - LRU.dk \(praxis.dk\)](http://Hvad%20er%20matematik%20-%20LRU.dk%20(praxis.dk)) kan der bla. frit hentes mange projekter.

Hvor der er markeret **Link til 7** (og andre tal) angives, at her kan der hentes ekstra materialer ind. Disse tilgås via website for filmen. Find nummeret og klik.

Vi vil meget gerne have feedback med kommentarer og forslag, der kan forbedre de kommende samlinger af undervisningsmaterialer.

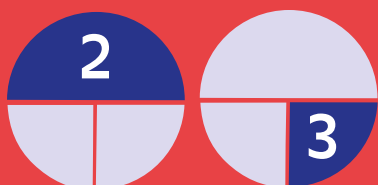
Film og undervisningsmaterialer produceres med støtte fra Novo Nordisk Fonden.

1.

Analytisk geometri i 2d og 3d



De metoder, 3Shapes scannere anvender, bygger helt grundlæggende på analytisk geometri. Det er naturligvis rumgeometri, men for at få fast grund under fødderne starter vi med at introducere begreberne i 2D. Vi bevæger os hurtigt frem til et af de centrale spørgsmål: Hvordan bestemmer man skæringspunkter mellem linjer i 3D – og hvordan håndterer man, at linjer sjældent skærer hinanden i virkeligheden? Linjerne er her synslinjerne fra kameralinser og lysstråler fra laserpointere.



1. Analytisk geometri i 2d og 3d

(Målet med dette kapitel er at nå frem til at kunne håndtere vindskæve linjer i rummet, dvs linjer der ikke skærer hinanden. Hvordan finder man det punkt, der ligger nærmest de to eller flere linjer. Derfor får vi relativt hurtigt præsenteret de værktøjer i den analytiske geometri, som er nødvendig baggrundsviden. Hvis man ønsker et hurtigt overblik over alle definitioner, regneregler, og beviserne for disse, så kan man finde det [her \(link til 1-1\)](#). Her ligger også mange øvelser. Ønsker man en grundig indføring i den analytiske geometri, kan man finde det [her \(link til 1-2\)](#)

1.1. Vektorer i rummet

Vi forestiller os, der er givet et koordinatsystem i rummet med begyndelsespunkt O .

Vi repeterer nogle:

Definitioner vedr. vektorer

1) En vektor $\vec{v}$ er fastlagt ved en *længde* og en *retning*. Vi repræsenterer den ofte med en pil. Pilen kan afsættes med startpunkt hvor som helst. Afsættes den med startpunkt i A og lander pilens spids i punktet B , så skriver vi: $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Linjestykket fra A til B , AB kaldes for en *repræsentant* for vektoren.

2) Vektor $\overrightarrow{BA}$ har samme længde som $\overrightarrow{AB}$, men modsat retning. Den betegnes også $-\overrightarrow{AB}$, eller $-\vec{v}$, og kaldes *den modsatte vektor* til $\vec{v}$.

3) Vektorer kan *adderes geometrisk* ved at afsætte repræsentanter for vektorerne i forlængelse af hinanden således, at der hvor den ene pil slutter, begynder den næste.

4) Afsættes $\vec{v}$ med udgangspunkt i O og lander pilen i et punkt P , kalder vi $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ for *stedvektoren* til punktet P .

5) Hvis P har koordinaterne $P = (x, y, z)$, så er x , y og z projektionerne af linjestykket OP ned på de tre akser. Vi definerer derfor også *koordinater* for $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ til at

være:
$$\vec{v} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

6) Vektoren $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ kaldes for *nul-vektoren*. Den har længde 0 og ingen retning.

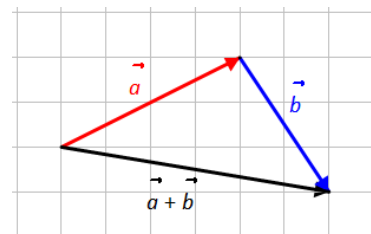
7) Vektorer givet på koordinatform *adderes koordinatmæssigt* således:

Givet: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, så er:
$$\vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \\ v_3 + u_3 \end{pmatrix}$$

8) *Længden* af en vektor $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ defineres som længden af en repræsentant:

$$|\vec{v}| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

En vektor med længde 1 kaldes for en *enhedsvektor*.



9) Man kan *gange* et vilkårligt tal t på en vektor $\vec{v}$, og derved få en ny vektor: $t \cdot \vec{v}$. I vektorregning kaldes tal også for skalarer, for at skelne fra vektorer.

Retningen af $t \cdot \vec{v}$: Er t positiv peger $t \cdot \vec{v}$ i samme retning som $\vec{v}$. Er t negativ peger $t \cdot \vec{v}$ i modsat retning af $\vec{v}$. Er $t = 0$, er $t \cdot \vec{v} = \vec{0}$, altså nul-vektoren.

Længden af $t \cdot \vec{v}$: $|t \cdot \vec{v}| = |t| \cdot |\vec{v}|$, hvor $|t|$ betyder numerisk værdi, og $|\vec{v}|$ betyder længden af $\vec{v}$

10) Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kaldes for *parallelle*, hvis der findes et tal t , så $\vec{a} = t \cdot \vec{b}$

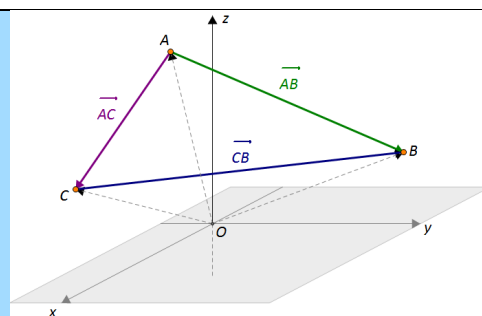
Bemærk: Koordinatsæt for punkter skrives vandret, og koordinatsæt for vektorer skrives lodret.

Blandt de regneregler, man kan finde i dokumenterne, vi har linket til ovenfor, hører *indskudsreglen* til de vigtigste.

Indskudsreglen

For tre punkter $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ og $C(c_1, c_2, c_3)$ i rummet (eller i planen – tegn selv!) gælder, der:

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB} \quad \text{eller} \quad \vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$$

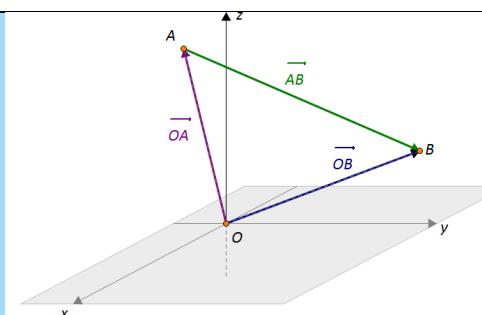


Indskudsreglen giver umiddelbart sætningen om koordinater for $\vec{AB}$

Koordinaterne for forbindelsesvektoren $\vec{AB}$

Hvis $A = (a_1, a_2, a_3)$ og $B = (b_1, b_2, b_3)$, så er koordinaterne for forbindelsesvektoren:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$



Bevis

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$. Indsæt nu koordinaterne, og resultatet står der.

Øvelse 1.1

Lad en trekant være givet ved $A(1, 6, -2)$, $B(5, 2, -1)$ og $C(2, -1, -7)$

a) Tegn de tre punkter ind i et koordinatsystem.

b) Bestem vektorerne $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ og $\vec{BC}$.

c) Forklar, at indskudssætningen siger: $\vec{AB} = \vec{AC} - \vec{BC}$. Undersøg om det gælder.

d) Bestem dernæst længden af de tre vektorer $|\vec{AB}|$, $|\vec{AC}|$ og $|\vec{BC}|$.

1.2 Skalarprodukt og vinkler

I vektorernes verden forekommer meget at være relativ kendte geometriagtige ting. Der er mange fysiske repræsentationer, som kræfter, vindhastighed og acceleration. Men med introduktion af *skalarproduktet* ser vi, at det er en helt ny verden.

Definition og egenskaber ved skalarproduktet

1) Skalarproduktet mellem to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ defineres som:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Skalarproduktet kaldes også *prikproduktet*, og $\vec{a} \cdot \vec{b}$ læses "a prik b"

2) Skalarprodukt og længder: $\vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2$

3) Vinklen mellem to vektorer defineres som vinklen mellem to repræsentanter. Vinklen v er altid den mindste vinkel, dvs $v \leq 180^\circ$

4) Skalarprodukt og vinkler: Man kan vise: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$

Eller med cosinus isoleret: $\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

5) Af 4) følger: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Der er ingen faste regler for om nulvektoren er ortogonal på alle vektorer, eller om den ingen vinkel har. Tilfældet behandles for sig.

6) Alle normale regneregler gælder, men man kan ikke løse ligninger ved at forkorte.

Eksempel: At bestemme vinklen mellem to vektorer

Vi har givet vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Afsæt de to vektorer som stedvektorer i et 3D koordinatsystem. Roter så du ser, hvilken vinkel vi leder efter.

b) Bestem vinklen v mellem de to vektorer:

Vi indsætter i formlen i punkt 4) ovenfor:

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos(v) = \frac{3 \cdot 5 + (-2) \cdot 6 + 4 \cdot (-1)}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{5^2 + 6^2 + (-1)^2}}$$

$$\cos(v) = \frac{-1}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{62}}$$

Ved at anvende $\cos^{-1}$ (eller arcCos i Maple) får vi nu

$$v = 91,35^\circ$$

Øvelse 1.2 Vinkler og ortogonalitet

a) Bestem vinklen mellem $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) Undersøg om $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$ er ortogonale

c) Bestem tallet t så vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ er ortogonale

1.3 Linjer i rummet

Gennem *to punkter* går der præcis én linje. Men når vi har vektorer til rådighed, kan vi også beskrive en linje med ét punkt og en vektor, der angiver retningen

Definition: Linjens parameterfremstilling

En linje l , der går gennem punktet $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ og med en retning bestemt af vektoren:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}, \text{ består af alle de punkter } P_t = (x, y, z), \text{ hvor der findes et tal } t, \text{ så følgende parameterfremstilling er opfyldt:}$$

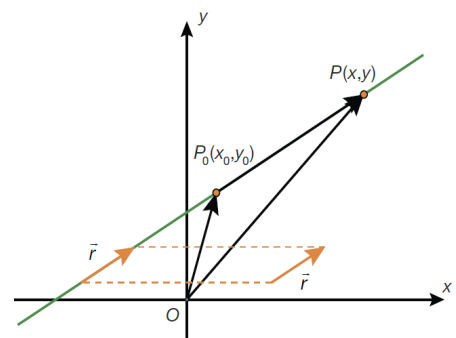
$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}, \text{ eller skrevet koordinatvis: } l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t \cdot r_1 \\ y_0 + t \cdot r_2 \\ z_0 + t \cdot r_3 \end{pmatrix}$$

Bemærk: Parameterfremstillingen kommer umiddelbart af følgende vektorligning:

$$\overrightarrow{OP_t} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P_t} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{r}$$

ved at indsætte koordinaterne.

Kan du se, hvor vektorligningen kommer fra?



1.3.1 Skæringen mellem to linjer

I planen vil to ikke-parallele linjer altid skære hinanden. I filmen fortæller Isak, at sådan er det ikke i rummet. Tværtimod er det i praksis uhyre sjældent, fordi punkter og dermed også vektorer altid kun er bestemt med en vis nøjagtighed, dvs et vist antal decimaler. Dermed er der indbygget en vis unøjagtighed.

Man undersøger, om to linjer, l og m givet ved deres parameterfremstillinger:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + t \cdot u_1 \\ y_1 + t \cdot u_2 \\ z_1 + t \cdot u_3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + s \cdot v_1 \\ y_2 + s \cdot v_2 \\ z_2 + s \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

skærer hinanden ved at opstille og søge at løse tre ligninger med to ubekendte, nemlig s og t . Det er vigtigt at indføre to *forskellige* variable for parameterværdien, fordi hvis de skærer hinanden i et punkt Q , så vil man nå frem til dette punkt *på linjen l* ved at indsætte en bestemt værdi af t , mens man *på linjen m* givetvis vil nå frem til punktet Q ved at indsætte en anden talværdi som s .

Løsning af forskellige typer ligningssystemer behandles i kapitel 2, men lad os blot her se på et (konstrueret) eksempel:

Eksempel Bestemmelse af skæringspunkt

Linjerne l og m er givet ved følgende parameterfremstillinger:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + t \cdot 1 \\ 11 + t \cdot 2 \\ 10 + t \cdot 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + s \cdot 3 \\ 9 + s \cdot (-2) \\ 4 + s \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Vi opstiller først de to ligninger bestemt af, at x - og y -koordinaterne skal være ens:

$$\begin{aligned} 7 + t \cdot 1 &= -2 + s \cdot 3 \\ 11 + t \cdot 2 &= 9 + s \cdot (-2) \end{aligned}$$

Prøv selv at anvende "lige store koefficienters metode" til først at skaffe t af vejen (gange første ligning med -2 , og adder derefter de to ligninger). Bestem nu s .

Anvend derefter metoden til at skaffe s af vejen (gange første ligning med 2 og anden ligning med 3 , og adder derefter de to ligninger). Bestem nu t .

Du skal få: $t = -3$ og $s = 2$

Indsæt nu de to værdier i hver sin parameterfremstilling, og kontroller, at du i begge tilfælde får punktet $Q = (4, 5, -2)$

Vi kan således her konkludere, at de to linjer skærer hinanden i $Q = (4, 5, -2)$

Hvis to linjer ikke skærer hinanden kalder vi dem indbyrdes *vindskæve*

Øvelse 1.3 Undersøg om linjerne er vindskæve

Linjerne l og m er givet ved følgende parameterfremstillinger:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + t \cdot 1 \\ -2 + t \cdot 1 \\ 7 + t \cdot 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + s \cdot (-2) \\ -3 + s \cdot (-1) \\ 6 + s \cdot 3 \end{pmatrix}$$

Vis ved samme metode som i eksemplet, at de to linjer er vindskæve.



1.4 Afstande og midtpunkter af linjestykker

I filmen, hvor Søren demonstrerer den såkaldte ICP-algoritme, forklarer han, at afstanden mellem to punkter bestemmes vha. Pythagoras sætning.

1.4.1 Afstanden mellem to punkter

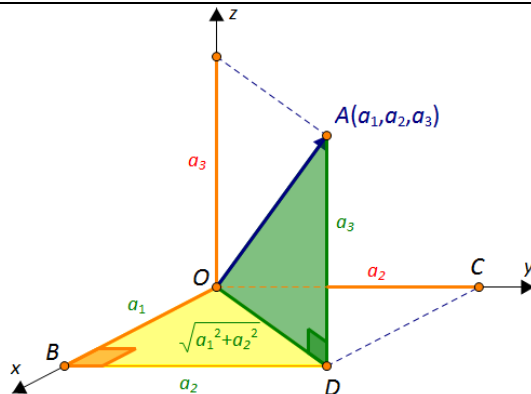
Afstanden mellem punkterne $A(a_1, a_2, a_3)$ og $B(b_1, b_2, b_3)$ bestemmes ved hjælp af

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Som vi genkender som Pythagoras sætning, anvendt på forbindelsesvektoren $\overline{AB}$.

Øvelse 1.4 Argumentation for Pythagoras sætning i 3 dimensioner

Du kender Pythagoras sætning i plangeometri, hvor den udtaler sig om længden af hypotenusen i en retvinklet trekant. Prøv selv at argumentere for sætningen i 3 dimensioner ved hjælp af tegningen til højre. Vi ønsker at bestemme længden af stykket OA , og anvender sætningen i 2D to gange!



1.4.2 Afstand fra punkt til linje

Givet et punkt P og en linje l i rummet, som punktet ikke ligger på. Med "afstanden fra P til l " mener vi altid *den mindste afstand*. I analytiske geometri kan man udlede en formel for denne afstand. Formlen bygger på kendskab til det såkaldte *krydsprodukt*. Det er et vist arbejde i sig selv at få greb om det, og det er behandlet i de to dokumenter, der linkes til i starten af kapitlet. Her vil vi ikke bruge tid på at indføre krydsproduktet, men i stedet bestemme afstanden med brug af differentialregning. "Mindste" afstand leder jo tanken hen på at bestemme minimum. Vi gennemgår metoden med et eksempel.

Eksempel: Afstand fra punkt til linje

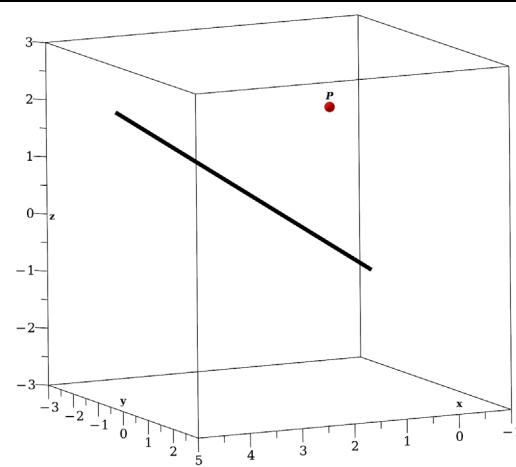
Givet punktet $P(1, 0, 2)$ og linjen:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + t \\ 2 - 3t \\ t \end{pmatrix}$$

- Angiv en retningsvektor for l .
 - Udfør et 3D-plot af linjen og punktet.
- Det er let at se, at P ikke ligger på linjen.

Vi vil nu bestemme kvadratet på afstanden fra P til et tilfældigt punkt på linjen, $Q(t)$

$Q(t)$ har ovenstående koordinater.



- Opstil nu et udtryk for kvadratet på afstanden, altså $|PQ(t)|^2$

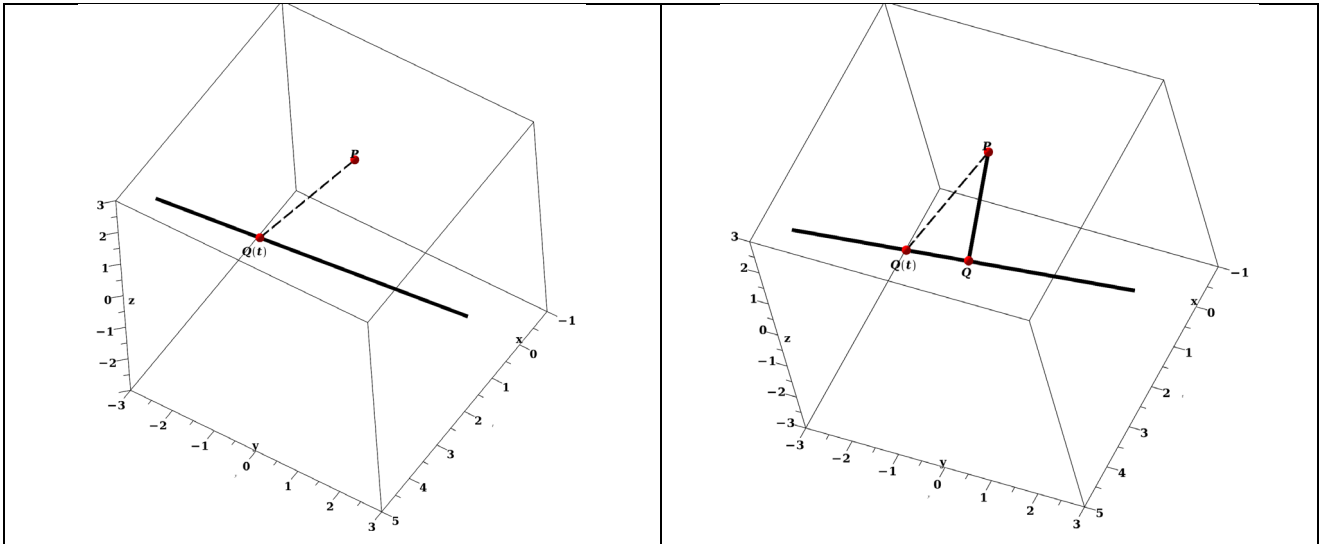
- Reducer udtrykket. Du skal få andengradspolynomiet $p(t) = 11t^2 - 14t + 9$

- Vi skal finde minimum. Du kan evt. bruge toppunktsformlen, eller du kan bestemme minimum med brug af differentialregning. Du skal få, at p har minimum for

$$t = \frac{14}{22}, \quad \text{med minimumsværdien: } p\left(\frac{14}{22}\right) = 4,545$$

Ved at indsætte t -værdien i parameterfremstillingen får vi, at punktet på l med den nærmeste afstand til P er $Q = \left(\frac{29}{11}, \frac{1}{11}, \frac{7}{11}\right) \approx (2.64, 0.09, 0.64)$

Nedenfor kan du se en illustration af et tilfældigt valgt punkt, $Q(t)$, med forbindelseslinjen til P indtegnet. Og på den næste illustration ser du det fundne punkt Q afsat. Figuren illustrerer, at den korteste afstand også er den vinkelrette afstand.



Øvelse 1.5 Bestem afstanden fra et punkt til en linje

Vi ønsker at bestemme afstanden fra punktet $P(8, 6, 7)$ til linjen gennem punktet

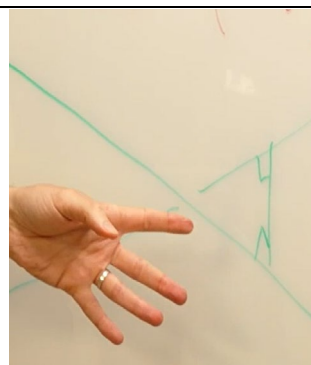
$P_0(3, -4, 5)$ og med retningsvektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- Opstil en parameterfremstilling for linjen, med parameteren t .
- Udfør et 3D-plot af situationen.
- Lad $Q(t)$ være et tilfældigt punkt på linjen og bestem koordinaterne for $\overline{PQ(t)}$
- Udregn $|\overline{PQ(t)}|^2$, reducer til den almindelige form for et andengradspolynomium og bestem den værdi $t_{\min}$, der giver minimum for længden.
- Udregn $|\overline{PQ(t_{\min})}|$. Du skal få 11,24.

1.4.3 Afstand mellem to linjer

I filmen forklarer Isak, at i det (almindelige) tilfælde, hvor to vindskæve linjer i rummet ikke skærer hinanden, da findes der et linjestykke mellem linjerne, som repræsenterer den mindste afstand.

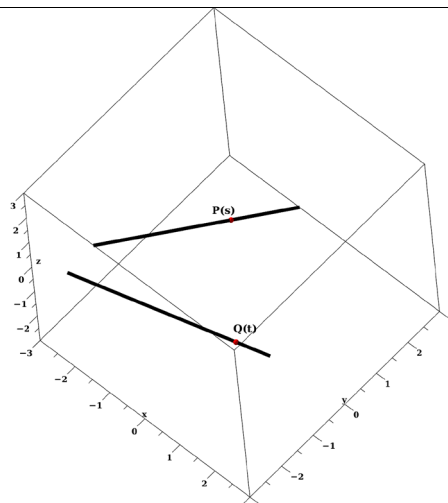
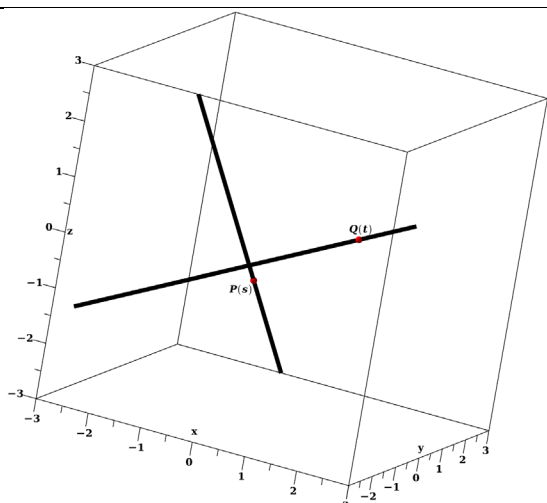
Linjestykket er karakteriseret ved, at det står vinkelret på begge linjer. I analytisk geometri kan man også udlede en formel for denne afstand. Formlen bygger igen på kendskab til det såkaldte *krydsprodukt*. Svagheden ved denne metode er, at det kun giver afstanden som et tal, ikke hvor den findes.



Vi har givet to vindskæve linjer l og m . Det er svært at tegne i 3D – på den første tegning nedenfor ser linjerne ud til at krydse hinanden, men når koordinatsystemet drejes og vi kigger ind langs en anden retning, ser vi det. Vi har afsat to punkter, $Q(t)$ og $P(s)$ på linjerne, og skal bestemme t og s , så afstanden mellem dem minimeres.

De to linjer er henh. $l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2t \\ -2 \\ 1 + t \end{pmatrix} :$

og $m : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 + 2s \\ -1 - 2s \end{pmatrix} :$

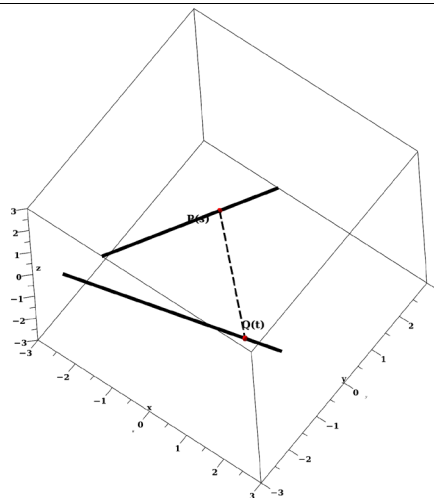


Vi opstiller vektoren $\overrightarrow{P(s)Q(t)} = \begin{pmatrix} 3 + 2t \\ -3 - 2s \\ 2 + 2s + t \end{pmatrix},$

og trækker linjen mellem $P(s)$ og $Q(t)$:
Se den stiplede på tegningen.

Retningsvektorerne

for l er $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, og for m er $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$



Øvelse 1.6

Vi vil nu udnytte de to "krav", at: $\overrightarrow{P(s)Q(t)} \perp \vec{u}$ og $\overrightarrow{P(s)Q(t)} \perp \vec{v}$

a) Vis, at $\overrightarrow{P(s)Q(t)} \perp \vec{u}$ giver: $\vec{u} \cdot \overrightarrow{P(s)Q(t)} = 0 \Rightarrow 8 + 5t + 2s = 0$

b) Vis, at $\overrightarrow{P(s)Q(t)} \perp \vec{v}$ giver: $\vec{v} \cdot \overrightarrow{P(s)Q(t)} = 0 \Rightarrow -10 - 2t - 8s = 0$

c) Opskriv ligningssystemet således:

$$\begin{array}{lcl} 8 + 5t + 2s = 0 & \text{eller:} & 5t + 2s = -8 \\ -10 - 2t - 8s = 0 & & -2t - 8s = 10 \end{array}$$

d) Vis at løsningen er: $\{s = -\frac{17}{18}, t = -\frac{11}{9}\}$

De to *punkter*, hvor der er mindst afstand er derfor:

$$P_{\min} = P\left(-\frac{17}{18}\right) = \left(-1, -\frac{8}{9}, \frac{8}{9}\right) \text{ og}$$

$$Q_{\min} = Q\left(-\frac{11}{9}\right) = \left(-\frac{4}{9}, -2, -\frac{2}{9}\right).$$

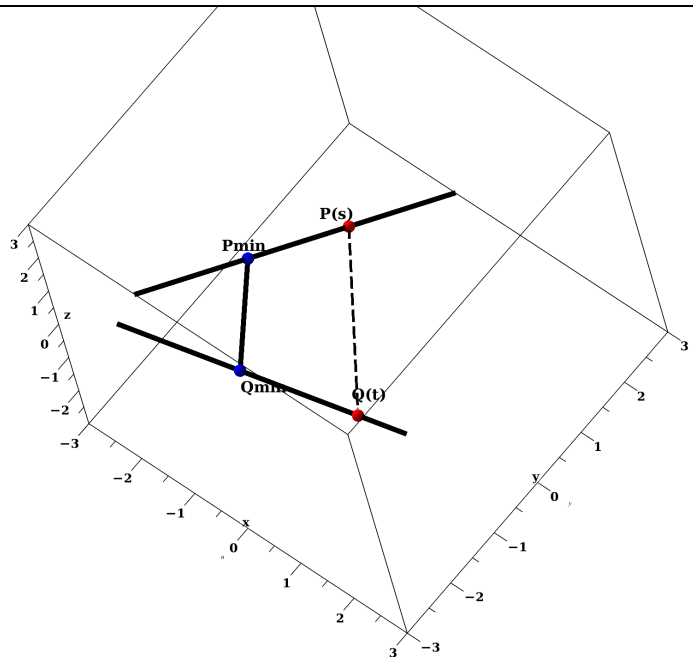
Som kontrol tegnes linjen, der forbinder de to punkter.

Afstanden kan nu beregnes som

$$|\overrightarrow{P_{\min}Q_{\min}}|$$

Vis, at afstanden er $\frac{5}{3}$

At den mindste afstand findes det sted, hvor forbindelseslinjen er ortogonal på begge linjer, er en påstand, der egentlig skal vises.



Øvelse 1.7 Den mindste afstand er den vinkelrette.

Påstanden kan vises ved brug af indskudssætningen.

Givet to vilkårlige punkter P og Q på linjerne l og m . Vi ved, at vektoren $\overrightarrow{P_{\min}Q_{\min}}$ er ortogonal på begge linjer. Argumenter nu for følgende omskrivninger:

a) Vis: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP_{\min}} + \overrightarrow{P_{\min}Q_{\min}} + \overrightarrow{Q_{\min}Q}$

b) Gør nøje rede for hvert trin i følgende omskrivning

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ}^2 &= \overrightarrow{PP_{\min}}^2 + \overrightarrow{P_{\min}Q_{\min}}^2 + \overrightarrow{Q_{\min}Q}^2 + 2\overrightarrow{PP_{\min}} \cdot \overrightarrow{P_{\min}Q_{\min}} + 2\overrightarrow{PP_{\min}} \cdot \overrightarrow{Q_{\min}Q} + 2\overrightarrow{P_{\min}Q_{\min}} \cdot \overrightarrow{Q_{\min}Q} \\ &= \overrightarrow{PP_{\min}}^2 + \overrightarrow{P_{\min}Q_{\min}}^2 + \overrightarrow{Q_{\min}Q}^2 + 2\overrightarrow{PP_{\min}} \cdot \overrightarrow{Q_{\min}Q} \\ &= \left(\overrightarrow{PP_{\min}}^2 + \overrightarrow{Q_{\min}Q}^2 + 2\overrightarrow{PP_{\min}} \cdot \overrightarrow{Q_{\min}Q} \right) + \overrightarrow{P_{\min}Q_{\min}}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{PP_{\min}} + \overrightarrow{Q_{\min}Q} \right)^2 + \overrightarrow{P_{\min}Q_{\min}}^2 \\ &\geq \overrightarrow{P_{\min}Q_{\min}}^2 \end{aligned}$$

Hermed er vist, at $\overrightarrow{PQ}^2 \geq \overrightarrow{P_{\min}Q_{\min}}^2$,

hvilket er det samme som: $|\overrightarrow{PQ}|^2 \geq |\overrightarrow{P_{\min}Q_{\min}}|^2$

Men så gælder også $|\overrightarrow{PQ}| \geq |\overrightarrow{P_{\min}Q_{\min}}|$

Hermed er vist, at der findes en mindste afstand, og at denne findes hvor de to linjer kan forbindes med en linje, der er ortogonal på begge.

Øvelse 1.8 Kan proceduren: Mindste afstand anvendes i alle situationer?

Givet linjerne l og m bestemt ved: $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1+t \\ 3 \end{pmatrix}$ og $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+s \\ 2 \\ 7+2s \end{pmatrix}$

- Indtegn de to linjer i et koordinatsystem. Hvad ser du?
- Gennemfør nu proceduren i starten af dette afsnit på de to linjer.
- Proceduren skal give dig den mindste afstand. Hvad er din konklusion på dit resultat?
- Proceduren skal give dig punkterne på l og m , hvor vi finder den mindste afstand. Hvad er din konklusion på dit resultat?

Øvelse 1.8 demonstrerede en metode til at vise, at to linjer skærer hinanden – og til at finde dette skæringspunkt. I næste kapitel vil vi finde formler, der i første omgang fortæller om to linjer i 3D faktisk skærer hinanden og hvis de gør, så udlede en formel for dette skæringspunkt.

Øvelse 1.9 Oplæg til SRP: Nærmeste punkt til n linjer i 3D

Du kan [her \(link til 1-5\)](#) finde et udgangspunkt for et arbejde med problemet: Bestem punktet, der ligger tættest på n givne linjer i 3D.

1.4.4 Midtpunkt af et linjestykke

I 3Shapes algoritme til at bestemme skæringspunkter mellem linjer i rummet indgår som en del-procedure at bestemme midtpunktet af et linjestykke. Vi gennemgår en sådan metode her, der ender med at give os en formel for midtpunkter.

Vi vil bestemme koordinatsættet til midtpunktet M mellem de to punkter i rummet:

$A(a_1, a_2, a_3)$ og $B(b_1, b_2, b_3)$. Tegn selv med i 2D!

Da M er midtpunktet mellem A og B , så må der gælde, at

$$2 \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$$

$$2 \cdot \overrightarrow{OM} - 2 \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$2 \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$M = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2} \right)$$

Øvelse 1.10

Redegør i alle detaljer for omskrivningen ovenfor.

Øvelse 1.11 Midtpunkt af linjestykke

- Bestem koordinaterne for midtpunktet mellem de to punkter $A(2, 3, 6)$ og $B(5, -1, -4)$
- Kontroller beregningerne ved en konstruktion i et 3D-værktøj.

2.

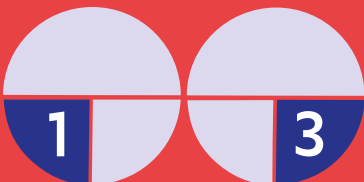
Lineære ligningssystemer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Når der er flere ligninger i spil og med flere ubekendte, taler vi om ligningssystemer. Selv om man ofte lader værktøjer løse ligninger og ligningssystemer, er vi nødt til at studere løsningsmetoderne, for at undersøge, om disse kan generaliseres. Det viser sig fx, at den såkaldte determinantmetode til at løse 2 ligninger med 2 ubekendte kan generaliseres til 3 og højere dimensioner. Det er hovedemnet i dette kapitel.



2. Lineære ligningssystemer

Symboler er noget forholdsvis nyt i matematik. Der er blevet undervist i matematik i over 4000 år, men det er først inden for de sidste 400 år, man er begyndt at bruge symboler som +, - og = og bruge bogstaver som x, y og z eller a, b og c til at repræsentere tal.

Før symbolernes tid skrev man det hele med ord. Man skrev – normalt på latin – ”er lig med”, ”plus” osv, og en ukendt størrelse blev fx betegnet ”tingen”. Matematikbøger var ofte fyldt med gennemregnede eksempler, der fungerede som en slags manualer: Følg denne procedure for at løse dette problem. Selv om metoderne ikke blev formuleret i et formelsprog, så kendte matematikerne i disse samfund de generelle regler, for deres opskrifter virkede. Det gælder i alle de store kulturer, hvor man har anvendt matematik.

2.1 Lighedstegnet

Det første lighedstegn i historien findes i en bog fra 1557, skrevet af englænderen Robert Recorde. Og den første ligning, der blev skrevet i en matematikbog, er denne:

$$14x + 15 = 71$$

Robert Recorde skrev ligningen således:

Symbolerne efter 15 og 71 angiver blot at dette er *rene tal*, mens der er 14 *stk* af den ukendte størrelse. Han anvender et plus som vi gør, og så har vi lighedstegnet.

Hans begrundelse for at anvende det symbol, der blev til vores =, i stedet for at skrive ”er lig med”, fremgår af det gulede afsnit fra bogen:

“And to avoid the tedious repetition of these words: 'is equal to' I will set as I doe often in work use, a pair of parallels, or twin lines of one length thus: =====, because no 2 things can be more equal.”

(Datidens skriftlige engelsk kan faktisk godt læses:)

... roots, make the more aptly bee wroughte. And to avoid the tedious repetition of these wordes: is equal to: I will sette as I doe often in worke use, a paire of paralleles, or twaine lines of one lengthe, thus: =====, because noe. 2. thynges, can be moare equalle. And now marke these numbers.

2.1.1 Formler: Lighedstegnet som et statement

Formler opskrives stort set altid med brug af lighedstegn, fx:

a) For alle tal a og b gælder: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

b) I en retvinklet trekant hvor kateterne er a og b og hypotenusen er c gælder formelen:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

c) En bil med masse m , der bevæger sig med farten v , har en kinetisk energi (bevægelsesenergi) på

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Øvelse 2.1 Formler i dine fag

Archimedes var den første, der opdagede formelen for arealet af en kugles overflade. Han udtrykte formelen således:

Overfladearealet af en kugle er lig med arealet af fire cirkelskiver, der hver har samme radius som kuglens radius.

I dag siger vi: Overfladearealet O af en kugle med radius r kan beregnes ved formelen:

$$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2.$$

a) Forklar, at Archimedes formulering og formelen siger det samme.

- b) Vælg en formel fra et af dine andre fag, formuler den rent *sprogligt*, som Archimedes gjorde, og præsenter den for din gruppe / din sidemand. De skal nu genkende den og opskrive formelen.
- c) Diskuter fordele og ulemper ved den sproglige formulering og ved formeludtrykket.

Hvor kommer formlerne fra? Det er naturligvis meget forskelligt, men ofte starter det med at vi opstiller en *identitet*, dvs vi udregner en størrelse på to forskellige måder, sætter disse lig hinanden, "rykker rundt" og isolerer en af størrelserne.

Øvelse 2.2 Udregning af Jordens middeltemperatur.

I filmen *Matematikken bag klimamodeller hos DMI* foretages fra 18:10 til 23:30 en udledning af formelen for Jordens middeltemperatur.

- a) Hent filmen og se de ca. 5 minutter.
- b) Spol evt. tilbage og svar på følgende: Udledningen af formelen starter med, at vi opstiller et udtryk for, hvor meget energi Jorden *modtager* pr areal, og et udtryk for, hvor meget Jorden *udstråler* pr areal. Hvis der er ligevægt, så kan de to sættes lig hinanden. Hvad var det for to udtryk?
- c) Nu har vi en *identitet*. Gennemfør herefter de "operationer", der fører til at middeltemperaturen T isoleres på den ene side. Har du brug for lidt hjælp, så slå op på s. 40 i de tilhørende undervisningsmaterialer, du finder samme sted som filmen.

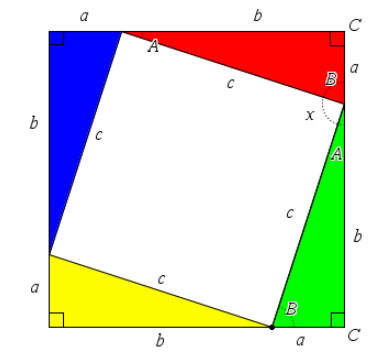
Nogle formler udtrykker en empirisk viden, men det er meget almindeligt, at formler udledes ud fra en *identitet* som ovenfor, hvor vi argumenterer for, at to størrelser, vi har udregnet, må være ens.

Øvelse 2.3 Bevis for Pythagoras formel

Vi har givet en retvinklet trekant ABC , hvor vinkel C er den rette. Vi laver nu fire kopier af denne trekant (grøn, gul, blå og rød) og lægger dem som på figuren nedenfor. Denne figur er et kvadrat, da vinklerne er rette, og sidelængderne alle er $a + b$.

De 4 trekanter danner samtidig en hvid firkant.

- a) Argumenter for, at den hvide firkant er et kvadrat.
- b) Udregn nu arealet af det store kvadrat på to måder – dels som "side gange side", og dels som arealet af de 4 trekanter plus arealet af det hvide kvadrat.
- c) Anvend b) til at opstille en identitet.
- d) Ved at gange parenteserne ud, reducere udtrykkene, og isolere c^2 , kan du nu nå frem til Pythagoras formel. Gør det.



Bemærk: I en formel indgår der *ét lighedstegn og kun ét*. Det samme er tilfældet, når vi opstiller den identitet, der fører frem til formelen. Og i hver af de mellemliggende formleregninger bør der ligeledes kun indgå *ét lighedstegn*.

Vi vil se, at reglerne for formleregning er de samme som reglerne for ligningsløsning.

Øvelse 2.4 Regler for formelregning

- a) Hvis du har gennemført øvelse 2.2 og 2.3, hvilke regler har du så anvendt, for at nå frem til den afsluttende formel?
- b) + og – kaldes omvendte regningsarter. Kan du nævne andre par af omvendte regningsarter? Hent gerne eksempler fra funktionernes verden.

2.1.2 Reduktioner: Lighedstegn som proces

Reduktioner kan både dreje sig om at forenkle et lidt kompliceret algebraisk udtryk, og om at indsætte talværdier i en formel og skridt for skridt udregne den samlede værdi. I begge disse situationer vil vi ofte lade flere lighedstegn følge efter hinanden i processen frem mod det endelige resultat.

Øvelse 2.5. Indsæt symbolsk udtryk i formel

Vi er interesseret i at finde formlen for en parabels toppunkt. Parablens ligning er:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Lad os sige, at vi har fundet, at x-koordinaten til toppunktet er $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Har man lært differentialregning er det forholdsvis let. Men hvad så med 2. koordinaten? Den må vi kunne finde ved simpelthen at indsætte i forskriften. *Forklar nu følgende trin for trin:*

$$\begin{aligned} y_0 &= a \cdot x_0^2 + b \cdot x_0 + c \\ &= a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\ &= a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b \cdot b}{2a} + c \\ &= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= \frac{b^2}{4a} - \frac{2 \cdot b^2}{2 \cdot 2a} + \frac{4a \cdot c}{4a} \\ &= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \\ &= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\ &= \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \\ &= \frac{-d}{4a} \end{aligned} \quad , \text{ hvor } d = b^2 - 4ac \text{ kaldes diskriminanten}$$

Øvelse 2.6 Indsæt tal i formel

Betragt andengradsligningen $2x^2 - 10x + 8 = 0$.

Anvend løsningsformlen: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2a}$ til at bestemme løsningerne.

2.1.3 Ligninger: Lighedstegnet som et åbent udsagn

Selvom en ligning, som Recordes første: $14x + 15 = 71$ måske ligner en formel, så er det noget fundamentalt anderledes. En formel som Pythagoras gælder *altid*, under de givne forudsætninger. En ligning gælder stort set *aldrig*. Recordes ligning er opfyldt for ét eneste tal ud af alle reelle tal, nemlig tallet 4. For alle andre tal i verden er det et forkert udsagn, der står der. Så det gælder om at finde det eller de tal, hvor ligningen er sand, hvis vi indsætter tallet / tallene.

Du begyndte at arbejde med ligninger engang i folkeskolen og har siden mødt et stort antal. Selv om man kan løse det meste med sin lommeregner eller sit værktøjsprogram, så skal man også kunne gøre det manuelt i talmæssigt simple situationer. Det er forudsætningen for at kunne finde en systematik i løsningsmetoderne.

Øvelse 2.7 Regler for løsning af ligninger

Løs følgende ligninger manuelt og noter, hvilke regler du brugte undervejs:

a) $5x - 14 = x + 6$

b) $29 - 4x = 3x - 13$

c) $2x + \frac{5}{2} = \frac{3}{4}x + 10$

d) Sammenlign evt. dine regler med dem, du kan finde [her \(link til 2-1\)](#)

Øvelse 2.8 Ligninger før symbolernes tid

Matematik er fyldt med symboler og regler, så man måske af og til tænker, at det ville være lettere uden. Før symbolernes tid var opgaver formuleret som denne, hentet fra Fibonnacis bog *Liber Abaci* ('Regnekunsten', udgivet 1202):

En købmand, der handlede i Lucca, fordoblede sin pengebeholdning og brugte derefter 12 dinarer. Han tog videre til Firenze, hvor han gennem handel også fordoblede sin pengebeholdning og derefter brugte 12 dinarer. Fra Firenze tog han hjem til Pisa, hvor han igen fordoblede sin pengebeholdning og brugte 12 dinarer. Da han havde gjort det, havde han ikke flere penge. Hvor meget havde han fra begyndelsen?

(Fibonacci er mest kendt for den talrække, der bærer hans navn)

Kunne du løse den uden at indføre et x ? Vil du udfordre dig selv, så kan du [her \(link til 2-2\)](#) finde en stribe opgaver fra før symbolernes tid.

2.2 Ligningssystemer

Én ligning med én ubekendt er folkeskolepensum.

Én ligning med to ubekendte som fx: $y = 2x + 3$ er stadig et åbent udsagn, og vælger du et tilfældigt talpar (x, y) vil det med stor sikkerhed *ikke* opfylde ligningen. Men der er uendelig mange talpar, som faktisk gør det. Det er let at se ved at tænke på, at udtrykket kan fortolkes som ligningen for en ret linje i planen. Alle talpar på denne linje gør ligningen sand.

Har vi kun én ligning kan vi ikke bestemme to ubekendte. Hvis vi leder efter præcise værdier for to ubekendte, skal vi have flere ligninger, og taler så om et *ligningssystem*.



Der gælder følgende regel ved løsning af ligningssystemer:

Skal vi bestemme to ukendte størrelser, skal vi have to forskellige oplysninger.

Skal vi bestemme tre ukendte størrelser, skal vi have tre forskellige oplysninger.

Skal vi bestemme n ukendte størrelser, skal vi have n forskellige oplysninger.

Men hvad er forskellige oplysninger? Hvis vi har følgende to ligninger:

$$y = 2x - 3$$

$$2y = 4x - 6$$

så er der ikke tale om to forskellige oplysninger. Hvis den ene oplysning kan fås ud fra den anden, ved at gange eller dividere eller på anden måde bruge reglerne for løsning af ligninger, så har vi ikke fået en ny oplysning.

Selv om vi har forskellige oplysninger, er det ikke sikkert at ligningssystemet kan løses. Oplysningerne kan stride mod hinanden. Hvis vi fx har

$$y = 2x - 3$$

$$y = 2x + 3$$

så ville vi få: $3 = -3$ (Hvorfor det?)

Øvelse 2.9 Ligninger og linjer

Hvis du tænker på ligningerne som ligninger for linjer, kan du så se, hvorfor der ikke er løsninger? Hvordan ligger de to linjer i forhold til hinanden?

2.2.1 Lige store koefficienters metode

Vi vil nu se på ligningssystemer, i første omgang *to ligninger med to ubekendte*. Og for måske at kunne finde en systematik i løsningerne, vil vi løse sådanne ligninger i hånden. Der findes to konkurrerende metoder, når det drejer sig om at løse to ligninger med to ubekendte.

Den ene kaldes *substitutionsmetoden*. Det danske ord herfor, nemlig *indsættelsesmetoden*, fortæller hvad metoden går ud på: Man isolerer den ene ukendte, fx x i den ene ligning, og indsætter dernæst dette udtryk på x 's plads i den anden ligning. Dette er nu én ligning med én ubekendt, som vi kan løse. Det lyder ligetil, men "djævelen ligger i detaljen": Udregningerne giver normalt en del brøkgregning, og det kan blive rigtig træls. Du kan evt. selv prøve metoden på et af eksemplerne nedenfor.

Den anden metode, der kaldes for *lige store koefficienters metode*, har ikke det problem. Det er en meget kraftfuld metode til ligningsløsning, der kan generaliseres til n ligninger med n ubekendte, og som kan sættes på en formel.

Koefficienterne er de tal, der står foran de ubekendte.

Ideen er, at vi ganger de to ligninger igennem med nogle tal, således at først koefficienterne foran den ene, fx x er lige store, og så regner færdig derfra. Dernæst det samme med koefficienterne foran den anden, så der er lige mange af fx y , og så regner vi færdig derfra. Men lad os illustrere med nogle eksempler.

Løs ligningssystemet:

$$8x - 2y = 10$$

$$5x + 3y = 36$$

Vi skaffer "lige store koefficienter" hos y :

$$24x - 6y = 30 \quad \text{1.ligning er ganget med 3}$$

$$10x + 6y = 72 \quad \text{2.ligning er ganget med 2}$$

Adder de to ligninger, så forsvinder y 'erne:

$$34x = 102$$

$$x = 3 \quad \text{vi har divideret med 34}$$

Lad os prøve på samme måde at skaffe "lige store koefficienter" hos x :

$$40x - 10y = 50 \quad \text{1.ligning er ganget med 5}$$

$$40x + 24y = 288 \quad \text{2.ligning er ganget med 8}$$

Subtraher nu den øverste fra den nederste, så forsvinder x 'erne - og læg mærke til, at minus minus bliver + ved y 'erne:

$$34y = 238$$

$$y = 7 \quad \text{vi har divideret med 34}$$

Bemærk: Det var lidt overraskende, at begge udregninger endte med, at vi skal dividere med samme tal, her tallet 34. Det kunne jo være tilfældigt. Men det er det ikke. Lad os prøve endnu et eksempel, hvor du selv kommenterer undervejs:

$$\begin{cases} 13x + 5y = 2 \\ 8x + 11y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 143x + 55y = 22 \\ 40x + 55y = 15 \end{cases} \Rightarrow 103x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{103}$$

$$\begin{cases} 13x + 5y = 2 \\ 8x + 11y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 104x + 40y = 16 \\ 104x + 143y = 39 \end{cases} \Rightarrow 103y = 23 \Leftrightarrow y = \frac{23}{103}$$

Øvelse 2.10

Benyt lige store koefficienters metode til at løse følgende ligningssystemer:

$$\text{a) } \begin{cases} 8x + 2y = 600 \\ 2x - 12y = 100 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x - y = -4 \\ -x + 5y = 20 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 10x + 7y = -8 \\ 15x + 3y = 9 \end{cases}$$

2.2.2 Lige store koefficienters metode – på symbolsk form

Med lige store koefficienters metode ender vi med at dividere med det samme tal, når vi til slut isolerer x og y . Eksemplerne ovenfor er jo ikke et bevis, men et stærkt indicium. Et bevis kræver, vi gennemfører udregningerne symbolsk, dvs. med bogstaver.

Vi har følgende ligningssystem:

$$ax + cy = e$$

$$bx + dy = f$$

Vi vil nu skaffe y 'erne af vejen ved at følge ideen fra taleksemplerne:

$$\begin{cases} a \cdot d \cdot x + c \cdot d \cdot y = e \cdot d & \text{1.ligning er ganget med } d \\ b \cdot c \cdot x + c \cdot d \cdot y = f \cdot c & \text{2.ligning er ganget med } c \end{cases}$$

Subtraher nu den nederste ligning fra den øverste ligning. Så forsvinder y 'erne og vi får:

$$a \cdot d \cdot x - b \cdot c \cdot x = e \cdot d - f \cdot c \Leftrightarrow (a \cdot d - b \cdot c) \cdot x = e \cdot d - f \cdot c$$

$$\text{dvs: } x = \frac{e \cdot d - f \cdot c}{a \cdot d - b \cdot c}$$

Øvelse 2.11 Løs mht y

Prøv nu selv at skaffe x 'erne af vejen og bestemme y . Du skal få ligningen:

$$(a \cdot d - b \cdot c) \cdot y = a \cdot f - b \cdot e$$

dvs:
$$y = \frac{a \cdot f - b \cdot e}{a \cdot d - b \cdot c}$$

Den størrelse vi dividerer med kaldes for ligningssystemets *determinant*:

Definition: Determinanten for et ligningssystem

Ligningssystemet: $\begin{cases} ax + cy = e \\ bx + dy = f \end{cases}$ har determinanten: $D = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$

Den firkantede talblok er determinantsymbolet. Udregningen sker ved at gange diagonalt og trække fra.

Den skarpsindige læser har nok bemærket, at vi burde have taget forbehold i løsningerne, da vi jo kunne komme til at dividere med 0! Det kan vi nu formulere ved at sige, at ovenstående løsninger er opskrevet under den forudsætning, at $D \neq 0$.

Bemærk nu, at *tællerne* i udtrykkene for x og for y kan opfattes som determinanter:

$$D_x = \begin{vmatrix} e & c \\ f & d \end{vmatrix} = e \cdot d - f \cdot c \quad \text{og} \quad D_y = \begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix} = a \cdot f - b \cdot e$$

En huskeregel er, at i x -determinanten har vi udskiftet x -koefficienterne med højre side og i y -determinanten har vi udskiftet y -koefficienterne med højre side.

Vi kan nu formulere resultatet af den symbolske udregning i følgende:

Sætning 2.1: Løsning af et lineært 2x2 ligningssystem

Ligningssystemet: $\begin{cases} ax + cy = e \\ bx + dy = f \end{cases}$ har præcis én løsning, når ligningssystemets determinant er forskellig fra 0. Hvis det er tilfældet, kan løsningen opskrives således:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} e & c \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}} = \frac{e \cdot d - f \cdot c}{a \cdot d - b \cdot c} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}} = \frac{a \cdot f - b \cdot e}{a \cdot d - b \cdot c}$$

Øvelse 2.12. Anvend formlerne

a) Udregn ligningssystemernes determinant i de to eksempler i afsnit 2.2.1.

b) Prøv at anvende formlerne i sætningen på opgaverne i øvelse 2.10

2.3 Vektoriel beskrivelse af ligningssystemer (især for A-niveau)

Forudsætninger: I vektorregning indføres determinanten af vektorparret $(\vec{a}, \vec{b})$ som skalarproduktet ("prikproduktet") af $\vec{a}$'s tværvektor med $\vec{b}$.

Har vektorerne koordinaterne $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, så er $\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$, og heraf:

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \hat{\vec{a}} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = -a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2 = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

hvor talblokken $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ er et symbol, vi har indført for at gøre det lettere at huske, hvordan determinanten udregnes.

2 ligninger med 2 ubekendte fortolket som en vektorligning.

Betragt ligningssystemet

$$4 \cdot x - 3 \cdot y = 6$$

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 12$$

Definer vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$

Dermed kan vi skrive ligningssystemet således:

$$\vec{a} \cdot x + \vec{b} \cdot y = \vec{c}$$

Løsningen til ligningssystemet kan nu findes ved vektorregning. Først "prikkes" ligningen med $\hat{\vec{b}}$, så y -leddet forsvinder, og vi dermed kan isolere x . Dernæst "prikkes" ligningen med $\hat{\vec{a}}$, så x -leddet forsvinder:

Vi "prikker" ligningen med $\hat{\vec{b}}$, så y-leddet forsvinder, og vi kan isolere x: $\hat{\vec{b}} \cdot (\vec{a} \cdot x + \vec{b} \cdot y) = \hat{\vec{b}} \cdot \vec{c}$ $\hat{\vec{b}} \cdot \vec{a} \cdot x + \hat{\vec{b}} \cdot \vec{b} \cdot y = \hat{\vec{b}} \cdot \vec{c}$ $\hat{\vec{b}} \cdot \vec{a} \cdot x = \hat{\vec{b}} \cdot \vec{c}$ $x = \frac{\hat{\vec{b}} \cdot \vec{c}}{\hat{\vec{b}} \cdot \vec{a}} = \frac{\det(\vec{b}, \vec{c})}{\det(\vec{b}, \vec{a})} = \frac{-\det(\vec{c}, \vec{b})}{-\det(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D}$	Vi "prikker" ligningen med $\hat{\vec{a}}$, så x-leddet forsvinder, og vi kan isolere y: $\hat{\vec{a}} \cdot (\vec{a} \cdot x + \vec{b} \cdot y) = \hat{\vec{a}} \cdot \vec{c}$ $\hat{\vec{a}} \cdot \vec{a} \cdot x + \hat{\vec{a}} \cdot \vec{b} \cdot y = \hat{\vec{a}} \cdot \vec{c}$ $\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b} \cdot y = \hat{\vec{a}} \cdot \vec{c}$ $y = \frac{\hat{\vec{a}} \cdot \vec{c}}{\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}} = \frac{\det(\vec{a}, \vec{c})}{\det(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D}$
--	--

Her har vi udnyttet, at: $\det(\vec{b}, \vec{c}) = -\det(\vec{c}, \vec{b})$ og $\det(\vec{b}, \vec{a}) = -\det(\vec{a}, \vec{b})$.

Øvelse 2.13: Vis dette

Bemærk også, at vi har antaget $D \neq 0$. Dette kommenteres i en øvelse nedenfor.

Vi benævner determinanten i tælleren svarende til den af de ubekendte, vi ønsker at bestemme, her henholdsvis D_x og D_y . Bemærk, at D_x fremkommer ved at skrive $\vec{c}$'s koordinater på x -koefficienternes plads, mens D_y fremkommer ved at skrive $\vec{c}$'s

koordinater på y -koefficienternes plads. Determinanten i begge nævnere er den samme, nemlig $D = \det(\vec{a}, \vec{b})$. Man kalder denne for *ligningssystemets determinant*.

Vi samler resultatet i følgende sætning:

Sætning 2.2: Løsning af vektorligninger med determinantmetoden

Vektorligningen $\vec{a} \cdot x + \vec{b} \cdot y = \vec{c}$, hvor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ er egentlige vektorer i planen, har præcis én løsning, når *ligningssystemets determinant* $D \neq 0$. Løsningen er i så fald:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right), \text{ hvor } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ og } D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Hvis $D = 0$ har ligningssystemet enten ingen eller uendeligt mange løsninger.

Øvelse 2.14 Situationen med $D = 0$

- Vis, at hvis et ligningssystems determinant $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, så er også $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$
- Udnyt a) til at vise, at hvis $D = 0$, så er de linjer, som ligningerne fremstiller, parallelle. (*hint: Slå evt. op i din bog: Hvad ved vi om to vektorer, når $\det(\vec{a}, \vec{b}) = 0$?*)
- Argumenter for sætningens sidste påstand, og giv en geometrisk tolkning af de to muligheder.

Vi løser ligningssystemet ovenfor ved hjælp af determinanter:

$$4 \cdot x - 3 \cdot y = 6$$

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 12$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

hvor vi har:

$$D_x = \det(\vec{c}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = 18 - (-36) = 54 \quad \text{og} \quad D_y = \det(\vec{a}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 48 - 12 = 36$$

$$D = \det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - (-6) = 18$$

Altså får vi:

$$(x, y) = \left(\frac{54}{18}, \frac{36}{18} \right) = (3, 2)$$

Systemer af ligninger med flere ubekendte kan således opfattes som vektorligninger

Øvelse 2.15

Løs følgende ligningssystem:

$$2 \cdot x + 5 \cdot y + 2 = 0$$

$$3 \cdot x - 4 \cdot y - 20 = 0$$

2.4 Løsning af 3 ligninger med 3 ubekendte med determinantmetoden

Hvis vi prøver at løse 3 ligninger med 3 ubekendte vha. substitutions- eller lige store koefficienters metode, kan det hurtigt blive en noget langtrukken proces. Men det kan lade sig gøre.

Øvelse 2.16 Løs et 3x3 ligningssystem med lige store koefficienters metode

Vi har givet følgende ligningssystem:

$$x + y + 2z = 5$$

$$2x + y + z = 7$$

$$x + 3y + z = -1$$

Skaf y af vejen i 1. og 2. ligning: $-x + z = -2$ Skaf y af vejen i 2. og 3. ligning: $5x + 2z = 22$ Bestem nu x og z . Du skal få: $x = \frac{26}{7}, z = \frac{12}{7}$	Skaf x af vejen i 1. og 3. ligning: $2y - z = -6$ Skaf x af vejen i 2. og 3. ligning: $5y + z = -9$ Bestem nu y og z . Du skal få: $y = \frac{-15}{7}, z = \frac{12}{7}$
---	---

At den ene af de ubekendte bestemmes to gange, kan vi tage som en kontrol.

Det kan altså lade sig gøre, men det bliver hurtigt omstændeligt. Determinantmetoden som formuleret i sætning 6 åbner imidlertid mulighed for en smart måde at gøre tingene på. Lad os se på et eksempel: Løs ligningssystemet:

$$6x - 4y + 2z = 5$$

$$7x + y - 2z = 1$$

$$4x + 3y + 6z = -2$$

Vi følger helt mekanisk ideen i forrige afsnit, og omformer dette til en vektorligning:

$$\vec{a} \cdot x + \vec{b} \cdot y + \vec{c} \cdot z = \vec{d}, \text{ hvor } \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Herfra er det ikke så let at se, hvordan vi kopierer situationen i 2D, for tværvektorbegrebet findes ikke i 3D. Derfor er man nødt til at gå et skridt videre og omforme vektorligningen til det man kalder en matrix-ligning:

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 7 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ hvor talblokken kaldes en matrix}$$

Øvelse 2.17 Hvordan en vektor ganges på en matrix

a) Matricen består åbenbart af alle koefficienterne, skrevet på deres pladser, men uden de ubekendte. Disse er til gengæld samlet i en vektor, der tilsyneladende skal ganges

på. Kan du forklare hvordan vektoren ganges på matricen, så vi får de oprindelige tre ligninger med tre ubekendte?

b) Prøv at opskrive følgende ligningssystem som en matrixligning:

$$\begin{aligned} 4 \cdot x - 3 \cdot y &= 6 \\ 2 \cdot x + 3 \cdot y &= 12 \end{aligned}$$

I afsnit 2.2.2 fandt vi ud af, at løsningen til ligningssystemet i ovenstående øvelse kunne skrives med determinantsymbolet således:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{54}{18} = 3 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{36}{18} = 2$$

Når man ser en formel som denne fra sætning 2.2, så får man let den tanke: Kunne det ikke bare generaliseres så vi kan opstille en formel for 3 ligninger med 3 ubekendte? Og videre endnu med 4 ligninger med 4 ubekendte, 5 ligninger... , n ligninger med n ubekendte?

Og svaret er bekræftende: Det kan man.

Sætning 2.3 Løsning af 3 ligninger med 3 ubekendte med determinantmetoden

For tre ligninger med tre ubekendte, som den vi startede med:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, & \text{er løsningen:} \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

under forudsætning af, at *ligningssystemets determinant* $\neq 0$

Problemet er selvfølgelig, at vi ikke har forklaret, hvordan man udregner 3 x 3 determinanter. Det illustrerer vi med udregning af *ligningssystemets determinant*:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - a_1 \cdot c_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_2 \cdot c_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot a_3$$

Øvelse 2.18 Udregning af en 3 x 3 determinant

a) Anvend formelen til at udregne determinanten for ligningssystemet:

$$6x - 4y + 2z = 5$$

$$7x + y - 2z = 1$$

$$4x + 3y + 6z = -2$$

Du skal få 306.

Formlen for 3 x 3 determinanter kan lettest huskes og anvendes ved at opskrive to talblokke efter hinanden, og derefter først udregne produktet af de tre første diagonaler skråt ned til højre (de sorte streger), som derefter adderes, og så udregne produktet af de sidste tre diagonaler skråt ned til venstre (de røde streger), som alle subtraheres.

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{array}$$


dvs: $a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - a_1 \cdot c_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_2 \cdot c_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot a_3$

b) Udregn de øvrige tre determinanter, og bestem løsningerne x , y og z .

Du skal få: $x = \frac{78}{306}$, $y = \frac{-274}{306}$, $z = \frac{-17}{306}$

(Løsningerne kan reduceres, men det er ikke så interessant her)

2.5 Kan metoden generaliseres?

Generelt kan ethvert ligningssystem af n ligninger med n ubekendte løses ved denne metode, såfremt ligningssystemets determinant er forskellig fra 0. Hvis den er 0 svarer det til, at ligningssystemet har ingen løsninger, eller uendeligt mange løsninger.

Det er *teoretisk elegant*, at vi som i sætning 2.3 kan opskrive løsningerne til et ligningssystem i én formel. Formlerne kaldes Cramers formler, opkaldt efter den schweiziske matematiker Gabriel Cramer (1704-1752).

I praksis er formlerne mere problematiske at bruge. I afsnit 2.2 så vi at en 2×2 determinant har 2 led. Men i afsnit 2.4 så vi, at en 3×3 determinant har 6 led.

Antallet af led kan også angives som $3! = 6$. Og for en 4×4 determinant bliver antallet af led $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Det system fortsætter faktisk. Det fortæller blandt meget andet, at metoden anført ovenfor til udregning af en 3×3 determinant ikke kan generaliseres. Og det løber hurtigt løbsk – en 5×5 determinant har $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ led. Så til den *praktiske* løsning af mange ligninger med mange ubekendte må der findes nye metoder.

Men hele dette felt er starten på det matematiske område der hedder *matrixalgebra*. I kapitel 3 giver vi en indføring i dette emne.

3.

Matrix-algebra

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m \times n$ matrix

Matricer er blokke af tal, som vist på illustrationen. Der kan være et vilkårligt antal rækker og søjler. Matricer indgår i mange sammenhænge, her vil vi først fokusere på anvendelsen til at opskrive ligningssystemer på en kompakt form. Man kan regne med matricer, ligesom man kan regne med tal – nogle af regnereglerne er de samme, men der er også vigtige forskelle. Arbejdet med at forstå matricer og matrixregning belønnes med, at vi ved hjælp af den symbolik er i stand til at afgøre, om der er løsninger til n ligninger med n ubekendte. Og hvis en sådan findes, så kan vi med matrixnotationen opskrive løsningen på én formel.

3. Matrix-algebra

3.1 Matricer

En matrix er en talblok, der består af vandrette rækker og lodrette søjler, opskrevet fx således. Koordinaterne nummereres med to indices, hvor rækkenummet skrives først. a_{34} er tallet i den 3. række og 4. søjle En matrix som den opskrevne her kaldes for en $m \times n$-matrix. De betegnes normalt med store bogstaver, som her: A	$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $m \times n$ matrix $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$ den i'te række	$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ den j'te søjle
---	--	---

Matricen M her er et eksempel på en såkaldt 4×2-matrix (læses "4 kryds 2 matrix"), fordi den består af 4 rækker og 2 søjler. N er et eksempel på en kvadratisk matrix	$M = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3 \\ 0 & 4 \\ -11 & 6 \end{bmatrix}$	$N = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$
---	--	---

I dette kapitel vil vi begrænse os til kun at se på såkaldte *kvadratiske matricer* – dvs. matricer med samme antal rækker og søjler. Herunder ses tre eksempler på kvadratiske matricer:

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -5 & -5 & 2 & 6 \\ 4 & 21 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 12 \\ 3 & -4 & 5 & -7 \end{bmatrix} \\ 2 \times 2\text{-matrix} & 3 \times 3\text{-matrix} & 4 \times 4\text{-matrix} \end{matrix}$$

3.2 Regning med matricer

Man kan indføre forskellige regneregler for regning med matricer. Hvis to matricer har samme størrelse, kan de adderes, subtraheres og endda multipliceres. Og almindelige reelle tal kan ganges på en matrix. Eksemplerne her viser, hvordan det gøres. Lad matricerne A og B være givet ved:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \\ -7 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$

Et tal ganges på en matrix

$$6 \cdot A = 6 \cdot \begin{bmatrix} -2 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \cdot (-2) & 6 \cdot (-5) & 6 \cdot (-4) \\ 6 \cdot 3 & 6 \cdot 1 & 6 \cdot 0 \\ 6 \cdot 7 & 6 \cdot 2 & 6 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -30 & -24 \\ 18 & 6 & 0 \\ 42 & 12 & 24 \end{bmatrix}$$

Matrixaddition

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \\ -7 & 9 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+0 & -5+2 & -4+5 \\ 3+2 & 1+3 & 0+7 \\ 7+(-7) & 2+9 & 4+11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \\ 0 & 11 & 15 \end{bmatrix}$$

Matrixsubtraktion

$$A - B = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \\ -7 & 9 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-0 & -5-2 & -4-5 \\ 3-2 & 1-3 & 0-7 \\ 7-(-7) & 2-9 & 4-11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -7 & -9 \\ 1 & -2 & -7 \\ 14 & -7 & -7 \end{bmatrix}$$

Matrixmultiplikation

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} -2 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \\ -7 & 9 & 11 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \cdot 0 + (-5) \cdot 2 + (-4) \cdot (-7) & -2 \cdot 2 + (-5) \cdot 3 + (-4) \cdot 9 & -2 \cdot 5 + (-5) \cdot 7 + (-4) \cdot 11 \\ 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 9 & 3 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 11 \\ 7 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-7) & 7 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 9 & 7 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 4 \cdot 11 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 18 & -55 & -89 \\ 2 & 9 & 22 \\ -24 & 56 & 93 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Øvelse 3.1

Kig godt på multiplikationseksemplet ovenfor. Hvordan ganger man to matricer sammen? Hvad er regneteknikken?

Øvelse 3.2 Kommutative, associative og distributive regneregler

a) Hvis du har glemt det, så slå op på nettet, hvad de omtalte begreber betyder.

Lad følgende 2×2 matricer være givet: $M = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 11 & -7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

a) Beregn $M + N$ og $N + M$

c) Beregn $M \cdot N$ og $N \cdot M$

d) Hvad fortæller ovenstående udregninger dig om matrix-addition og -multiplikation? Hvad gælder tilsvarende om regning inden for de reelle tal?

e) Den *associative* regel gælder både for addition og multiplikation blandt de reelle tal. Undersøg, gerne med brug af værktøj, om det samme er tilfældet for matricer.

f) Blandt de reelle tal gælder den distributive regel: $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$. Undersøg, gerne med brug af værktøj, om det samme er tilfældet for matricer.

3.2.1 Enhedsmatricen

En kvadratisk matrix med ettaller i diagonalen og nuller på alle andre positioner kaldes for en enhedsmatrix I . Her er tre eksempler:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Øvelse 3.3 Multiplikation med enhedsmatricen

Lad matricen A være givet ved:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -6 & 7 & -3 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Beregn matrixprodukterne $A \cdot I_3$ og $I_3 \cdot A$. Hvorfor tror du, at matricer med ettaller i diagonalen og 0'er på andre positioner kaldes for enhedsmatricer?

3.2.2 Invers matrix

Indenfor de reelle tal har alle tal $a \neq 0$ en invers mht multiplikation. Tallet skrives a^{-1} . Den inverse er defineret ved, at der gælder: $a \cdot a^{-1} = 1$ og $a^{-1} \cdot a = 1$.

Vi siger nu tilsvarende, at en matrix A har en *invers matrix* B , hvis der gælder, at:

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

Findes der en sådan matrix B , betegnes denne A^{-1} .

Argumenter for, at i så fald er A samtidig den inverse til B , dvs $A = B^{-1}$.

Vi taler derfor om, at de er *hinandens inverse*.

Øvelse 3.4 Der findes højst én invers til en matrix A

Antag både B og C er inverse til A , dvs.: $A \cdot B = B \cdot A = I$ og $A \cdot C = C \cdot A = I$

Forklar nu hvert trin i følgende udregning:

$$B = B \cdot I = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = I \cdot C = C$$

Konklusionen er altså, at B og C er samme matrix. Så der findes højst én.

Øvelse 3.5 Taleksempel på invers matrix

Vis at matricerne $A = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ er hinandens inverse.

For 2×2 - matricer er det nemt at bestemme den inverse matrix, hvis den findes.

Først defineres *determinanten* for en matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ som tallet: $\det(A) = ad - bc$

Sætning 3.1 Den inverse matrix til en 2×2 – matrix

Hvis $\det(A) = a \cdot d - b \cdot c$ for en matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ er $\neq 0$, så har A en invers.

Formlen for den inverse er: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{\det(A)} & \frac{-b}{\det(A)} \\ \frac{-c}{\det(A)} & \frac{a}{\det(A)} \end{bmatrix}$

Øvelse 3.6 Bevis sætningen

Bevis ovenstående påstand ved at vise $A \cdot A^{-1} = I_2$ og $A^{-1} \cdot A = I_2$

Øvelse 3.7 Beregn inverse matricer

Beregn den inverse matrix til hver af følgende tre matricer:

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Øvelse 3.8 Determinanten af et produkt

a) Vis, gerne med brug af værktøj, at $\det(Q) \cdot \det(R) = \det(Q \cdot R)$

b) Vis tilsvarende, at $\det(Q) \cdot \det(W) = \det(Q \cdot W)$

c) Denne egenskab ved determinanten gælder generelt. (I videregående matematik udtrykker man dette ved at sige, at *determinanten er en homomorfi*).

Øvelse 3.9. Hvis matricen A har en invers, så er determinanten $\neq 0$.

a) Forklar forskellen på de to udsagn:

1. Hvis determinanten for en matrix A er $\neq 0$, så har A en invers.

2. Hvis matricen A har en invers, så er determinanten $\neq 0$

De to udsagn kan opskrives symbolsk således:

1. $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ har en invers

2. A har en invers $\Rightarrow \det(A) \neq 0$

b) Kan du finde et andet udsagn, hvor man ikke bare kan "vende pilen om"?

c) I *dette* tilfælde er begge påstande faktisk sande.

1. er vist i sætning 3.1.

2. Bevis for 2): A har en invers, så $A \cdot A^{-1} = I_2$. Anvend nu øvelse 3.8:

$$A \cdot A^{-1} = I_2 \Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_2) \Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1.$$

Forklar udregningerne

Begrund, at vi nu kan konkludere, at $\det(A) \neq 0$.

Øvelse 3.10 Matricer uden inverse

a) Givet $S = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$. Udregn $\det(S)$.

b) Hvad kan du konkludere?

Matricer, der ikke har en invers matrix kaldes for *singulære* matricer.

Øvelse 3.11. Løsning af 2×2 – ligningssystemer med matrixregning

Vi vil nu demonstrere ved "håndregning", hvordan man løser et ligningssystem som:

$$3x + 2y = 8$$

$$3x - 2y = 4$$

med matrixalgebra.

a) Opstil ligningssystemet således:

$$\begin{bmatrix} 3x + 2y \\ 3x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ og omskriv til matrixform } \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (*)$$

Matricen på venstre side kalder vi for koefficientmatricen, idet den jo betegner koefficienterne foran de ubekendte x og y . Nu er ideen følgende:

Kald matricen for A , vektoren med de ubekendte for $\vec{v}$ og talvektoren for $\vec{b}$.

Så kan (*) opskrives således:

$$A \cdot \vec{v} = \vec{b}$$

b) Vis, at A har en invers ved at udregne determinanten. (Du skal få -12)

c) Forklar nu hvert trin i følgende udregninger:

$$A \cdot \vec{v} = \vec{b} \Leftrightarrow A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{v}) = A^{-1} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot \vec{v} = A^{-1} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow I_2 \cdot \vec{v} = A^{-1} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \vec{v} = A^{-1} \cdot \vec{b} \quad (**)$$

d) Bestem den inverse matrix til koefficientmatricen A vha sætning 3.1, og vis at

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$$

Indsæt i (**) og vis endelig, at

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det var en meget simpel ligning, men er $\det(A) \neq 0$ kan vi altid gennemføre dette

Øvelse 3.12 Løs på værktøjsprogram

På dit værktøjsprogram opskriver du bare gangestykket og får resultatet!

Gør det med ovenstående ligningssystem.

Det er jo nemt og hurtigt. Men bag det ligger altså udregninger som i øvelse 3.11.

3.3 Determinanter.

I kapitel 2, afsnit 2.4 forklarede vi, hvordan man kan udregne en 3×3 – determinant ved at opstille to kopier af talblokken, og så gange langs diagonalerne. Men den slags definitioner, der ikke kan generaliseres til en 4×4 – determinant og videre, er ikke så produktive, og giver ingen særlig indsigt i, hvad en determinant egentlig er.

Man kan definere determinanter på forskellige måder. Her vil vi gøre det *induktivt*, dvs skridt for skridt, hvor hvert nyt skridt bygger videre på det forudgående.

1. trin: en 2×2 – determinant $A_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ udregnes således:

$$\det(A_2) = ad - bc$$

2. trin: en 3×3 – determinant $A_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ udregnes således:

$$\det(A_3) = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

3. trin: en 4×4 – determinant $A_4 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$ udregnes således:

$$\det(A_4) = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

osv.

Øvelse 3.13 Definitionen er induktivt opbygget

- Forklar hvad der menes med at definitionen er induktivt opbygget, og specielt, hvorfor definitionen af $\det(A_4)$ giver mening.
- Forklar ud fra definitionen, hvorfor der er 6 led i $\det(A_3)$, 24 led i $\det(A_4)$, og generelt, at der er $n!$ (n fakultet) led i $\det(A_n)$.
- Hvor mange led er der i $\det(A_{10})$?

Vi kan hurtigt løbe tør for bogstaver til de enkelte matrix-koordinater, så derfor indfører man en anden systematik. En koordinat er bestemt af et række-nummer i og et søjle-nummer j . I stedet for at tage nye bogstaver i brug, så betegnes koordinaten på denne plads a_{ij} . Det er altid række-nummer først, søjlenummer sidst.

Men hvad med fortegnene? Det bestemmes af indeks for det tal der ganges på underdeterminanter. Er dette tal a_{ij} , så er fortegnet $+$ (positivt), hvis $i - j$ er et lige tal, og $-$ (minus), hvis $i - j$ er et ulige tal. Den regel er særlig vigtig at huske, fordi vi faktisk kan

vælge at udvikle determinantudregningen efter en anden række end den første, som vi gjorde ovenfor. Udvikler vi efter række nr. 2 får vi:

$$\det(A_4) = -a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} + d_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

Øvelse 3.14 Systematikken i opskrivningen

- Forklar hvorfor fortegnene er som de står skrevet.
- Redegør for systematikken i, hvad der indgår i under-determinanterne, ved fx at forklare, hvordan determinanterne opskrives, hvis vi udvikler efter 3. række.

Vi vil ikke her bevise, at disse udviklinger af determinanterne efter forskellige rækker faktisk giver samme resultat. Det er ikke kompliceret matematik, men det er teknisk lidt indviklet. Hvorfor er det interessant? Det er det, fordi man i store determinantudregninger ofte har rækker med mange nuller. Udvikler man efter en sådan række, vil hele udregningen blive reduceret betydeligt.

Øvelse 3.15. Beregn en 3 x 3 – determinant

Beregn ved brug af definitionen ovenfor determinanten af matricen:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Øvelse 3.16 Invers matrix på værktøj

Undersøg, hvordan man finder inverse matricer i dit CAS-værktøj og find den inverse til 3 x 3 matricen A fra forrige opgave.

3.3.1 n ligninger med n ubekendte og Cramers formler

Generelt kan ethvert ligningssystem af n ligninger med n ubekendte løses ved denne metode, såfremt koefficientmatricen A ikke er singulær. Hvis A er singulær svarer det til, at ligningssystemet har ingen løsninger, eller uendeligt mange løsninger. En af de mest elegante måder at anvende matrixalgebra til løsning af ligningssystemer er ved hjælp af de såkaldte Cramer-formler. De er opkaldt efter den schweiziske matematiker Gabriel Cramer (1704-1752). Cramers formel for løsning af et ligningssystem bestående af to ligninger med to ubekendte er faktisk blot determinantmetoden, som vi stødte på tidligere.

Cramers formel for to ligninger med to ubekendte

Ligningssystemet: $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1$
 $a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2$

har løsningen: $x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$

Vi bemærker her, at Cramers formel giver præcis det resultat vi tidligere kom frem til vha. determinantmetoden for løsning af to ligninger med to ubekendte.

Øvelse 3.17

Benyt Cramers formel til at løse følgende ligningssystem, som vi har set på tidligere:

$$\begin{aligned} 3x + y - 11 &= 0 \\ 2x - 3y + 11 &= 0 \end{aligned}$$

Cramers formel for tre ligninger med tre ubekendte

Ligningssystemet: $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z = d_1$
 $a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \cdot z = d_2$
 $a_3 \cdot x + b_3 \cdot y + c_3 \cdot z = d_3$

har løsningen: $x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$

Øvelse 3.18

Benyt Cramers formel for en 3×3 -situation til at løse dette ligningssystem. Kontroller dit svar med en solve-kommando (det er nemt at komme til at lave regnefejl, når man udregner determinanten af 3×3 matricer!):

$$\begin{aligned} 3x + y &= 11 \\ -x - 5y + 2z &= 153 \\ y + 7z &= 17 \end{aligned}$$

Øvelse 3.19

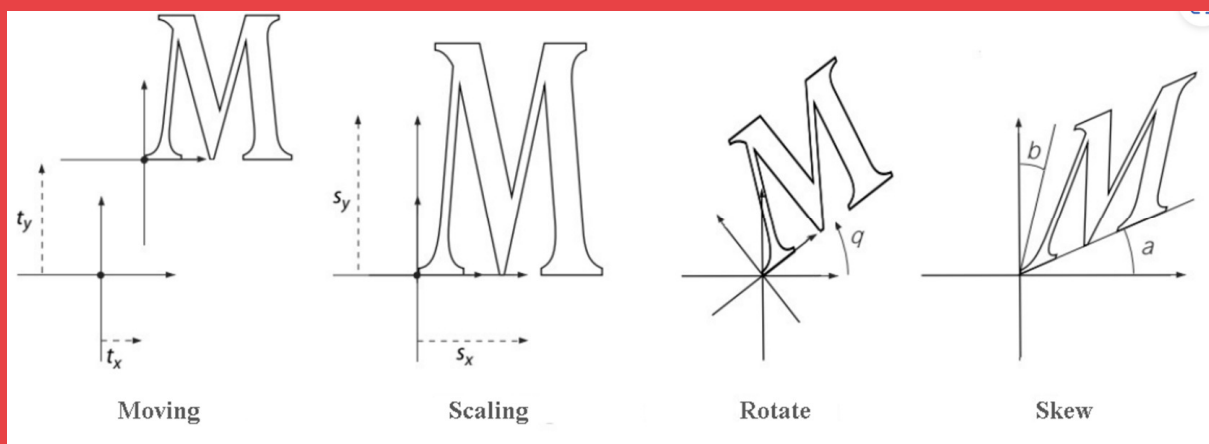
Hvad er mon systemet i Cramers formler? Kan du regne ud, hvordan Cramers formel for følgende ligningssystem med fire ligninger og fire ubekendte ser ud?

$$\begin{aligned}a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z + d_1 \cdot w &= e_1 \\a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \cdot z + d_2 \cdot w &= e_2 \\a_3 \cdot x + b_3 \cdot y + c_3 \cdot z + d_3 \cdot w &= e_3 \\a_4 \cdot x + b_4 \cdot y + c_4 \cdot z + d_4 \cdot w &= e_4\end{aligned}$$

Selvom det er elegant at kunne opskrive en formel for løsning af et stort ligningssystem, så vokser antallet af operationer i en praktisk brug heraf ud over alle grænser. Der er derfor udviklet en forholdsvis let håndterlig metode / algoritme til løsning af vilkårligt store ligningssystemer, som ikke behøver at være kvadratiske. Det betegnes Gauss-elimination efter den matematiker, der først udviklede og anvendte teknikken. Du kan læse mere om det [her-link til 3-1](#).

4.

Lineære afbildninger – intro til lineær algebra



Når man arbejder med geometriske objekter, kan man i forskellige sammenhænge ønske at foretage operationer som de, der er angivet på illustrationen: At parallelforskyde objektet eller dreje det, at skalere det op eller ned – eller at skævvride det uden at ødelægge det. Alle sådanne operationer på geometriske objekter kalder vi afbildninger for at skelne dem fra funktioner, der er operationer på tal. Eksemplerne ovenfor er særligt ”pæne” afbildninger i den forstand, at de kan beskrives på en simpel måde ved hjælp af matricer. Disse operationer kaldes for *lineære* afbildninger. Begrebet, der gives en forklaring i det følgende, må *ikke* forveksles med begrebet lineære funktioner.

Illustration er lånt fra CODE Industry.

4. Lineære afbildninger – intro til lineær algebra

Bemærk, at i dette kapitel angiver variable, skrevet med **fed** og **uden kursiv** **vektorer**. **a** er en vektor.

4.1 Matrix-vektor-multiplikation

En matrix er en rektangulær tabel fyldt med tal. Hvis matrixen har m rækker og n søjler siger vi, at matrixen er en $m \times n$ matrix. Søjlerne i sådan en $m \times n$ matrix er vektorer med m koordinater. Hvis $A = [a_1 a_2 \dots a_n]$ er en $m \times n$ matrix med søjler $a_1, a_2, \dots, a_n$ og

hvis $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kan vi definere produktet $A \cdot \mathbf{x}$ af matrixen med vektoren ved

$$A \cdot \mathbf{x} = [a_1 a_2 \dots a_n] \cdot \mathbf{x} = [a_1 a_2 \dots a_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$$

Man ganger altså en matrix med en vektor ved at gange hver af vektorens koordinater med de vektorer som danner søjlerne i matrixen. Læg godt mærke til, at dette kun kan lade sig gøre hvis der er præcis lige så mange koordinater i vores $\mathbf{x}$ -vektor som der er søjler i matrixen A . Resultatet af produktet blive så en vektor der har lige så mange koordinater som der er rækker i matrixen A .

Enhedsmatricer

Når vi regner med almindelige reelle tal er der to tal der udmærker sig ved nogle helt specielle egenskaber.

Tallet "1" har den egenskab, at der for alle tal x gælder $1 \cdot x = x$

Tallet "0" har den egenskab, at der for alle tal x gælder $0 + x = x$.

I forhold til multiplikation har tallet "0" også en meget karakteristisk egenskab, nemlig $0 \cdot x = 0$

Når vi har med matrixmultiplikation at gøre findes der en analogi til begge disse særlige tal. For det første findes der en $n \times n$ enhedsmatrix:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Denne matrix fungerer ligesom 1-tallet, idet der for alle vektorer $\mathbf{x}$ med n koordinater gælder:

$$I_n \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

De to enhedsmatricer vi især får brug for er

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Øvelse 4.1

Vis at både I_2 og I_3 fungerer som "1-tal" ved at gange dem på vilkårlige vektorer med hhv. 2 og 3 koordinater

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nulvektorer

Nulvektoren med n koordinater er defineret ved $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ og for alle $m \times n$ matricer A

gælder der $A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ (argumentér for dette)

Række-søjle-reglen til beregning af $A \cdot \mathbf{x}$

Hvis produktet $A \cdot \mathbf{x}$ er defineret, kan man beregne den i 'te koordinat i resultatet ved at tage summen af produkterne af elementerne i den i 'te række i A med de tilsvarende koordinater i vektoren $\mathbf{x}$. Det lyder mere kompliceret end det er så lad os lige vise det med et eksempel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Øvelse 4.2

Beregn matrix-vektorprodukterne herunder. Prøv både at bruge definitionen og række-søjlereglen:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{b) } \begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

I den følgende øvelse får vi brug for at kunne gange en matrix A med et tal c . Dette gøres ved at gange tallet ind på alle pladser i matricen. Som fx. her for en 2x2-matrix:

$$c \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot x & c \cdot y \\ c \cdot z & c \cdot w \end{pmatrix}$$

Øvelse 4.3

Vis, ved at bruge definitionerne og udregne højre og venstre side hver for sig, at følgende to regneregler gælder for matrix-vektor-produkter:

$$A \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$$

$$A \cdot (c \cdot \mathbf{u}) = c \cdot (A \cdot \mathbf{u})$$

Vink: Start med at vise reglerne for 2x2 matricer og 3x3 matricer (og tilhørende vektorer med hhv. 2 og 3 koordinater) og overvej så, at det gælder generelt

4.2 Lineære afbildninger og Matricer

En **afbildning** er en slags generaliseret funktion, hvor man i stedet for at have tal som "input" fra definitionsområdet og tal som "output" i værdimængden kan have forskellige andre matematiske objekter. De afbildninger f vi især skal interessere os for, er afbildninger hvor både $Dm(f)$ og $Vm(f)$ er **vektorer**. Specielt viser det sig, at afbildninger af typerne

Matrixafbildninger: $f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$

Affine afbildninger: $f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$

hvor A er en 3x3 matrix og $\mathbf{b}$ er en vektor med 3 koordinater, vil være meget vigtige i behandlingen af data fra bl.a. Trios scanneren.

I de følgende afsnit er det overalt underforstået, at både definitionsområdet og værdimængden for de omtalte afbildninger består af vektorer med n koordinater, dvs. at både input og output er vektorer i talrummene $\mathbb{R}^n$.

Definition En afbildning T kaldes **lineær** hvis den opfylder de to krav

- 1) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ i definitionsområdet for T
- 2) $T(c \cdot \mathbf{u}) = c \cdot T(\mathbf{u})$ for alle tal c og for alle $\mathbf{u}$ i definitionsområdet for T

Øvelse 4.4

Vis, at for enhver lineær afbildning T gælder: $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Øvelse 4.5

Lad $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ - hvor $\mathbf{0}$ er nulvektoren i talrummet $\mathbb{R}^n$

Vis, at en *affin* afbildning $f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$ ikke er lineær.

Vink: Vis f.eks. at $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \neq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$

Øvelse 4.6

Vis, at for en lineær afbildning T gælder der for alle vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ og for alle tal c og d :

$$T(c \cdot \mathbf{u} + d \cdot \mathbf{v}) = c \cdot T(\mathbf{u}) + d \cdot T(\mathbf{v})$$

Argumentér for, at dette kan generaliseres til:

$$T(c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + c_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \cdot \mathbf{v}_k) = c_1 \cdot T(\mathbf{v}_1) + c_2 \cdot T(\mathbf{v}_2) + \dots + c_k \cdot T(\mathbf{v}_k)$$

Øvelse 4.7

Vis, at enhver matrixafbildning $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$ er en lineær afbildning

Vink: Brug regnereglerne for matrix-vektorprodukter fra opgaven ovenover.

4.2.1 Matricen hørende til en lineær afbildning

I øvelse 4.7 så vi, at alle matrixafbildninger er lineære afbildninger. Vi skal nu se, at det omvendte faktisk også gælder: Hvis man har en lineær afbildning T , så findes der altid en matrix A , så der gælder $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$. Denne matrix kaldes standardmatricen for den lineære afbildning, og den findes ved hjælp af:

Sætning om den specielle søjleregul

Hvis T er en lineær afbildning fra talrummet $\mathbb{R}^n$ til talrummet $\mathbb{R}^m$, så findes der en entydigt bestemt $m \times n$ matrix A så

$$T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x} \text{ for alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Matricen A kan findes ved den specielle søjleregul:

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \ T(\mathbf{e}_2) \ \dots \ T(\mathbf{e}_n)]$$

Her er $\mathbf{e}_i$ vektorerne (søjlerne) i $n \times n$ enhedsmatricen I_n . Man finder altså matricen A bare ved at sætte alle standardbasisvektorerne $\mathbf{e}_i$ ind i den lineære afbildning T , aflæse resultaterne $T(\mathbf{e}_i)$ og så bruge dem som søjler i matricen A .

Bevis

Enhver vektor $\mathbf{x}$ med n koordinater kan skrives $\mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \cdot \mathbf{e}_n$

Tager vi T på begge sider og benytter, at T er lineær finder vi:

$$T(\mathbf{x}) = T(x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \cdot \mathbf{e}_n) = x_1 \cdot T(\mathbf{e}_1) + x_2 \cdot T(\mathbf{e}_2) + \dots + x_n \cdot T(\mathbf{e}_n)$$

Kigger vi nu på resultatet til højre kan vi omskrive dette ved at bruge definitionen på matrix-vektor multiplikation:

$$x_1 \cdot T(\mathbf{e}_1) + x_2 \cdot T(\mathbf{e}_2) + \dots + x_n \cdot T(\mathbf{e}_n) = [T(\mathbf{e}_1) \ T(\mathbf{e}_2) \ \dots \ T(\mathbf{e}_n)] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Men dette udtryk er jo netop matrix A fra sætningen ganget med vektor $\mathbf{x}$ og vi har derfor

$$T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x} \text{ med } A = [T(\mathbf{e}_1) \ T(\mathbf{e}_2) \ \dots \ T(\mathbf{e}_n)]$$

Matricen A for en lineær afbildning kan altså opskrives, når vi ved, hvad den gør med basisenhedsvektorerne: Disse skrives simpelthen op som søjlerne i en matrix.

4.2.2. Eksempler på anvendelse af den specielle søjleregul

Vi antager at afbildningerne i de følgende øvelser er lineære (det kan man bevise at de er!) og øver os i at bruge **den specielle søjleregul** til at finde matricen for afbildningerne.

Øvelse 4.8 Rotationer i 2D

- a) Find matricen for den lineære afbildning der roterer alle punkter i $\mathbb{R}^2$ 30 grader i positiv omløbsretning
- b) Find matricen for den matrix der roterer alle alle punkter i $\mathbb{R}^2$ ν grader i positiv omløbsretning

Øvelse 4.9 Spejlinger i 2D

- a) Find matricen for den lineære afbildning der spejler alle punkter i $\mathbb{R}^2$ i linjen $y = x$
- b) Find matricen for den lineære afbildning der spejler alle punkter i $\mathbb{R}^2$ i linjen $y = a \cdot x$ hvor a er et vilkårligt tal

Øvelse 4.10 Projektioner i 2D

- a) Vis, at projektionen af punkter (stedvektorer) på en fast vektor er en lineær afbildning
- b) Find matricen for den lineære afbildning der projicerer alle punkter i $\mathbb{R}^2$ på vektoren $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Øvelse 4.11 Beregninger af afbildningen af en bestemt vektor

Lad $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ være de sædvanlige basisvektorer og lad $\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Lad T være den lineære afbildning der sender $\mathbf{e}_1$ over i $\mathbf{y}_1$ og $\mathbf{e}_2$ over i $\mathbf{y}_2$

- a) Bestem $T\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$
- b) Bestem $T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$

Det kan godt være svært at forestille sig, hvad en lineær afbildning "gør" ved vektorer og/eller mængder, der sættes ind i den. For at gøre det lidt mere synligt kan man lade den lineære afbildning virke på alle punkter i et geometrisk objekt som f.eks. et rektangel, en linje eller en cirkel. De følgende øvelser forsøger at illustrere lineære afbildninger på denne måde.

Øvelse 4.12

- a) Argumentér for, at linjestykket I mellem punkterne A og B kan beskrives ved parameterfremstillingen

$$I: p(t) = (1-t) \cdot \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{OB} \quad , \quad t \in [0;1]$$

Hint: Gang parentesen ud, roker rundt og anvend indskudssætningen.

- b) Vis, at hvis I er linjestykket mellem punkterne A og B og T er en lineær afbildning så vil $T(I)$ være linjestykket mellem punkterne $T(\overrightarrow{OA})$ og $T(\overrightarrow{OB})$. **Hint:** Brug parameterfremstillingen fra a).
- c) Forklar hvorfor parallelle linjestykker I_1 og I_2 vil give parallelle linjestykker $T(I_1)$ og $T(I_2)$

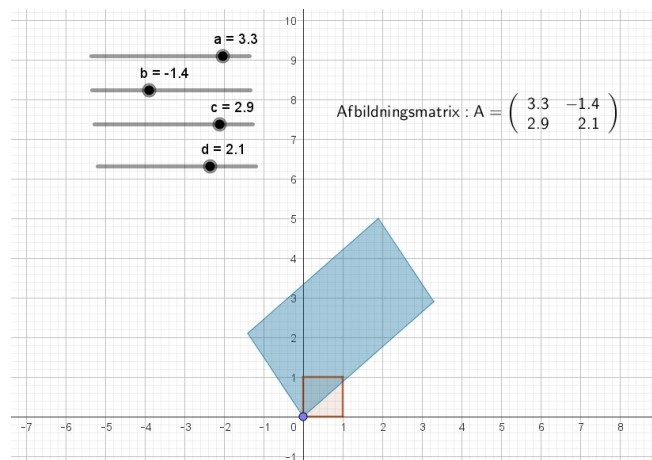
Øvelse 4.13 Afbildning af et rektangel

Lad F være et rektangel i $\mathbb{R}^2$

- a) Diskutér ved at anvende den specielle søjleregel hvilke muligheder der vil være for udseendet af $T(F)$

I Geogebrafilen "lineære afbildninger af enhedskvadratet.ggb", der kan hentes her:

<https://www.geogebra.org/m/d3mejsys> eller direkte **her- link til 4-1**, kan du justere på tallene i en 2x2 matrix og se billedet af enhedskvadratet under afbildningen $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$



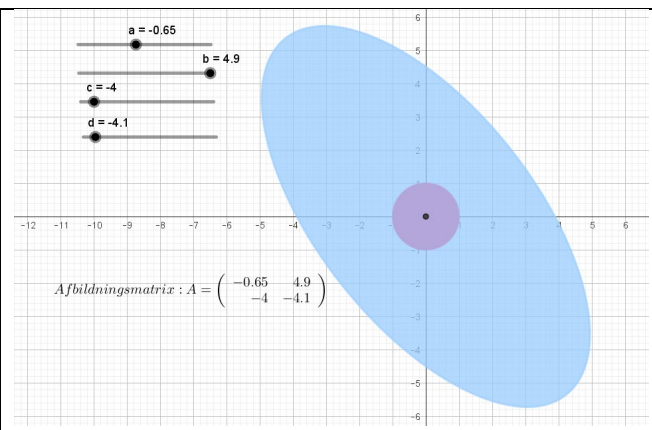
- b) Undersøg om dine konklusioner fra a) passer på denne situation

Øvelse 4.14 Afbildning af en cirkel

I Geogebrafilen "lineære afbildninger af enhedscirklen.ggb", der kan hentes her:

<https://www.geogebra.org/m/bv85a2vb> eller direkte **her- link til 4-2**, kan du justere på tallene i en 2x2 matrix og se hvordan det ændrer billedet af enhedscirklen under afbildningen:

- a) Hvilken figur bliver billedet af enhedscirklen generelt?
- b) Kan du få billedet (det blå område) af enhedscirklen til igen at blive en cirkel?
- c) Hvad må man kræve om tallene a, b, c og d i matrix A ?
- d) Prøv at lade $a = d = 0,5$ og $b = c = 0$. Hvad bliver billedet af enhedscirklen nu?



Øvelse 4.15 Afbildning af trekanter

I Geogebrafilen "lineære afbildninger af trekanter.ggb", der kan hentes her:

<https://www.geogebra.org/m/gwhfcena>, eller direkte [her](#)- link til 4-3, kan du justere

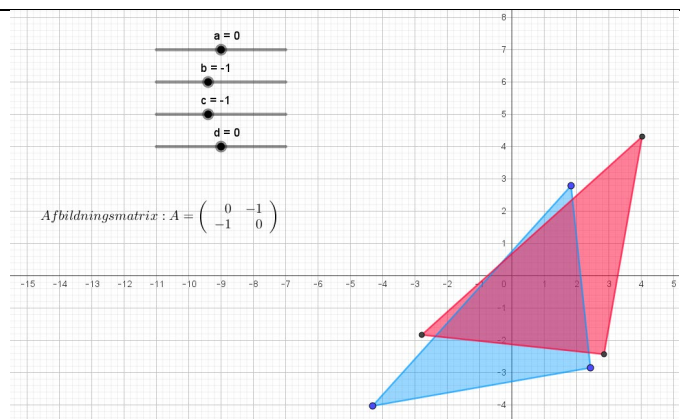
tallene i en 2×2 matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ og se, hvordan det ændrer billedet af selvvalgte trekanter

under afbildningen. Du vælger hvordan inputtet (den blå trekant) skal se ud bare ved at trække i hjørnerne af den, og som sædvanligt kan du selv justere matrix A 's elementer med skyderne. Outputtet – altså *billedet* af den blå trekant – er den røde trekant:

- a) Kan du få den blå og den røde trekant til at have et fælles hjørne?
- b) Prøv at tække en af den blå trekants hjørner hen i punktet $(0,0)$ - hvad sker der? Sker det samme hvis du vælger et af de andre hjørner?

Vælg nu en tilfældig blå trekant og *hold den fast*.

- c) Kan du justere på matrix A 's tal så den røde trekant bliver et spejlbillede af den blå?



4.3 Inverse matricer og inverse afbildninger

Givet en afbildning f . Hvis der findes en afbildning g , der så at sige ophæver virkningen af f , kaldes denne for den inverse afbildning til f . Med "ophæve" mener vi:

- Hvis $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, så er $g(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$. Er det tilfældet, er $f(g(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$ og $g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$

Hvis en sådan afbildning g findes, kan vi se, at f og g indgår helt symmetrisk, så vi siger også, at *de er hinandens inverse*. En afbildning, der har en invers, kaldes *invertibel*.

Øvelse 4.16

- Begrund at enhver rotation om origo er en invertibel afbildning. Hvad er den inverse afbildning til en given rotation med v grader?
- Begrund at spejling i en vilkårlig linje gennem origo er en invertibel afbildning. Hvad er den inverse afbildning til en given spejling?
- Begrund at projektion på en vilkårlig ret linje gennem origo **ikke** er en invertibel afbildning. (**Hint**: overvej hvilke(n) vektor(er) der projiceres ned på ét bestemt punkt på linjen)

En lineær afbildning $f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$ er invertibel, præcis når matricen A hørende til f er invertibel, hvilket er tilfældet, når der findes en *invers* matrix A^{-1} således at

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Ved hjælp af A^{-1} kan man nemlig let "ophæve" virkningen af f , således:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ giver: } A^{-1} \cdot A \cdot \mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{y} \Leftrightarrow I_n \cdot \mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{y}$$

Med andre ord kan afbildningen $f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$ inverteres således

$$f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{y}$$

Dvs den inverse afbildning til f er den afbildning, der er repræsenteret ved den inverse matrix A^{-1} :

$$f^{-1}(\mathbf{y}) = A^{-1} \cdot \mathbf{y}$$

Der gælder altså specielt, at den inverse afbildning også er lineær idet den er en matrix-afbildning repræsenteret ved den inverse matrix A^{-1} .

For 2x2-matricer viser det sig, at der findes en simpel opskrift på den inverse matrix, når den findes:

Sætning: Formel for den inverse til en 2x2 matrix

For en 2x2 matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gælder, at hvis tallet (determinanten) $\det A = ad - cb$ er forskellig fra 0, så er A invertibel og den inverse matrix A^{-1} er givet ved formelen

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \det A = ad - cb \neq 0$$

Øvelse 4.17 Bevis sætningen

Vis ved direkte beregning, at for A og A^{-1} som beskrevet i sætningen gælder der $A \cdot A^{-1} = I_n$ og $A^{-1} \cdot A = I_n$

Øvelse 4.18

Givet matricen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ og vektoren $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Vis, at A er invertibel og bestem den inverse matrix A^{-1}
- Løs ligningen $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$ ved brug af den inverse matrix A^{-1}

Øvelse 4.19 Rotationsmatricer og deres inverse

Matricen for en drejning på v grader om Origo er givet ved $R_v = \begin{pmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{pmatrix}$

- Beregn determinanten $\det R_v$ og forklar hvorfor rotationsafbildninger generelt er invertible.
- Nedskriv direkte, *uden at regne*, den inverse matrix R_v^{-1}
- Beregn den inverse R_v^{-1} ved at bruge sætningen ovenfor
- Sammenlign de to udgaver af R_v^{-1} . Hvad gælder åbenbart om $\cos(-v)$? og hvad gælder der om $\sin(-v)$?

Man kan beskrive en rotation med den dobbelte vinkel $2v$ på to forskellige måder, nemlig én rotation med vinklen $2v$ eller 2 rotationer med vinklen v . Der gælder altså

$$R_{2v} = R_v \cdot R_v$$

- Nedskriv matricen R_{2v} og beregn produktet $R_v \cdot R_v$
- Brug de to resultater fra e) til at udlede følgende formler for sinus og cosinus til dobbelte vinkler:

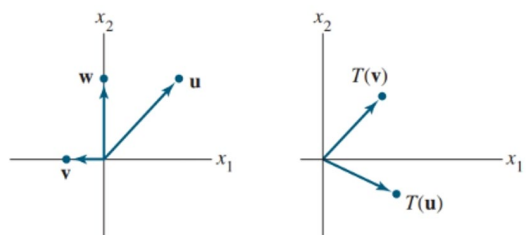
$$\sin(2v) = 2 \sin(v) \cos(v) \quad , \quad \cos(2v) = \cos^2(v) - \sin^2(v)$$

Øvelse 4.20 En lineær afbildning fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^6$

$T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$ er en lineær afbildning fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^6$. Hvor mange rækker og søjler har A ?

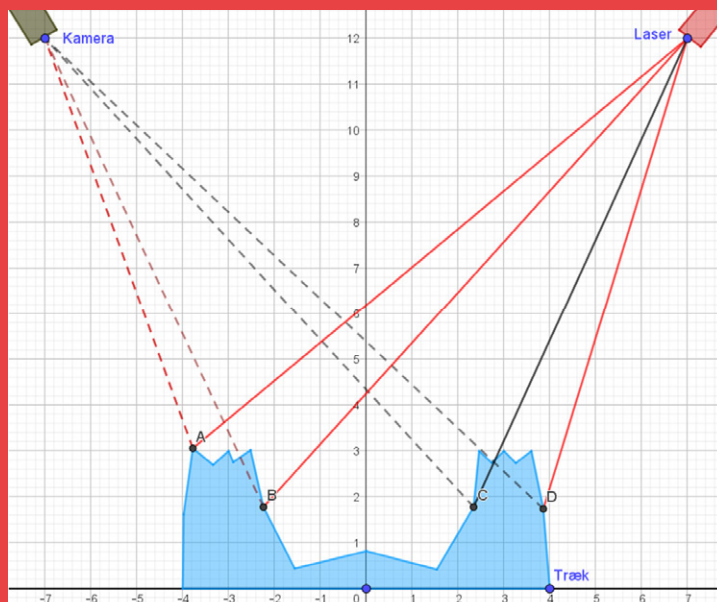
Øvelse 4.21 Bestem billedet ved en lineær afbildning geometrisk

Tegningen viser tre vektorer, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$, samt billederne af $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ ved en lineær afbildning T . Redegør for, hvordan du *geometrisk* kan konstruere billedet af $\mathbf{w}$. Demonstrer din løsning ved at kopiere figuren og konstruere $T(\mathbf{w})$ i koordinatsystemet til højre. (Hint: Skriv først $\mathbf{w}$ på formen $\mathbf{w} = s \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{v}$)



5.

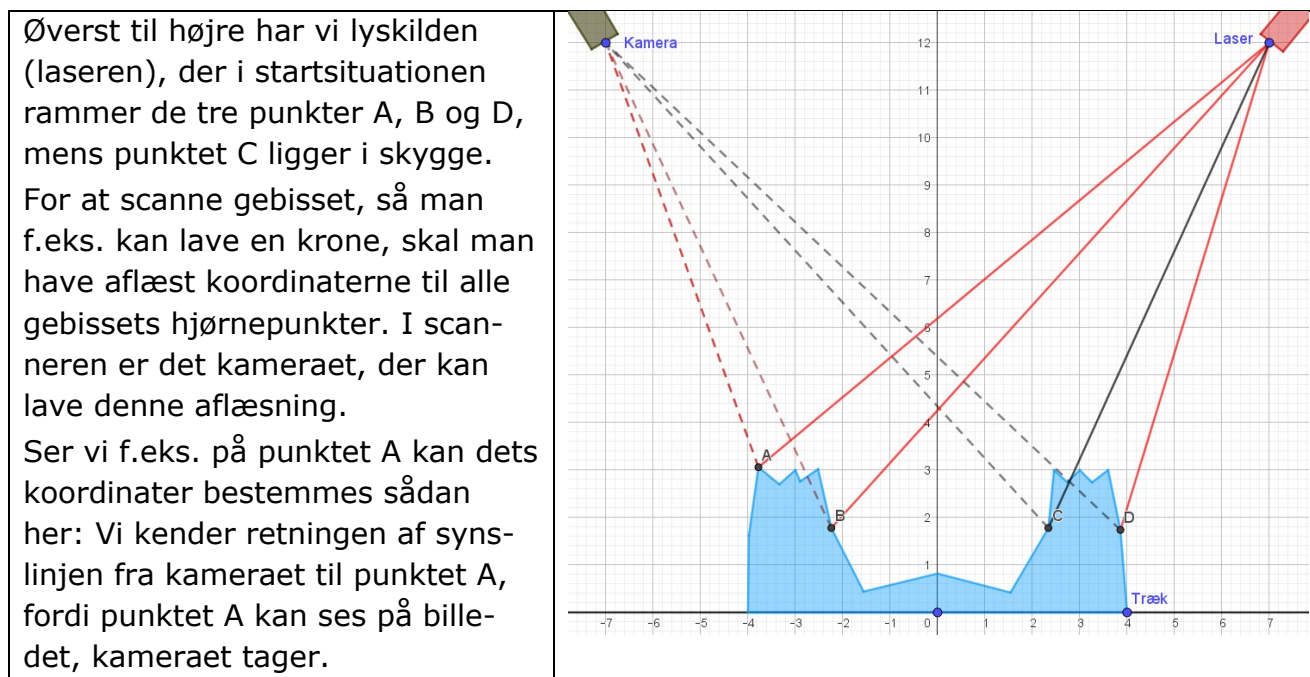
Rotationer i 2D



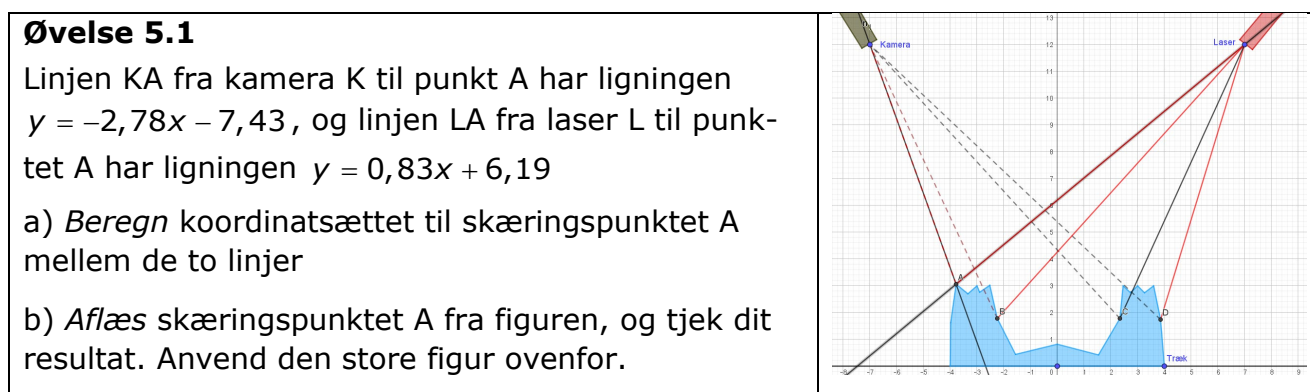
I filmen demonstrerer Isak, hvordan labscanneren frembringer et billede af et tandsæt. Det første trin er at kunne bestemme et enkelt punkt af billedet. Det er behandlet i kapitel 1. Den procedure kan udstrækkes til at bestemme mange punkter – men når vi skal have hele billedet, er man nødt til i næste trin at vende og dreje og rotere emnet, for at kunne på belyst alle steder. Det svarer jo til, at emnet er holdt fast og kamera og laserpointer bevæger sig rundt. Når så de enkelte subscans skal stykkes sammen til ét billede, skal vi have flyttet disse, så det hele kommer til at ligge i det samme koordinatsystem. Sådanne flytninger af billeder sker matematisk med brug af såkaldte lineære afbildninger. I dette kapitel koncentrerer vi os om 2D. I næste er fokus 3D.

5.1 Rotationer i 2D (B-niveau)

I geogebrafilen "roteret gebis med kamera", der kan hentes [her- link til 5-1](https://www.geogebra.org/m/ncex5fn3) eller direkte her <https://www.geogebra.org/m/ncex5fn3> ses en model af et gebis, der er placeret i den stationære scanner:



Vi kender også et fast punkt på linjen fra A til kameraet – nemlig kamerapunktet. Linjen fra kamera til A er altså fastlagt. På samme måde kender vi retningen, som laseren sender lys ud i, og vi kender det punkt, hvor laseren sidder, så linjen fra laser til A er også fastlagt. Nu er det en forholdsvis simpel sag – for softwaren – at beregne koordinater til skæringspunktet mellem de to linjer og dermed koordinaterne til punktet A.



Øvelse 5.2

Vi har nu scannet ét punkt fra gebisset, og dette var muligt, fordi punktet var belyst af laseren, og kameraet kunne se det.

- a) Hvad er problemet ved scanning af punkterne B, C og D?

5.1.1 Rotation af gebisset

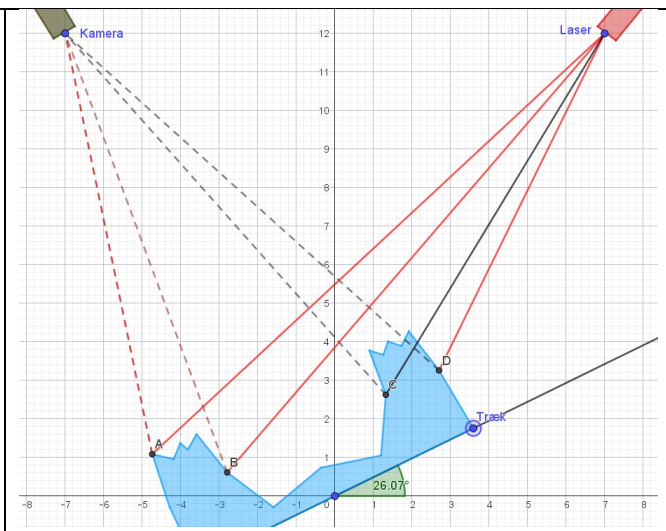
Vi kan løse problemet med manglende belysning og usynlighed for kameraet ved at rotere gebisset:

Drejer vi f.eks. gebisset ca. 26 grader – gør det selv i geogebra-filen – bliver punktet B både oplyst af laseren og er samtidig synligt for kameraet, se figuren:

Der er dog stadig problemer med at scanne C og D.

Øvelse 5.3 Roter, så vi "ser" C og D

Undersøg ved at rotere gebisset yderligere, hvad rotationsvinklen kan være, for at punkterne C og D kan scannes.



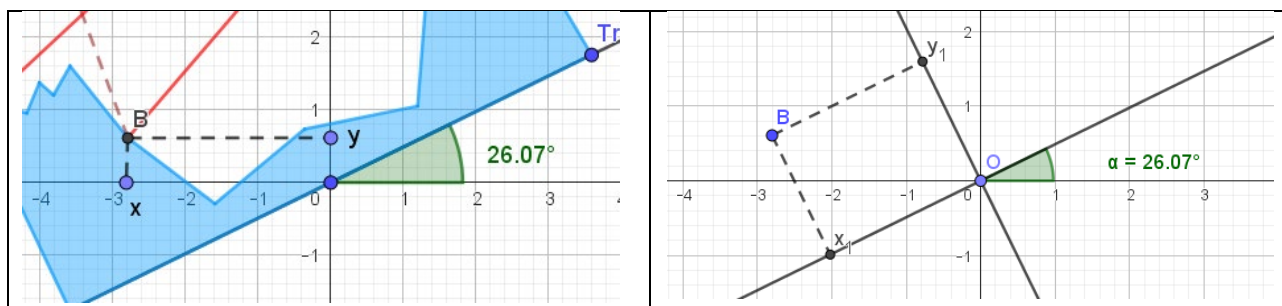
Selvom det lykkedes at scanne B ved at rotere 26 grader, er der dog et problem med de koordinater, vi beregner:

Øvelse 5.4

- Aflæs koordinaterne til punktet B i den første figur af gebisset – dér hvor det *ikke* er roteret.
- Aflæs nu koordinaterne til punktet B i figuren herover, hvor gebisset er roteret 26,07 grader
- Sammenlign de to resultater og overvej: Hvad er problemet? Hvilket koordinatsæt er det vi gerne vil kende?

Problemet er altså følgende:

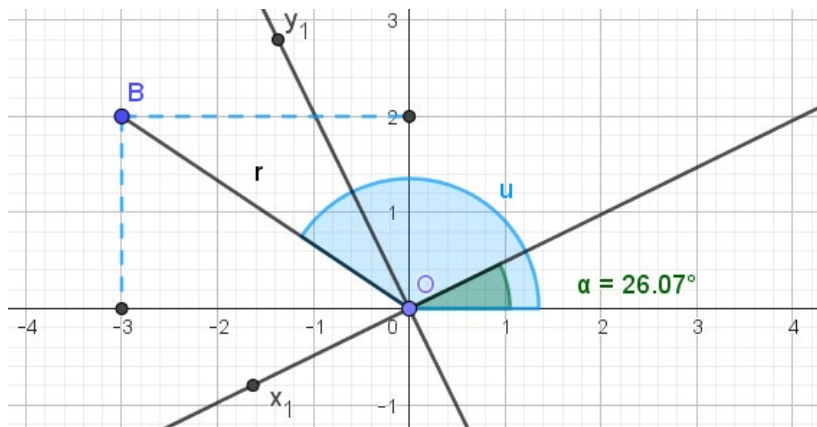
Vi *kan* finde koordinaterne (x, y) til punktet B i *det oprindelige koordinatsystem*, efter vi har roteret gebisset, men vi ønsker at finde koordinaterne (x_1, y_1) til B i et koordinatsystem, der *er roteret sammen med gebisset*. Altså i et koordinatsystem, der er orienteret på samme måde i forhold til gebisset, som det var, da vi bestemte koordinaterne til punktet A:



Koordinaterne til punktet B ændrer sig altså efterhånden som vi roterer gebisset, men vi ønsker at finde dem, som om koordinatsystemet ikke var roteret!

5.1.2 Procedure: Koordinater for et punkt i det roterede koordinatsystem

Heldigvis ændrer afstande og vinkler i gebisset sig ikke, når vi roterer! Lad os prøve at se på et lidt simplere eksempel hvor vi har redigeret punktet B, så det har lidt pænere koordinater i det oprindelige koordinatsystem:



Vi kan let beregne afstanden $|OB| = r$ i det oprindelige xy -koordinatsystem og denne afstand er den samme i x_1y_1 -koordinatsystemet:

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

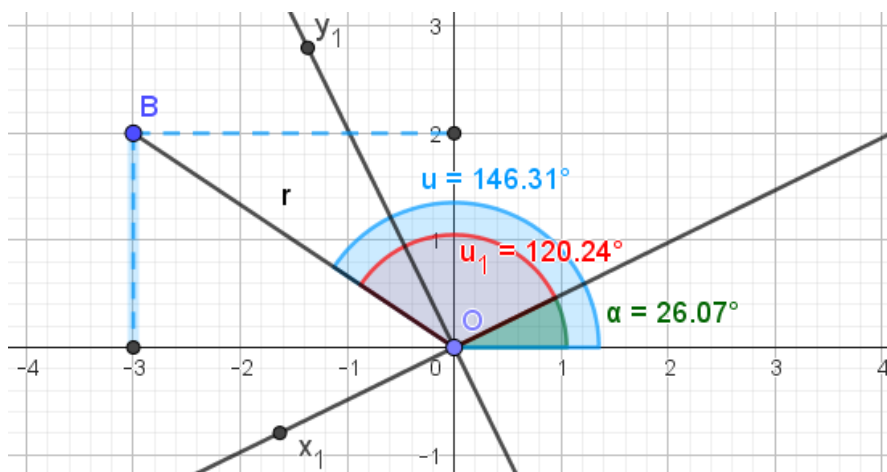
Vinklen mellem x -aksen og retningen OB kalder vi u , og den opfylder ligningerne

$$x = r \cdot \cos(u) \quad \text{og} \quad y = r \cdot \sin(u)$$

Disse ligninger kan vi bruge til at bestemme vinklen u med. F.eks. har vi:

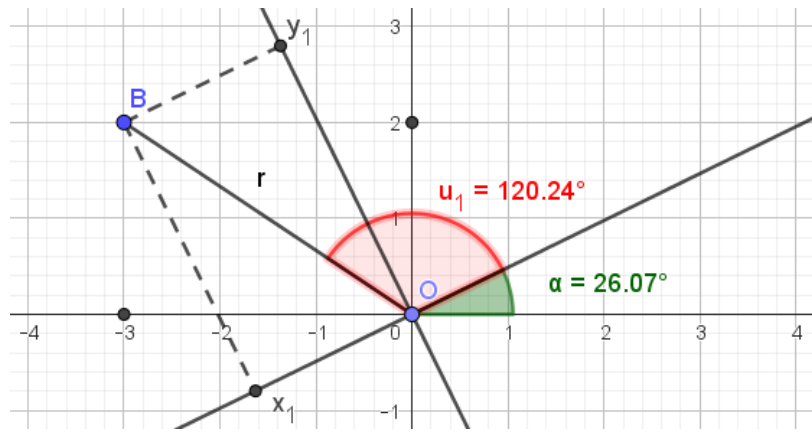
$$-3 = \sqrt{13} \cdot \cos(u) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(u) = \frac{-3}{\sqrt{13}} \quad \text{dvs.} \quad u = \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{13}}\right) \approx 146,31^\circ$$

Nu kan vinklen u_1 mellem x_1 -aksen og retningen til punkt B findes som $u_1 = u - \alpha$ se figuren:



Og koordinaterne til punktet B i det roterede x_1y_1 -koordinatsystem kan bestemmes ved:

$$x_1 = r \cdot \cos(u_1) \quad \text{og} \quad y_1 = r \cdot \sin(u_1)$$



Vi finder i dette tilfælde:

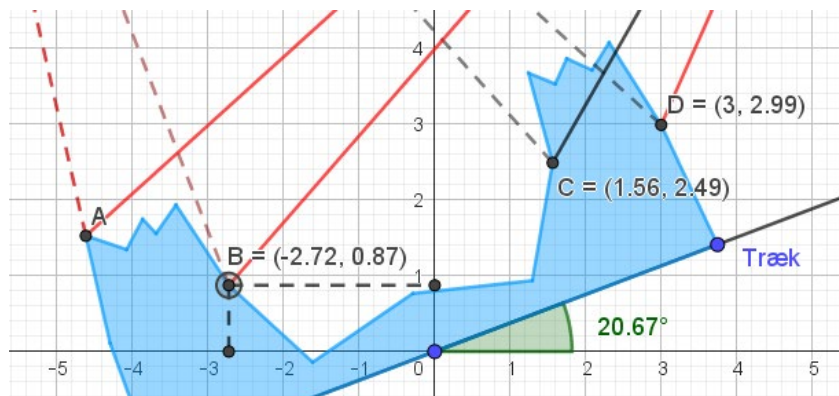
$$x_1 = \sqrt{13} \cdot \cos(120,24) \approx -1,82 \quad \text{og} \quad y_1 = \sqrt{13} \cdot \sin(120,24) \approx 3,11$$

Så punktet B(-3,2) har altså koordinater $B_1(-1.82, 3.11)$ i det roterede koordinatsystem.

I de følgende øvelser arbejder vi med geogebrafilen "roteret gebis med kamera version aflæsning.ggb, der kan hentes direkte her: " <https://www.geogebra.org/m/nvyvnhdn>, eller fra website [her- link til 5-2](#)

Øvelse 5.5

På billedet her har vi drejet gebisset så meget, at det rigtige punkt B både er belyst og kan ses af kameraet:



a) Beregn koordinaterne til det rigtige B-punkt i det roterede koordinatsystem

Roter nu koordinatsystemet via Træk-punktet så punktet C bliver belyst og kan ses af kameraet.

b) Aflæs rotationsvinkel og C's koordinater og beregn C's koordinater i det roterede koordinatsystem

c) Bestem på samme måde, punktet D's koordinater i det roterede koordinatsystem

d) Overvej hvordan du kan tjekke dine resultater ved at kigge på den allerførste figur af det blå gebis

5.2 Rotationer i 2D (A-niveau)

Det viser sig, at beregningen af koordinaterne i det roterede koordinatsystem kan foretages let og elegant, hvis man udnytter, at rotationer om Origo er en lineær afbildning. Vi kan nemlig beregne koordinaterne til de scannede punkter i det roterede koordinatsystem som en matrix gange en stedvektor.

5.2.1 Koordinatsystemer og koordinatskifte matrix

Vi starter med et par definitioner:

Definition: Basis for vektorerne i $\mathbb{R}^n$

Ved en basis $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ for $\mathbb{R}^n$ forstås et sæt af vektorer der *entydigt* kan beskrive enhver vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{b}_1 + x_2 \cdot \mathbf{b}_2 + \dots + x_n \cdot \mathbf{b}_n \quad (1)$$

Tallene $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ er entydigt bestemt og kaldes *koordinaterne for vektoren $\mathbf{x}$* mht. basen B .

Definition: Standardbasis E

Ved standardbasis $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ i $\mathbb{R}^n$ forstås vi søjlerne $\mathbf{e}_i$ i $n \times n$ enhedsmatricen I_n , der er karakteriseret ved, at de har et 1-tal som koordinat nr. i mens alle andre koordinater er 0.

Når en vektor $\mathbf{x}$ er beskrevet i standardbasis, skriver vi ofte: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, som er en kort

form for udtrykket: $\mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \cdot \mathbf{e}_n$

Når vores vektor $\mathbf{x}$ beskrives i en ny basis B som i (1) har vi sammenhængen:

$$\mathbf{x}_{\text{standard}} = x_1^{ny} \cdot \mathbf{b}_1 + x_2^{ny} \cdot \mathbf{b}_2 + \dots + x_n^{ny} \cdot \mathbf{b}_n$$

Fra vores definition af vektor-matrix-produkt kan vi skrive dette i kompakt form som:

$$\mathbf{x}_{\text{standard}} = [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_n] \cdot \mathbf{x}_{ny} = \underset{E \leftarrow B}{P} \cdot \mathbf{x}_{ny} \quad (2)$$

hvor *koordinatskiftematricen* $\underset{E \leftarrow B}{P} = [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_n]$ har de nye basisvektorer fra basen B som søjler og den omdanner altså koordinater for vektoren $\mathbf{x}$ i den nye basis til koordinater for $\mathbf{x}$ i standardbasen ved forskriften (2).

Øvelse 5.6

Begrund, at koordinatskifteoperationen er en lineær afbildning.

I vores situation scanner vi koordinaterne $\mathbf{x}_{\text{standard}}$ til gebis-punkter i standardbasen og ønsker at omdanne dem til nye koordinater i det roterede koordinatsystem. Vi har

derfor brug for, at skifte basis fra standard til en roteret basis og vi kan indskrænke os til at gøre det i 2 (evt. 3) dimensioner:

$$\mathbf{x}_{\text{standard}} = [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2] \cdot \mathbf{x}_{\text{rot}} = \underset{E \leftarrow B_{\text{rot}}}{P} \cdot \mathbf{x}_{\text{rot}} \quad (3)$$

Dette klares let – da rotationsmatricen $\underset{E \leftarrow B_{\text{rot}}}{P} = [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2]$ er invertibel – ved at multiplicere med dens inverse på begge sider i (3):

$$\underset{E \leftarrow B_{\text{rot}}}{P}^{-1} \cdot \mathbf{x}_{\text{standard}} = \underset{E \leftarrow B_{\text{rot}}}{P}^{-1} \cdot \underset{E \leftarrow B_{\text{rot}}}{P} \cdot \mathbf{x}_{\text{rot}} = I_n \cdot \mathbf{x}_{\text{rot}} = \mathbf{x}_{\text{rot}}$$

så koordinaterne til scanningspunkterne i den roterede basis kan altså beregnes ved forskriften:

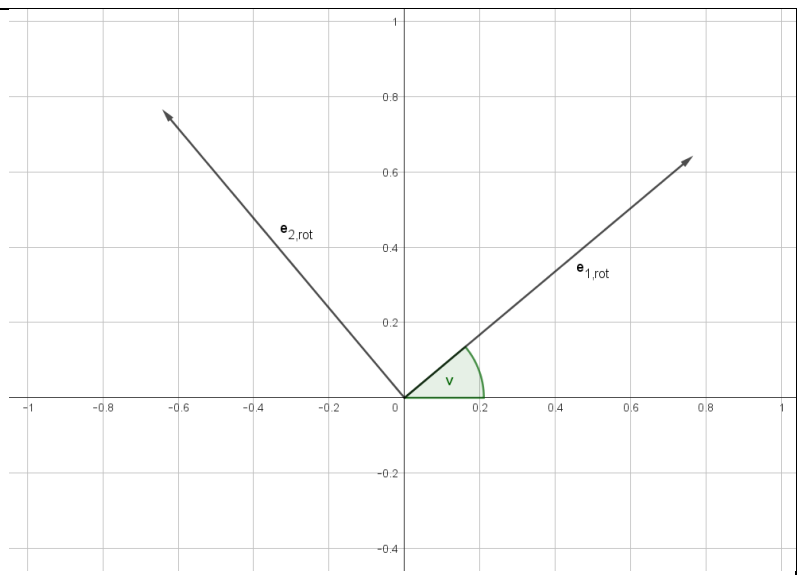
$$\mathbf{x}_{\text{rot}} = \underset{E \leftarrow B_{\text{rot}}}{P}^{-1} \cdot \mathbf{x}_{\text{standard}} \quad (4)$$

Øvelse 5.7

Brug den specielle søjleregul til at vise, at søjlerne i koordinat-skiftematrixen er givet ved

$$\underset{E \leftarrow B_{\text{rot}}}{P} = [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2] = \begin{pmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Hint: Aflæs koordinaterne for de roterede basisvektorer i standardbasen:



Øvelse 5.8

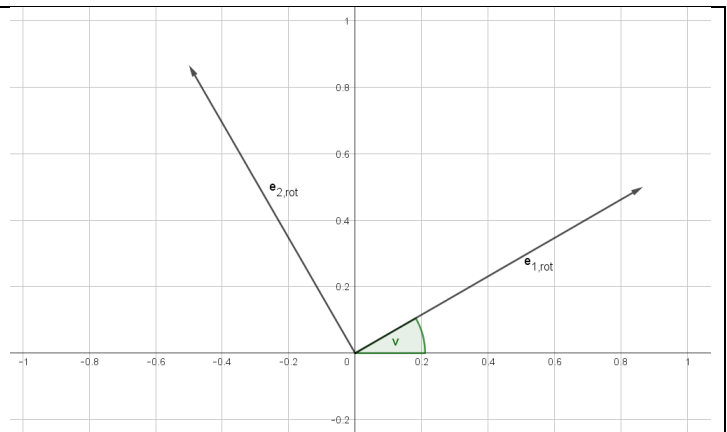
Antag, at rotationsvinklen er $v = 30^\circ$

a) Bestem de eksakte koordinater:

$$\underset{E \leftarrow B_{\text{rot}}}{P} = [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2] = \begin{pmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{pmatrix}$$

b) Et punkt Q har koordinaterne $(2,1)$ i det roterede koordinatsystem. Bestem koordinaterne til Q i standardkoordinatsystemet

c) Et punkt S har koordinaterne $(1,1)$ i standardkoordinatsystemet.



Brug (4) til at bestemme koordinaterne til punktet S i det roterede koordinatsystem.

Nu tilbage til scanningen af gebisset i standardbasen, men denne gang med matrixberegninger.

Øvelse 5.9

Åben geogebrafilen "roteret gebis med kamera version aflæsning.ggb" som du hentede ovenfor, og roter koordinatsystemet, så punktet B både er belyst af laseren og synligt for kameraet

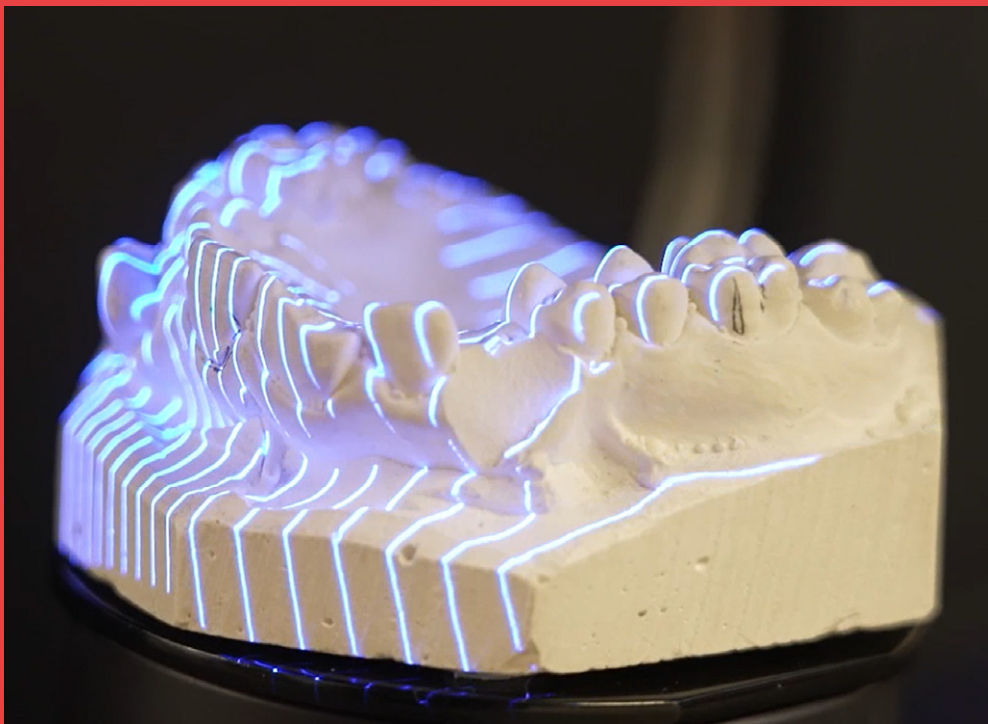
- a) Notér vinklen og standardkoordinaterne ned (som du har scannet) og beregn koordinaterne til punktet B i det roterede koordinatsystem vha. koordinatskiftematricen (5) og ligningen (4)

Roter nu koordinatsystemet via Træk-punktet, så punktet C er belyst og kan ses af kameraet.

- b) Aflæs (scan) rotationsvinkel og C's koordinater og beregn C's koordinater i det roterede koordinatsystem vha. koordinatskiftematricen (5) og ligningen (4)
- c) Bestem, på samme måde, punktet D's koordinater i det roterede koordinatsystem vha. koordinatskiftematricen (5) og ligningen (4)

6.

Flytninger og rotationer i 3D



Rotationer i 2D er kommutative: Drejer vi først u grader om koordinatsystemets centrum, og dernæst v grader (regnet med fortegn), svarer det til én drejning på $u + v$ grader. Så i modsat rækkefølge ville vi få $v + u$ grader, der er det samme fordi addition af tal er kommutativ. Det gælder ikke i 3D. Så selv om flytninger i 3D principielt beskrives på samme måde vha matricer, så er det lidt mere kompliceret. Men labscannerens rotation af koordinatsystemerne er naturligvis registreret, så man i processen med sammenstykning af billederne kan "køre filmen baglæns".

6. Flytninger og rotationer i 3D

I den virkelige verden foregår scanningen både for den stationære scanner og for trios-scanneren i 3 dimensioner. Vi skal derfor her generalisere beskrivelsen af flytninger og rotationer til 3D. Vores udgangspunkt er stadig den affine afbildning

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

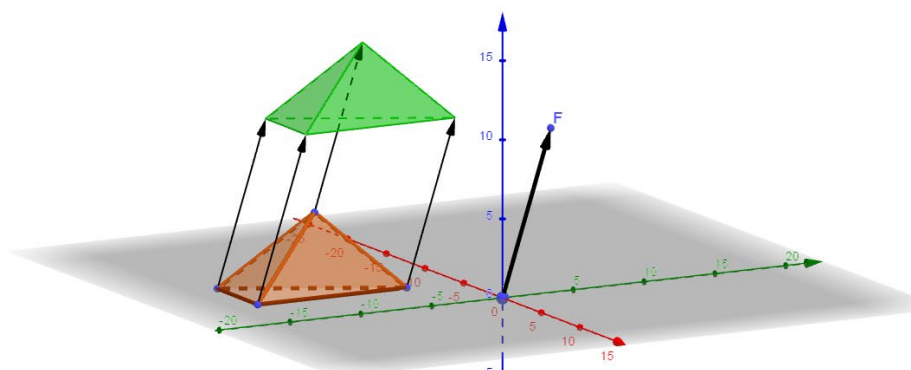
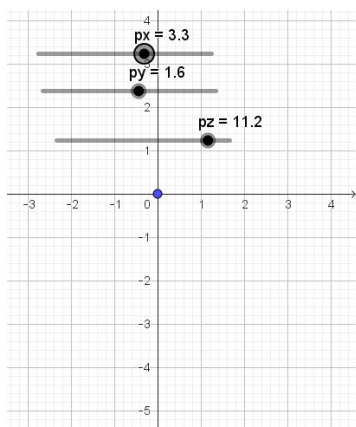
-hvor matricen A beskriver en rotation (uden deformation) af vores vektor $\mathbf{x}$ efterfulgt af en parallelforskydning beskrevet ved vektoren $\mathbf{b}$.

Formelt set er udgangspunktet det samme, men som vi skal se i de følgende afsnit bliver situationen alligevel mere kompleks i 3 dimensioner.

6.1 Parallelforskydning i 3D

En parallelforskydning af et objekt i 3D svarer – som i 2D – til at lægge en konstant vektor $\mathbf{b}$ til alle stedvektorer i objektet. Dvs. objektet flyttes uden nogen form for rotation så objektets orientering i rummet er den samme før og efter flytningen, se figuren.

Øvelse 6.1



I geogebrafilen, du finder her: <https://www.geogebra.org/m/rjc4etby>, eller kan hente direkte [her - link til 6-1](#) og som har navnet "Flytning Pyramide 3D Vektor.ggb" kan du eksperimentere med parallelforskydning af pyramiden vist på figuren. Du kan selv justere på den oprindelige pyramide (brun) og vælge parallelforskydningsvektoren ved at trække direkte i punktet F eller bruge skyderne.

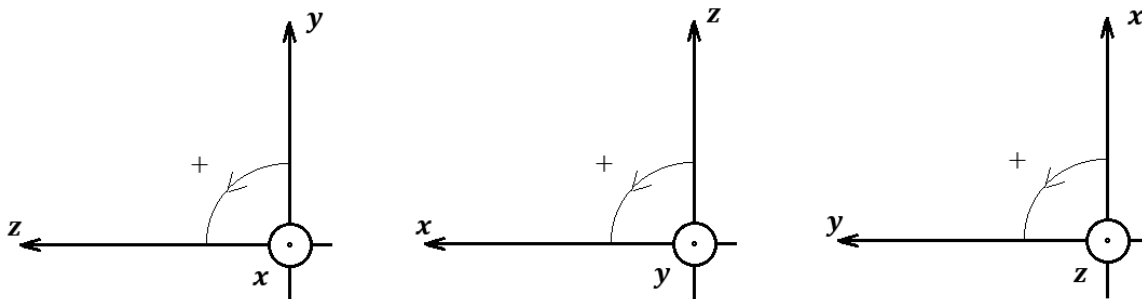
- Vælg forskellige former af pyramiden og parallelforskydningsvektoren OF og overbevis dig selv om, ved at kigge på figuren fra forskellige synsvinkler, at pyramidens orientering og form er uforandret under parallelforskydninger.

6.2 Rotationer i 3D

Rotationer i 3D kan ligesom for rotationer i 2D beskrives ved hjælp af rotationsmatricer. En generel rotation i 3D kan beskrives som sammensat af tre rotationer – én om hver af de tre koordinat-akser.

Omløbsretning fastlægges efter samme princip i 3D som i 2D: Tegn en skitse af et 3D koordinatsystem. Brug din *højre* hånd, og lad tommelfingeren følge den akse, du vil dreje om, fx x-aksen. "Skub" nu med håndfladen den ene af de to resterende vektorer over i den anden ved at skubbe i den retning, hvor vinklen er 90° (og ikke 270°). Dvs ved drejning om x-aksen skubbes y-aksen op i z-aksen.

Så den *positive omløbsretning* er defineret i de tre tilfælde således:



Øvelse 6.2 Matricerne R_x , R_y og R_z hørende til hver af rotationerne

- a) Vis, ved brug af den specielle søjleregel, at rotationsmatricerne R_x , R_y og R_z er givet ved formlerne

$$R_x(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(v) & -\sin(v) \\ 0 & \sin(v) & \cos(v) \end{pmatrix}, \quad R_y(v) = \begin{pmatrix} \cos(v) & 0 & \sin(v) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(v) & 0 & \cos(v) \end{pmatrix}, \quad R_z(v) = \begin{pmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Hint: start med $R_z(v)$ og brug resultatet for 2D rotationsmatricen.

Øvelse 6.3 3D rotationer – geometrisk argumentation og beregning

- a) Beregn vha. formlerne (1) de eksakte rotationsmatricer for 90 graders rotation om akserne, dvs. med radianmål: $R_x\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $R_y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ og $R_z\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Vi kigger nu på forskellige rotationer af enhedsvektoren $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- b) Overvej uden at regne hvad $R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathbf{e}_1$ bør give, og tjek efter ved beregning

- c) Beregn $R_y\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathbf{e}_1$. Passer det med intuitionen?

- d) Beregn $R_z\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathbf{e}_1$. Passer det med intuitionen?

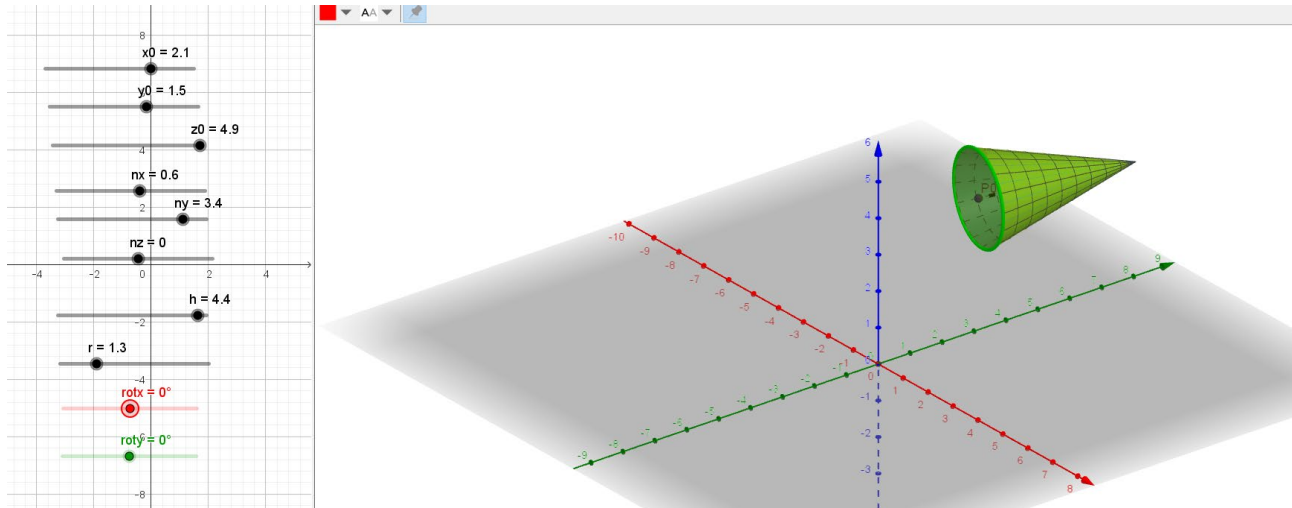
- e) Beregn nu $R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot R_y\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathbf{e}_1$ og $R_y\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathbf{e}_1$

- f) Hvorfor giver de to rotationer ikke det samme? Prøv at forestille dig det rumligt.

Dette er et generelt træk ved rotationer i 3D og helt modsat rotationer (om origo) i 2D: Hvis man sammensætter to forskellige rotationer R_A og R_B i 2D er rækkefølgen ligegyldig. Dvs. for alle vektorer $\mathbf{u}$ gælder $R_A \cdot R_B \cdot \mathbf{u} = R_B \cdot R_A \cdot \mathbf{u}$, men i 3D betyder rækkefølgen af rotationerne noget og man opnår et helt forskelligt resultat hvis man ombytter rækkefølgen:

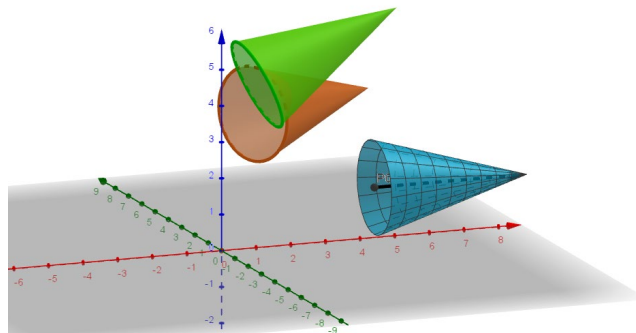
Øvelse 6.4 Rækkefølgen af rotation i 3D betyder noget!

I geogebrafilen "keglerotation og flytning.ggb", som du kan hente fra website [her – link til 6-2](https://www.geogebra.org/m/ptfpvx55), eller direkte her: <https://www.geogebra.org/m/ptfpvx55> ses en grøn kegle. Du kan vælge dens placering og form ved at bruge de sorte skydere:



- a) Undersøg hvordan hver af de sorte skydere ændrer på keglens udseende og placering

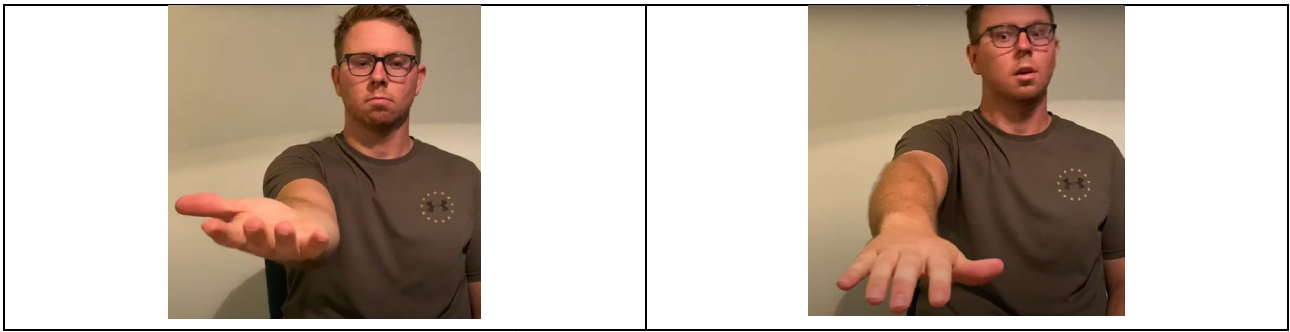
Den røde og den grønne skyder laver en rotation om henholdsvis x-aksen og y-aksen, men det der vises, når du trækker i skyderne, er *de to forskellige resultater* der opstår, når keglen roteres først om x-aksen og derefter om y-aksen (brun kegle) og når keglen roteres først om y-aksen og derefter om x-aksen (grøn kegle):



- b) Undersøg med rotationsskyderne om keglerne altid spalter op i to når der roteres i forskellig rækkefølge.

Øvelse 6.4 Udfordring: Flip hånden 180° uden at rotere håndleddet.

Er det muligt at flippe sin hånd 180 grader (se figurerne nedenfor) uden at rotere i håndleddet. Svaret er overraskende nok "ja!"

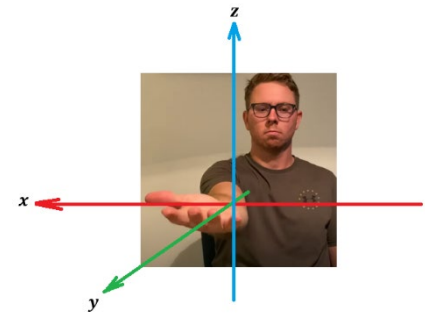


Man kan faktisk lave en rotation på 180 grader om underarmen ved at gentage en følge af 90 graders rotationer om andre akser end lige dén, man ikke må rotere om!

- a) Prøv selv at finde ud af hvilke 90 graders rotationer, der skal til for at generere en 180 graders rotation om underarmen (eller hvis du giver op, så gå ind på youtube linket her: <https://www.youtube.com/watch?v=UybDCB18izI> og se hvordan)

Hvis vi indlægger et 3D koordinatsystem med origo lige i albuen, kan vi beskrive tricket ved hjælp af rotationsmatricer.

- b) Se på youtube-klippet eller brug din egen løsning til at opskrive de 6 rotations matricer der skal til for at give $R_y(180^\circ)$
- c) Tjek ved at gange dine matricer sammen at løsningen passer



Øvelse 6.5

- a) Bestem en vektor $\mathbf{u}$ der opfylder $R_y(v)\mathbf{u} = \mathbf{u}$ for alle vinkler (vink: tænk på det geometrisk uden at regne)
- b) Hvor mange vektorer findes der som opfylder $R_y(v)\mathbf{u} = \mathbf{u}$ for alle vinkler?
- c) Generalisér resultatet til rotationer om x- og z-akserne

Øvelse 6.6

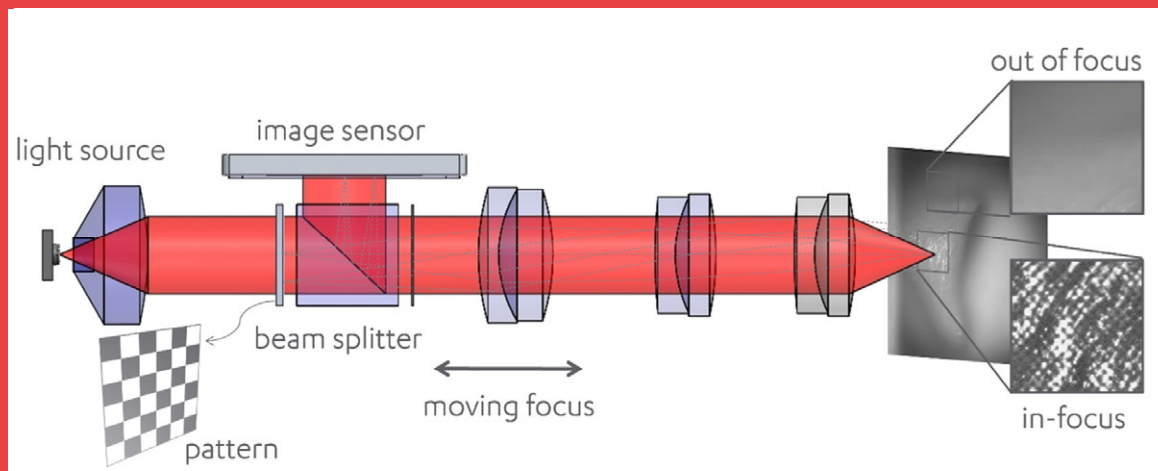
- a) Overvej uden at regne hvad de inverse rotationsmatricer $R_x^{-1}(v)$, $R_y^{-1}(v)$ og $R_z^{-1}(v)$ må være
- b) Vis – gerne med hjælp fra dit CAS-værktøj – at der gælder

$$R_x(v) \cdot R_x(-v) = R_y(v) \cdot R_y(-v) = R_z(v) \cdot R_z(-v) = I_3,$$

hvor I_3 er 3x3 enhedsmatricen.

7.

Optik og Trios fokusmetoden



Inde i den håndholdte trios scanner er der en masse optik, forskellige linser, konstrueret af forskelligt glas, noget er stationært, andet kan bevæge sig. De metoder Trios anvender er nært beslægtede med den autofokus funktion, som et kamera i en mobiltelefon anvender. I filmen forklarer Anders Gaarde, at den grundlæggende ide er, at man vender problemstillingen fra et traditionelt kamera om: Her indstiller man på afstanden, til objektet er i fokus, i trios bestemmes den bedste fokusværdi, og afstanden kan så aflæses. For bedre at forstå, hvordan billedannelsen sker i optiske linser, starter vi dér, med noget grundlæggende optik.

7. Optik og Trios fokusmetoden

3Shapes Trios scanner fremstiller et 3D billede af den del af tandsættet, man ønsker at behandle gennem to forskellige, og hver for sig ret komplicerede arbejdsgange. I den første arbejdsgang måles afstanden til "hvert enkelt" punkt på tænderne. Det sker ved en smart brug af metoder fra klassisk optik, og det er emnet for dette kapitel. Denne arbejdsgang resulterer i fremstilling af små subscans, der så i den næste arbejdsgang skal stykkes sammen, for at få et billede af fx hele tandsættet. Det sker ved en smart brug af de geometriske metoder, der er undersøgt i tidligere kapitler, i kombination med anvendelse af mindste kvadraters metode.

Afstandsmålingen bygger på den helt grundlæggende ide i alle kameraer: Der er en præcis sammenhæng mellem <i>afstanden</i> til en given genstand, man ønsker at fotografere, og så om denne er <i>i fokus</i> . Men flytter på linserne i et kamera ved at dreje på objektivet i traditionelle kameraer, eller ved en autofocus mekanisme i mobilkameraer.	
Der er præcis én indstilling, hvor genstanden er i fokus. Når billedet er skarpt, så er afstanden til genstanden derfor fastlagt. Den ville man kunne aflæse med grov tilnærmelse på siden af et klassisk objektiv. I Trios bringes genstanden fokus ved at justere linsernes position, og man kan man derved <i>ud fra optikkens regler</i> udregne afstanden til det givne punkt på tanden. Det er grundlæggende samme princip, der anvendes af autofocus i et mobilkamera.	

7.1 Optik

(Har du helt styr på optikkens grundlæggende regler, fx Snells lov og linseformlen, kan du gå direkte til 7.2. Ønsker du at fordybe dig yderligere i emnet kan finde et godt materiale fra erik vestergård [her](#)-link til 7-1)

Vi starter med at undersøge nogle grundlæggende elementer af optikken, dvs hvordan lys bevæger sig igennem linser. Vi koncentrerer os om den geometriske optik, hvor lysstråler opfattes som rette linjer.

7.1.1 Lysets brydning

Lysets fart ændrer sig alt efter hvilket materiale det bevæger sig gennem. Lys bevæger sig hurtigst gennem vakuum med 300.000 km/s , mens det i rudeglas bevæger sig med 197.000 km/s altså næsten 35% langsommere.

Forholdet mellem de to tal kaldes for <i>brydningsindekset</i> for pågældende materiale. Brydningsindekset for rudeglas er altså: $n = \frac{300.000 \text{ km/s}}{197.000 \text{ km/s}} = 1,52$
--

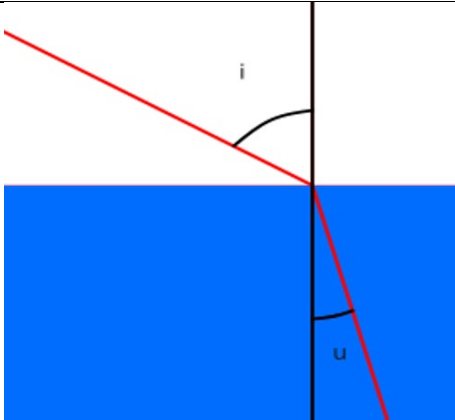
Ifølge den franske matematiker og fysiker Pierre de Fermat (1607 - 1665) tager lyset altid den hurtigste vej og ikke den korteste. Lyset vil derfor ikke bevæge sig i en lige

linje mellem to punkter, hvis det bevæger sig gennem *forskellige* materialer. Ved overgangen mellem to materialer laver lysstrålen et knæk, hvilket kaldes *afbøjning*.

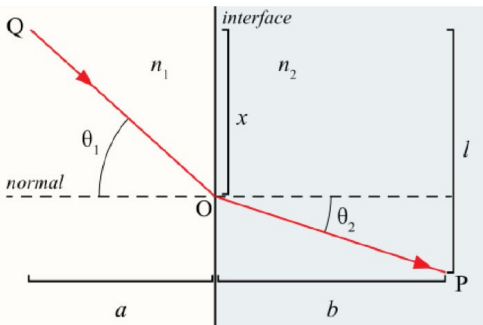
Sammenhængen mellem den vinkel lyset rammer overfladen med, og den som den fortsætter med, kan beskrives med Snells lov, efter den hollandske matematiker og astronom Willebrord Snellius (1580-1620). Snells Lov siger, at en lysstråle, der først går gennem et materiale 1, dernæst gennem et materiale 2, vil forløbe så følgende er opfyldt:

$$n_1 \cdot \sin(i) = n_2 \cdot \sin(u),$$

hvor n_1 og n_2 er brydningsindekser for de to materialer, i er *indfaldsvinklen* og u *udfaldsvinklen*, hvor man måler vinklerne fra overfladens normal.

Figuren viser en lysstråle som rammer en overflade med en overgang mellem luft og vand. Brydningsindekset i luft er meget tæt på det i vacuum, $n_1 = 1$ mens det for vand er $n_2 = 1,33$. Øvelse 7.1 a) Bestem udfaldsvinklen u, når $i = 50^\circ$. b) Brug dit kendskab til sinusfunktionen til at argumenterer for $u < i$ når $n_1 < n_2$.	
---	---

7.1.2 Bevis for Snells lov ud fra Fermats princip

Vi antager Fermats princip er sandt. Lysets hastighed i vakuum er c. Brydningsindeks i materiale 1 og materiale 2 er henh. n_1 og n_2. Lysets hastighed i materiale 1 betegnes v_1, og tilsvarende i materiale 2 betegnes den v_2. Så gælder $\frac{c}{v_1} = n_1$ og $\frac{c}{v_2} = n_2$. Omskriv til $\frac{c}{n_1} = v_1$ og $\frac{c}{n_2} = v_2$.	 En lysstråle bevæger sig fra punktet Q i materiale 1, via punktet O ind i materiale 2 og lander i punktet P. (billedet er lånt fra wikipedia)
--	---

Vi vil nu opskrive et udtryk for den tid, det tager for lyset at bevæge sig fra Q til P langs den røde, knækkede linje.

Øvelse 7.2 Udregning af tiden, lyset tager for at nå til P

a) Vis, at $|QO| = \sqrt{x^2 + a^2}$, og at $|OP| = \sqrt{(l-x)^2 + b^2}$

Vi lader T betegne den tid, det tager for lyset at bevæge sig fra Q til P ad den røde linje

b) Vis at
$$T = \frac{|QO|}{v_1} + \frac{|OP|}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(l-x)^2 + b^2}}{v_2}$$

c) Vis, at T kan omskrives til

$$T = \frac{1}{v_1} \cdot \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{v_2} \cdot \sqrt{l^2 + b^2 - 2 \cdot l \cdot x + x^2}$$

Vi ser, at T er en funktion af x , hvor x angiver det sted, hvor lyset bevæger sig fra materiale 1 til materiale 2. Fermats princip siger nu, at lyset bevæger sig den vej, hvor T bliver mindst mulig. Men det må vi kunne bestemme ved hjælp af differentialregning.

$$T'(x) = \frac{1}{v_1} \cdot (\sqrt{a^2 + x^2})' + \frac{1}{v_2} \cdot (\sqrt{l^2 + b^2 - 2 \cdot l \cdot x + x^2})'$$

d) Vis, at

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{v_1} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a^2 + x^2}} \cdot 2x + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{l^2 + b^2 - 2 \cdot l \cdot x + x^2}} \cdot (-2 \cdot l + 2x) \\ &= \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{(-l + x)}{\sqrt{l^2 + b^2 - 2 \cdot l \cdot x + x^2}} \end{aligned}$$

Læg nu mærke til, at de to kvadratrødder stadig angiver afstandene $|QO|$ og $|OP|$, så udtrykket for $T'(x)$ kan reduceres til (bemærk hvad der sker med minus-tegnet!):

$$T'(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{|QO|} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{(l - x)}{|OP|}$$

e) Betragt nu de to trekanter, der er antydnet på tegningen og som indeholder vinklerne, henh. θ_1 og θ_2 . Vis ud fra disse to trekanter, at:

$$\sin(\theta_1) = \frac{x}{|QO|} \quad \text{og} \quad \sin(\theta_2) = \frac{(l - x)}{|OP|}$$

f) Indsæt disse to udtryk, samt formlerne for v_1 og v_2 fra starten af afsnittet, og vis, at udtrykket for $T'(x)$ kan reduceres til:

$$T'(x) = \frac{n_1}{c} \cdot \sin(\theta_1) - \frac{n_2}{c} \cdot \sin(\theta_2)$$

g) Udnyt Fermats princip til at vise

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{n_1}{c} \cdot \sin(\theta_1) = \frac{n_2}{c} \cdot \sin(\theta_2) \Leftrightarrow n_1 \cdot \sin(\theta_1) = n_2 \cdot \sin(\theta_2)$$

Altså har vi vist, at Snells lov er en konsekvens af Fermats princip.

(Man kan også udlede Snells lov af andre fundamentale fysiske love – undersøg evt. selv dette på nettet.)

Kritisk vinkel

Når udfaldsvinklen er større end indfaldsvinklen vil der være en værdi for indfaldsvinklen, hvor vi har maksimal afbøjning, dvs 90°. Denne vinkel kaldes for den <i>kritiske vinkel</i>.	
---	--

Øvelse 7.3 Bestem den kritiske vinkel

Ved overgangen fra vand til luft, er $n_1 \approx 1,33$ og $n_2 \approx 1$.

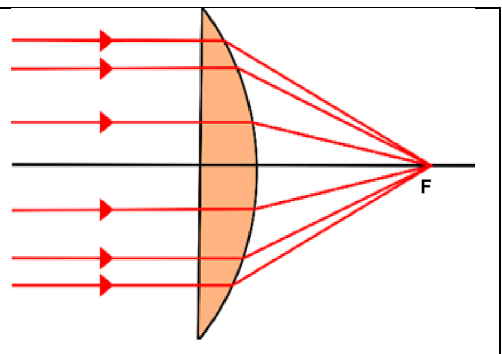
- Prøv selv at undersøge, hvad der sker, når indfaldsvinklen er $\theta_1 = 50^\circ$.
- Bestem den kritiske vinkel, θ_{krit} , hvor udfaldsvinklen er $\theta_2 = 90^\circ$

7.1.3 Samlelinse

Et brændglas kan bruges til at samle solens stråler i et lille punkt. Dette punkt kaldes brændpunktet og har bogstavet **F**. En simpel samlelinse er plan på den ene side. Den anden er del af en kugleoverflade. Vi retter denne mod solen, således at solens stråler rammer vinkelret på overfladen. Solens stråler kan opfattes som parallelle.

Øvelse 7.4

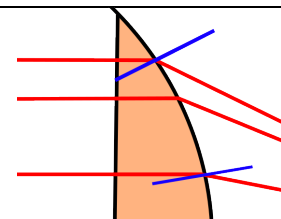
- Hvad er indfaldsvinklen ved luft-glas overgangen?
 - Hvad er udfaldsvinklen ved luft-glas overgangen?
- Strålerne længst fra midteraksen vil blive afbøjet mest, mens dem tættere på midten vil blive afbøjet mindre. Vi ved fra erfaring med brændglas, at de vil samle sig i ét punkt **F**.



Øvelse 7.5

På figuren er normalerne til den krumme overflade indtegnet (med blå)

- Indtegn indfalds- og udfaldsvinklerne for de to markerede stråler.
- Argumenter for at den øverste bliver afbøjet mest (Brug Snells lov).



Brydning i forhold til normalen.

Sætning: Strålerne samles i ét brændpunkt

Når et parallelt bundt af stråler bevæger sig igennem en simpel samlelinse, vil de efter brydningen samles i ét brændpunkt.

Bevis

Vi vil kun gennemføres beviset i situationen, hvor ind- og udfaldsvinklerne er små, hvilket gælder for *en tynd linse med svag krumning*. Det var matematikeren Gauss, der først undersøgte optikken systematisk ved hjælp af denne tilnærmelse. Det var i 1841. Vi vil benytte os af en 1. ordens tilnærmelse af de trigonometriske funktioner. En sådan tilnærmelse svarer til at trække tangenten til en funktion i et punkt og bruge den som en simpel erstatning for funktionen. Denne metode fungerer godt, hvis man holder sig tæt på udgangspunktet. I vores tilfælde betyder det, at linsen skal være meget flad, så indfaldsvinklen er næsten nul.

Man laver approksimationer (tilnærmelser) for at få omskrevet komplicerede udtryk til mere simple. Før lommeregnernes tid var de trigonometriske funktioner komplicerede at håndtere, og man arbejdede ofte med approksimationer.

Øvelse 7.6 Approksimationer og tangentligninger

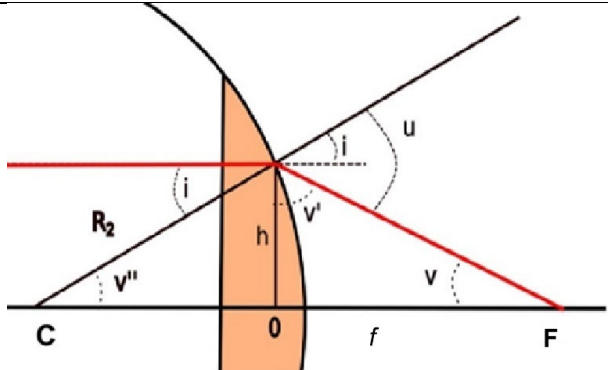
Du skal nu gennemføre en undersøgelse af de trigonometriske funktioner og deres grafiske forløb.

- Bestem ligningen for tangenten til grafen for $f(v) = \sin(v)$ i punktet $(0, f(0))$.
- Tangenten kan opfattes som grafen for en lineær funktion, $p(x)$, der også kaldes for *det approksimerende 1. gradspolynomium* til f . Tegn grafen for denne sammen med grafen for $f(v) = \sin(v)$.
- Bestem ligningen for tangenten til grafen for $g(v) = \cos(v)$ i punktet $(0, g(0))$.
- Tangenten kan opfattes som grafen for en lineær funktion, $q(x)$, der også kaldes for *det approksimerende 1-gradspolynomium* for g . Tegn grafen for denne sammen med grafen for $g(v) = \cos(v)$.
- Bestem ligningen for tangenten til grafen for $h(v) = \tan(v)$ i punktet $(0, h(0))$.
- Tangenten kan opfattes som grafen for en lineær funktion, $r(x)$, der også kaldes for *det approksimerende 1-gradspolynomium* til h . Tegn grafen for denne sammen med grafen for $h(v) = \tan(v)$.

Øvelsen giver en grafisk "argumentation" for, at vi for små værdier af v har følgende gode approksimationer:

$$\sin(v) \approx v, \quad \cos(v) \approx 1, \quad \tan(v) \approx v \quad (*)$$

Betragt nu én af solens stråler, der kommer ind parallelt med symmetriaksen, rammer linsen i højden h , og derefter går igennem linsen og rammer symmetriaksen i punktet f .

Vi vil bevise, at punktet F er uafhængigt af højden h. Hvis punktet ikke afhænger af hvor linsen bliver ramt, må punktet være det samme for alle stråler, dvs alle stråler vil gå gennem dette punkt, som vi derfor kan tillade os at kalde brændpunktet. Figuren viser en sfærisk linse hvor den ene side er flad men den anden er en del af en kugleflade, her i et 2D-snit, del af en cirkel. C er centrum for cirklen. Figuren er fortegnet, da linsen er ganske tynd.	 C er centrum for cirklen
---	--

For tynde linser gælder, at stykket **CO** med tilnærmelse svarer til radius. Og stykket **OF** har med tilnærmelse samme længde for alle placeringer af punktet **O**.

Den indkommende lysstråle er vandret og rammer linsen vinkelret på. Ved overgangen fra luft til linsen sker der derfor ikke nogen brydning. Ved overgangen fra linsen til luft sker der en afbøjning. Indfaldsvinklen betegnes i og udfaldsvinklen betegnes u . Da det er en krum flade, må både i og u være afhængige af højden h . Vi er interesserede i at

finde den vandrette afstand **OF** fra linsen til brændpunktet **F**, og undersøge, om denne afstand afhænger af højden h .

Vi udnytter i det følgende konklusionen (*) på øvelse 7.6 ovenfor.

Øvelse 7.7

- Argumenter for, at Snells lov $n_1 \cdot \sin(i) = n_2 \cdot \sin(u)$ her kan skrives $n_1 \cdot i \approx n_2 \cdot u$
- Argumenter for at $n_1 > 1$ og $n_2 = 1$, så ovenstående reduceres til: $n_1 \cdot i \approx u$
- Argumenter for, at $v'' = i$
- Brug resultatet i c) og din viden om sinus i retvinklede trekanter til at nå frem til følgende: $\sin(i) = \frac{h}{R_2} \Rightarrow i \approx \frac{h}{R_2}$
- Argumenter for at $v' = 90 - (u - i)$, samt at $v = 90 - v'$.
- Udnyt resultatet i e) til at vise: $v = u - i$
- Argumenter for at $\tan(v) = \frac{h}{f}$, og derfor: $v \approx \frac{h}{f}$ (f er længden af stykket fra **O** til **F**)

Nu har vi ingredienserne til at vise, at der findes et brændpunkt, dvs. et punkt alle vandrette stråler, der går gennem linsen og som bliver afbøjet, vil gå igennem.

Argumenter nu selv for følgende kæde af omskrivninger:

$$\begin{aligned}
 v &\approx \frac{h}{f} \\
 u - i &\approx \frac{h}{f} \\
 n_1 \cdot i - i &\approx \frac{h}{f} \\
 (n_1 - 1) \cdot i &\approx \frac{h}{f} \\
 (n_1 - 1) \cdot \frac{h}{R_2} &\approx \frac{h}{f} \\
 (n_1 - 1) \cdot \frac{1}{R_2} &\approx \frac{1}{f} \\
 \frac{1}{f} &\approx (n_1 - 1) \cdot \frac{1}{R_2}
 \end{aligned}$$

Det sidste udtryk afhænger ikke af højden h , men kun af konstanterne R_2 og n_1 . Det er hermed bevist at alle vandrette stråler samler sig i et brændpunkt **F**.

Normalt er begge sider krumme i en linse – og de kan have hver sin krumningsradius. Man kan her vise:

Sætning: Sammenhængen mellem brændpunkt og krumningsradier

I en smal linse, hvor siderne er krumme (konvekse) med krumningsradier R_1 og R_2 , og brydningsindeks fra glas til luft er n , gælder linseformlen for tynde linser:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

R_2 er radius i cirklen med centrum til højre, R_1 tilsvarende til venstre. Aksen opfattes her som en talakse, så størrelserne regnes med fortegn, dvs R_2 er negativ.

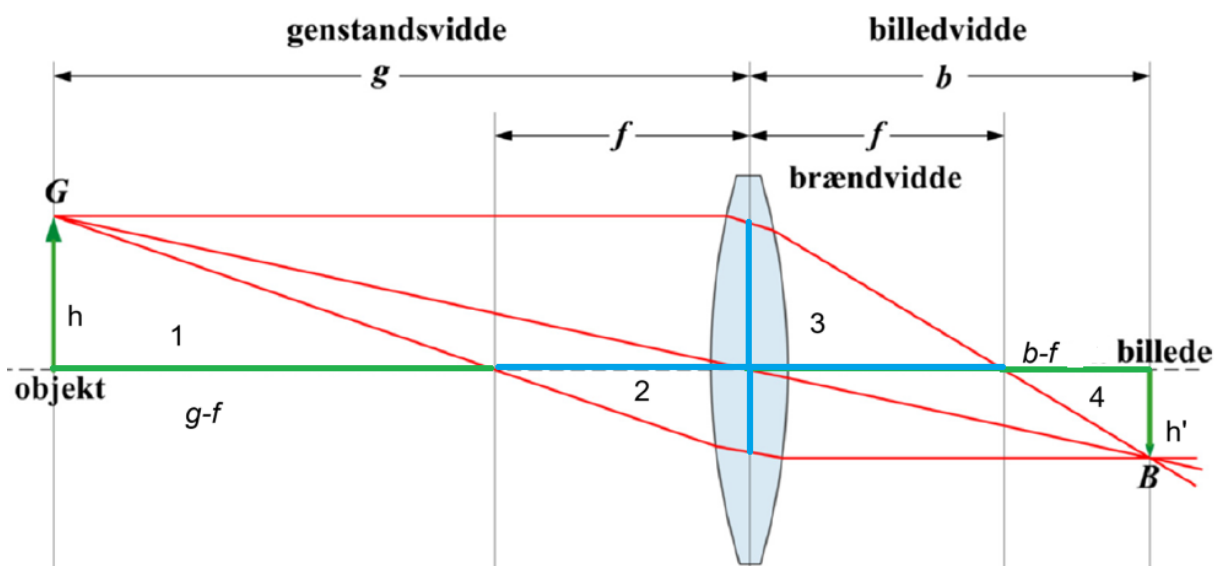
Øvelse 7.8 Brydning med to konvekse overflader.

Et kamera er opbygget af mange linser, men den inderste kan godt beskrives med linseformlen. Givet en linse lavet af glas, hvor $n=1,52$. Den er slebet så $f=55\text{mm}$.

Beregn krumningsradiusradius. (Her er $R_1=R_2$).

7.1.4 Billeddannelse og den generelle linseformel

Vi vil i det følgende se på billedannelsen af et objekt, der ses gennem en linse. Vi betragter her konvekse linser med samme krumningsradius til begge sider, så vi kan tale om én brændvidde: Afstanden til brændpunkterne er ens til begge sider.



Illustrationen er lånt fra en wikipedia-artikel om linseformlen. Betegnelser er sat på.

Illustrationen viser en hel generel billedannelse af et objekt, hvor lysstrålerne bevæger sig igennem en konveks samlelinse. Kun lysstrålerne af spidsen **G**, der lander i **B** er vist. Vi vil udlede en formel der sammenkæder brændvidden med afstanden som henh. genstanden og billedet befinder sig i. Vi vil alene anvende ensvinklede trekanter.

Øvelse 7.9

- Argumenter for, at Trekant 1 og Trekant 2 er ensvinklede: $\Delta 1 \sim \Delta 2$, og at Trekant 3 og Trekant 4 er ensvinklede: $\Delta 3 \sim \Delta 4$
- Nogle sidelængder (af kateterne) er angivet, andre ikke. Sæt sidelængder på alle kateter og argumenter for de forskellige størrelser.

c) Argumenter for, at $\Delta 1 \sim \Delta 2$ giver følgende: $\frac{h'}{h} = \frac{f}{g-f}$,

og for at $\Delta 3 \sim \Delta 4$ giver følgende: $\frac{h'}{h} = \frac{b-f}{f}$

De to udtryk giver nu: $\frac{f}{g-f} = \frac{b-f}{f}$

d) Vis, at denne formel kan omskrives til: $f^2 = (b-f) \cdot (g-f)$

e) Vis, at dette udtryk kan reduceres til: $f \cdot g + b \cdot f = b \cdot g$

f) Vis at division med $b \cdot f \cdot g$ giver $\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f}$

Hermed har du vist linseformlen, der udtrykker en generel sammenhæng mellem de tre størrelser *brændvidden*, *genstandens afstand* og *billedets afstand*.

Øvelse 7.10 Billeders størrelse og beliggenhed

En konveks og symmetrisk samlelinse, der har brændvidden 20 cm bruges til afbildning. Bestem billedets størrelse og beliggenhed, når en genstand på 4 cm anbringes i følgende afstande: 20 cm, 30 cm, 40 cm, 100 cm, 500 cm og er "uendelig langt væk".

7.1.5 Brændpunkt og fokus

I afsnittet ovenfor om linseformlen så vi, hvor et skarpt billede bliver dannet. Hvis man fx placerer et lærred eller en kamera-ccd chip der, hvor brændpunktet ligger, vil der være én specifik afstand hvor et objekt er i fokus. Men der bliver jo også dannet billeder i andre afstande, vi kunne placere "lærredet" i – de er blot uskarpe. De er ikke i fokus. Det ser vi nærmere på i dette afsnit.

Ethvert punkt sender lys ud i alle retninger, stråler, og kun der hvor strålerne mødes vil punktet vises skarpt. Hvis vi ser på figuren med en pil til venstre som bliver afbildet til højre går alle strålerne fra toppen af pilen, gennem linsen og samles i bunden af billedet, til højre. Denne måde at beskrive lys på, hvor man følger lyset i lige linjer, og som vi også så på i forrige afsnit, kaldes ray tracing. I princippet er der uendeligt mange linjer mellem afsender og modtager, men hvis man vil vide hvor billedet ender er der tre linjer som er lette at tegne.

Første linje går gennem centrum af linsen og knækker ikke (dette gælder kun i tyndlinse approksimationen).

Anden linje går vandret til den rammer linsen og krydser derefter brændpunktet på højre side.

Tredje linje skærer brændpunktet på venstre side og går vandret efter linsen.

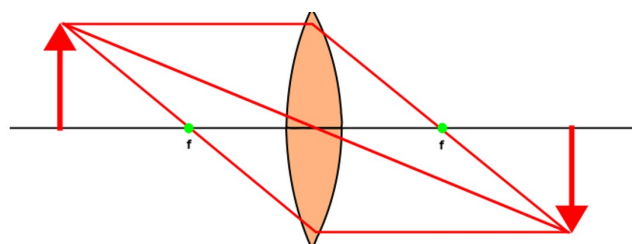
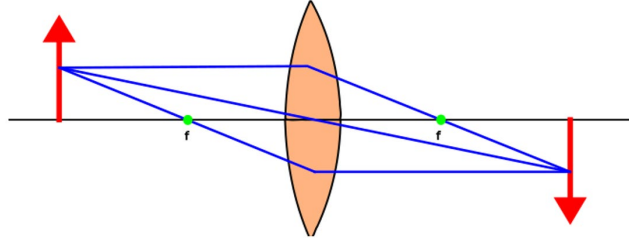
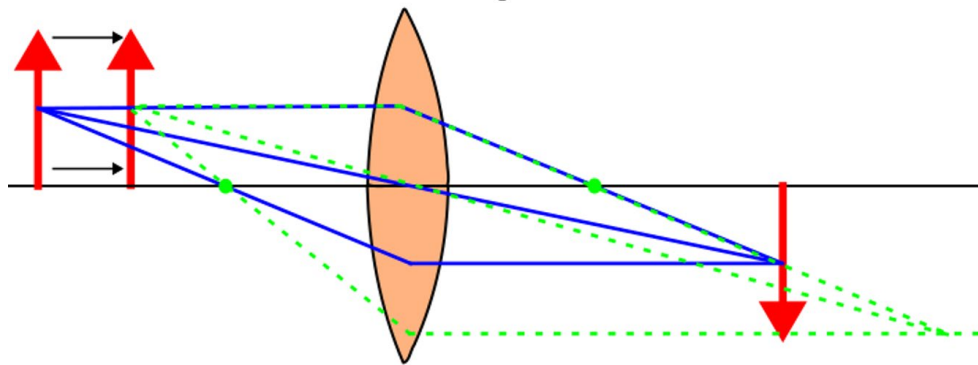


Illustration af hvordan spidsen af en pil afbildes

Som det ses ovenfor af figurens røde linjer, så samler strålerne sig netop i spidsen af billedet. De blå linjer viser, hvordan et "tilfældigt" punkt afbildes, her midtpunktet.	 <i>Illustration af hvordan midten af en pil afbildes</i>
---	--

Øvelse 7.11 Tegn selv

- Vælg linser med brændpunkterne placeret andre steder, og tegn billederne.
- Her er venstre pil flyttet tættere på brændpunktet:

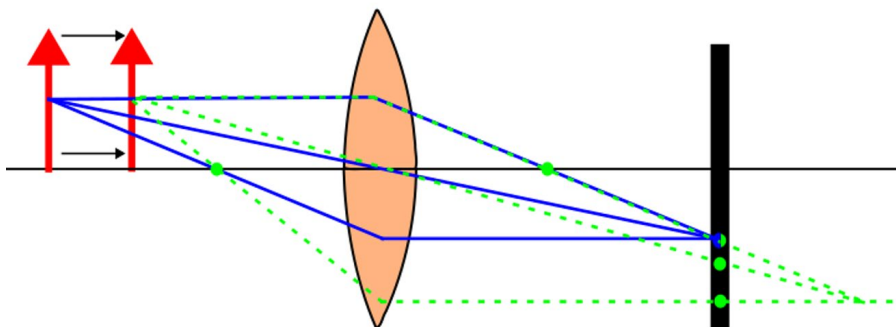


Hvor kommer billedet til at være og hvad er der sket med det?

- Prøv også at flytte pilen den anden vej og se resultatet.

I fokus eller ude af fokus på billedplanet

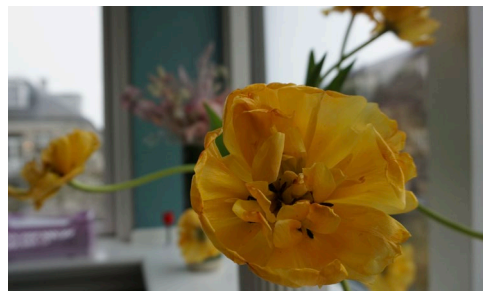
Ovenfor så vi, at billedet bliver større hvis objektet bevæger sig tættere på brændpunktet, mens stedet hvor billedet bliver vist flytter sig længere væk. I kameraer sidder den lysfølsomme ccd chip fast, og det er ikke muligt at rykke den frem og tilbage for at få det rigtige billede. Men en af linserne kan flyttes. Det svarer til at flytte genstanden. I nedenstående figur er en plade placeret, hvor pilen var i fokus før den blev flyttet:



Vi har bevaret de blå linjer, der gav fokus, til sammenligning: Lyset fra den flyttede pil bliver nu fordelt over et område. Hvert punkt på ccd chippen vil derfor få lys fra mange steder på pilen, hvilket resulterer i et sløret billede.

Ved en kort afstand fra genstand til brændpunkt, bliver det mere følsomt over for placering. I fotografiet her kan man se tulipanen er i fokus, mens blomsterne bagved er ude af fokus.

Det er netop denne effekt, 3Shape bruger til at bestemme afstanden. Ved at flytte linsen kan man bestemme afstanden til den del af tanden, man belyser, ved at undersøge om billedet er i fokus. Hvordan afgør man, om der er fokus? Det er emnet for næste afsnit

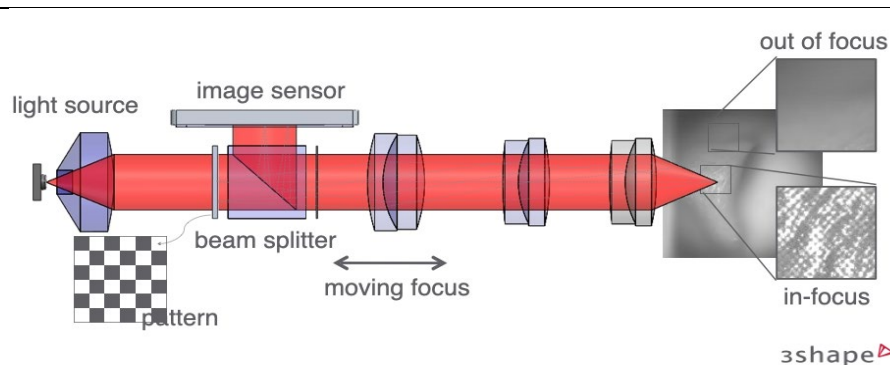


7.2 Triosscanneren

Ideen om at udnytte sammenhængen mellem fokus og afstand er helt grundlæggende for Triosscanneren, som vi nu vil studere nærmere.

Lyt først til den forklaring, Anders Gaarde giver i filmen fra 23.25 til 28.30.

Figuren viser, hvordan den midterste linse i Triosscanneren kan bevæges for at skabe fokus. Lyskilden kommer fra venstre, sendes igennem det optiske system, og beamer et skakternet mønster ned på tænderne.

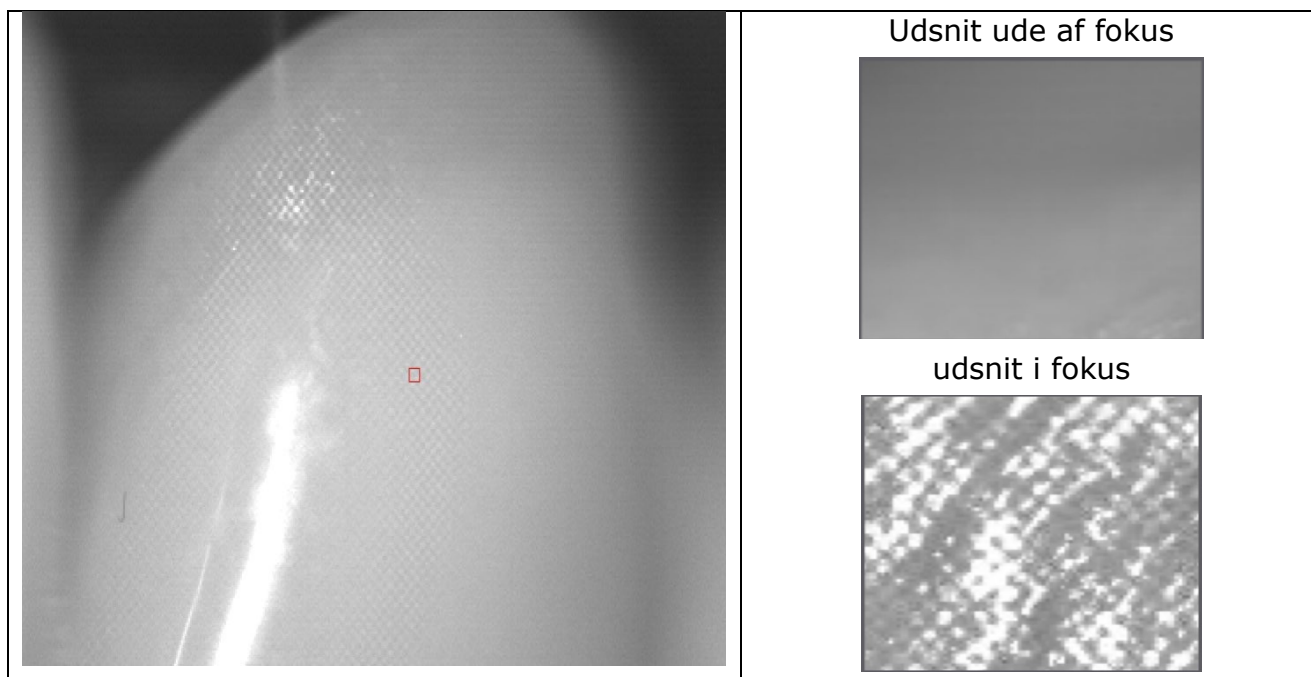


Det gøres, fordi tænder for det meste er glatte og hvide og har en overflade, som gør det svært at måle afstanden helt nøjagtigt. Triosscanneren laver derfor selv et billede på tænderne, som de kan fokusere på. I filmen får vi demonstreret billeder, ligesom dem vi ser her, fokuserede eller uskarpe, alt afhængig af afstanden.

7.2.1 3shapes opsætning af optikken i scanneren.

Optimering af kontrast.

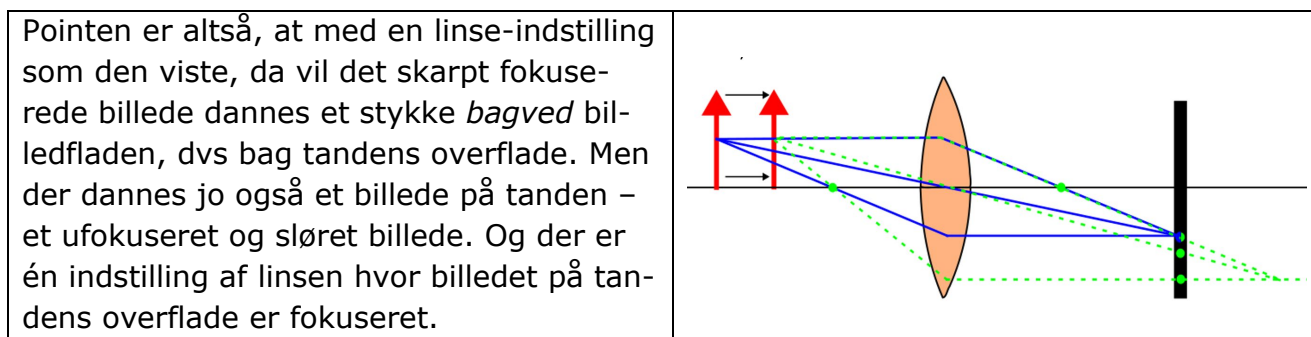
Det skakternede mønster på tanden kan ses på fotografiet her nedenfor. Som det ses, er noget af mønstret i fokus, mens andet er ude af fokus – vi ser en udvisket grå farve. Forskellen ses tydeligere på figurerne til højre, hvor der er zoomet ind.



Triosscanneren "sigter" på et "punkt", der her er et område af en størrelse som på fotografiet ovenfor. Den bevægelige linse i scanneren kører hurtigt frem og tilbage og der tages 2500 billeder i sekundet. Selvom tandlægen bevæger scanneren, så vil det i praksis virke som om den står stille og tager en lang stribe af billeder, hvor "punktet" befinder sig i samme afstand fra scanneren. Men i en variabel afstand til den bevægelige linse.

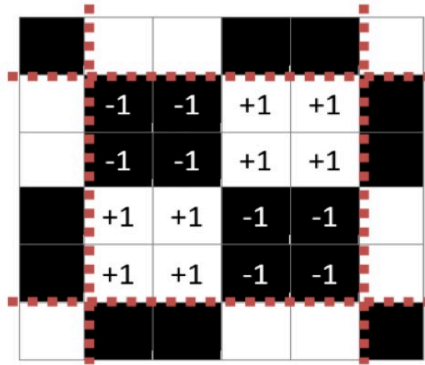
Når vi nu kender noget til optik – se igen på tegningerne i afsnit 7.1.5 – så kan vi se, hvordan vi *i princippet* kan løse problemet med at finde afstanden til tanden: Der er tre variable i linseformlen: *Genstandsvidden* g , som er afstanden fra det skakternede mønster til linsen, linsens (eller: linsesystemets) *brændvidde* f og endelig *billedvidden* b , som er afstanden fra linsen til det sted, hvor der dannes et fokuseret billedet af mønstret. For enhver position af linsen har vi styr på de første to, og kan beregne den tredje.

Se nu igen på jfr tegningen her fra afsnit 7.1.5, og læg mærke til, at *billedvidden* b konstant ændrer sig, når linsen bevæger sig. (I scanneren er det ikke genstanden, men linsen der bevæger sig – men det er principielt samme situation.)



Kan vi finde den indstilling, kan vi finde afstanden til tanden. For at kunne regne på dette, skal vi have kvantificeret *graden* af fokus. Der skal knyttes en talværdi til hvert billede, en talværdi som er et mål for, hvor sløret eller fokuseret billedet er.

"Punktet" er ikke et matematisk punkt, uden udstrækning. Punktet rummer nogle felter fra skakmønstret, som svarer til pixelstørrelsen i image-sensoren, fx de 16 angivet på tegningen nedenfor. Vi ser kun på sort-hvid kontrast, og gråtonerne kalibreres til at ligge i intervallet fra -1 til $+1$, hvor -1 svarer til *helt sort*, mens 1 er *helt hvid*. Værdierne, som vi betegner I_i , og som genereres af en slags lysdioder, vil dog sjældent være -1 og $+1$, det er gråtoner.

Pixelværdierne I_i bliver nu ved hjælp af en vægtfunktion, der er defineret på det skakternede mønster, og som vi betegner $f(*)$, omsat til én talværdi efter følgende procedure: Hver pixelværdi I_i bliver ganget med vægtfunktionens værdi, $f(i)$ i det tilsvarende felt (nummer i), og der summeres over de 16 felter i mønstret: $A = \sum_{i=1}^{N \times N} f(i) \cdot I_i$ (her er N lig med 4)	
---	---

(Bemærk: Selvom talværdierne for graden af kontrast og vægtfunktionens værdier opstilles i en talblok, så er produkterne *ikke* resultat af en matrixmultiplikation, men derimod et *skalarprodukt* (prikprodukt), hvor de 16 talværdier for kontrasten og de 16 talværdier for vægtfunktionen begge tænkes som vektorer.)

Dette er et tænkt eksempel med en meget simpel vægtfunktion for at illustrere ideen og udregningerne:

I det tænkte eksempel har vi et fuldstændig skarpt billede, hvor I_i antager værdierne, -1 og $+1$, og her bliver værdien af A :

$$A = \sum_{i=1}^{4 \times 4} f(i) \cdot I_i = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + \dots + 1 \cdot 1 + \dots + (-1) \cdot (-1) = 16$$

For et uskarpt billede, kan I_i fx antage værdierne -0.25 og $+0.25$ i alle pixels.

Her bliver summen:

$$A = \sum_{i=1}^{4 \times 4} f(i) \cdot I_i = 0.25 \cdot 1 + 0.25 \cdot 1 + 0.25 \cdot 1 + 0.25 \cdot 1 + \dots + (-0.25) \cdot (-1) = 4$$

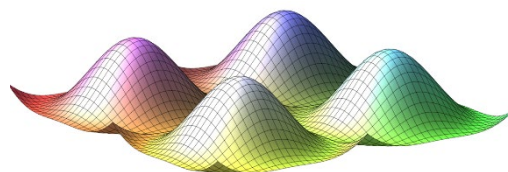
Øvelse 7.12 Nogle beregninger på det tænkte ideelle eksempel

Vi regner på ovenstående værdier af vægtene.

- Hvilke værdier, vil du vurdere de enkelte lysdioder giver i et ensfarvet billede, fx ensartet gul, eller ensartet rød...?
- For dit valg, udregn da værdien af forskellige ensartet farvede billeder
- Hvad vil A blive hvis skakternene var forskudt så sorte felter blev hvide og omvendt?

I den praktiske anvendelse viser det sig, at helt skarpe kontraster optræder sjældent, det meste er varianter af gråtoner, og variationen mellem lyst og mørkt er ikke så velordnet som i eksemplet ovenfor.

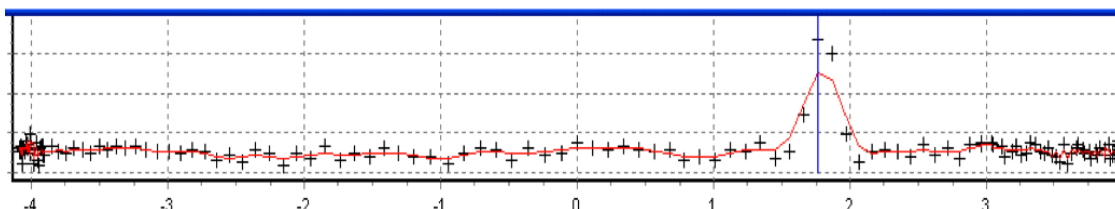
Vægtfunktionens værdier i skakternsmønstret kan i den praktiske anvendelse blive genereret af en sinus eller cosinus i 2d, der jo svinger mellem -1 og 1. Dvs de diskrete værdier kunne blive høstet af en graf af denne type, (hvor det grafiske billede fortsætter hen over skakternsmønstret).



7.2.2 Sådan foregår afstandsmålingen

Vi opsummerer proceduren til at bestemme afstanden til de forskellige dele af en tand:

- Der sigtes mod et bestemt punkt, og tages fotos heraf for mange forskellige indstillinger af linsesystemet.
- For hver indstilling af linsesystemet beregnes afstanden b ("billedvidden") til hvor, der kan dannes et skarpt billede.
- For hvert beregnet b -værdi, beregnes den tilhørende A -værdi, A_b .
- Alle punkterne (b, A_b) afsættes i et koordinatsystem. I dette eksempel repræsenterer alle de sorte krydser sådanne punkter.



- Vi kan se, at mange af disse punkter "hopper og danser", hvilket grundlæggende skyldes den måde, de er kommet tilveje på.
- Vi ønsker nu at få udjævnet eller udglattet disse "tilfældige udsving". Det sker ved hjælp af en speciel matematisk teknik, der kaldes "glidende gennemsnit" ("moving average"). Resultatet er den røde kurve.

Glidende gennemsnit

Lad os tage et lille ophold og fordybe os i denne teknik. Det er et eksempel på anvendelsen af en matematisk teknik, der kaldes *foldning* (eng: *convolution*), og som er emnet for næste kapitel. Her ser vi blot på denne specielle anvendelse af teknikken i et diskret tilfælde (et endeligt antal punkter).

Når vi har et antal datapunkter, der ikke ligger pænt på en kendt graftype, leder vi ofte efter en regressionsmodel, der kan tilnærme datapunkterne. Men her er situationen, at vi indimellem kan få målinger, der falder lidt uden for "mainstream" – og vi vil egentlig bare gerne have den kantede graf, vi får, hvis vi forbinder de sorte krydser, udjævnet. Det kan gøres ved konstruere en ny dataserie vha et glidende gennemsnit, enten uvægtet eller vægtet.

Øvelse 7.13 Glidende gennemsnit uden vægte

Vi har følgende dataværdier, stillet op i et sildeben:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y	6,5	5,9	6,1	4,9	7,2	5,8	6,3	4,8	7,1	5,7	5,2	6,4	5,8	6,0

- a) Kopier data ind i et regneark og frembring en graf, hvor punkterne er forbundet.
 b) Udregn middelværdi og spredning (standard-deviation) af dataværdierne
 (Du skal få henh. 5,9786 og 0,6878)
 c) Et ikke-vægtet glidende gennemsnit med tre dataværdier af gangen udregnes ved at tage gennemsnittet af en given y-værdi og dens to naboer, fx $\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$. Den tilhørende x-værdi er x_2 . Udnyt regnearkets faciliteter til at udregne og udfylde dette:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y						6,43								

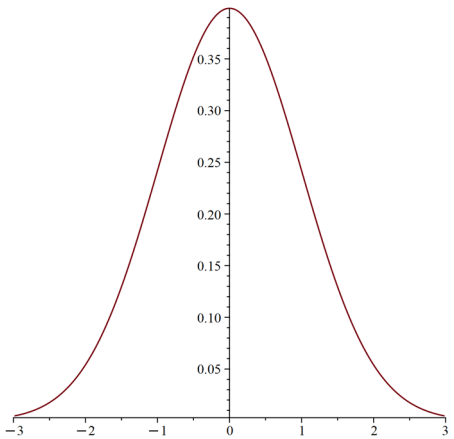
Som kontrol er indsat en af de værdier du skal få.

- d) Udregn middelværdi og spredning af disse dataværdier. Du skal få: 5,956 og 0,221.
 e) Frembring en graf af disse data i samme koordinatsystem som den oprindelige graf.
 f) Kommenter resultaterne i d) og e).

3Shape anvender et andet glidende gennemsnit, hvor de tilstødende dataværdier vægtes med en Gaussisk funktion. Vi anvender her standardnormalfordelingen:

$$f(x) = 0.3989 \cdot \exp(-0.50 \cdot x^2),$$

hvis graf du ser her. Funktionen er defineret i $[-\infty; +\infty]$, men udenfor tre gange spredningen fader den betydeligt ud.
 Vi får nedenfor brug for disse funktionsværdier:



$$f(0) = 0,3989, \quad f(-1) = f(1) = 0,24197, \quad f(-2) = f(2) = 0,05399$$

Det Gaussiske glidende gennemsnit beregnes ud fra 5 dataværdier af gangen, nemlig en given dataværdi og så dennes fire naboer, to til hver side. Hver dataværdi tillægges her nogle vægte så eksempelvis værdien knyttet til x_5 udregnes således:

$$f(-2) \cdot y_3 + f(-1) \cdot y_4 + f(0) \cdot y_5 + f(1) \cdot y_6 + f(2) \cdot y_7$$

Ovenfor dividerede vi med 3. Hvorfor skal vi ikke dividere med 5 her?

(Hint: Prøv at udregne summen af de 5 vægte, dvs de 5 funktionsværdier)

Øvelse 7.14 Glidende gennemsnit med Gaussisk vægtning

Computere foretager udregninger med binære tal, og vil ikke være specielt tilfredse med de funktionsværdiers decimalformer, som angivet ovenfor.

- a) Prøv at omskrive følgende brøker til decimaltal: $\frac{7}{128}, \frac{32}{128}, \frac{50}{128}$, og sammenlign med de 5 funktionsværdier.
 b) Hvad kan være fordelene ved at have en nævner som 128?
 c) Udnyt nu denne formel: $\frac{1}{128} \cdot (7 \cdot y_3 + 32 \cdot y_4 + 50 \cdot y_5 + 32 \cdot y_6 + 7 \cdot y_7)$ og regnearkets faciliteter til at udfylde dette sildeben

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y								5,85						

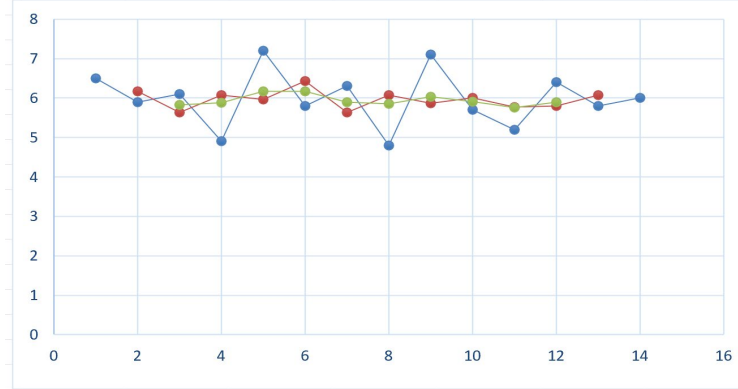
Som kontrol er indsat en af de værdier du skal få.

d) Udregn middelværdi og spredning af disse dataværdier. *Du skal få: 5,939 og 0,131.*

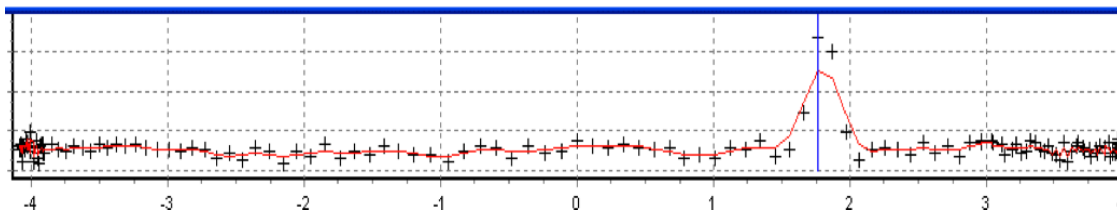
e) Frembring en graf af disse data i samme koordinatsystem som de to øvrige grafer.

Du skal få noget der ligner dette, afhængig af det værktøj, du anvender.

Den blå er de oprindelige data, den røde det uvægtede og den grønne det vægtede glidende gennemsnit.



f) Kommenter resultaterne i d) og e)



På tegningen her, som er et eksempel fra 3Shape, er den røde kurve det Gaussiske glidende gennemsnit. Da alt er diskret, er det nu en simpel sag at bestemme den største værdi af disse, $A_{\max}$. Men vi er ikke helt færdige endnu! Som en ekstra sikkerhed vælges nu også de to naboværdier, og ud fra disse tre datapunkter bestemmes parabeln, der går gennem punkter.

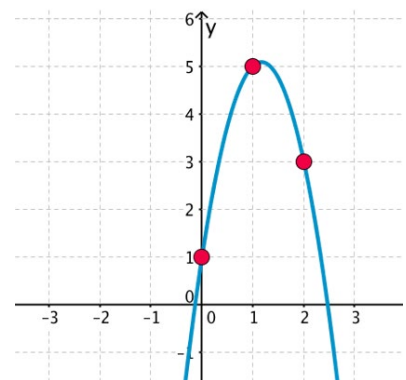
Øvelse 7.14 Afstanden til punktet på tanden bestemmes vha en parabel

a) Man kan naturligvis bestemme parablens ligning ved at gennemføre 2. grads regression på $A_{\max}$ og naboværdierne til hver side. Men giv først et argumenter for, at der må være præcis én parabel, der går gennem, de tre punkter.

b) Aflæs koordinaterne til punkterne på parabeln her, og bestem det andengradspolynomium, der har parabeln som graf. Gør dette både med regression og ved ligningsløsning.

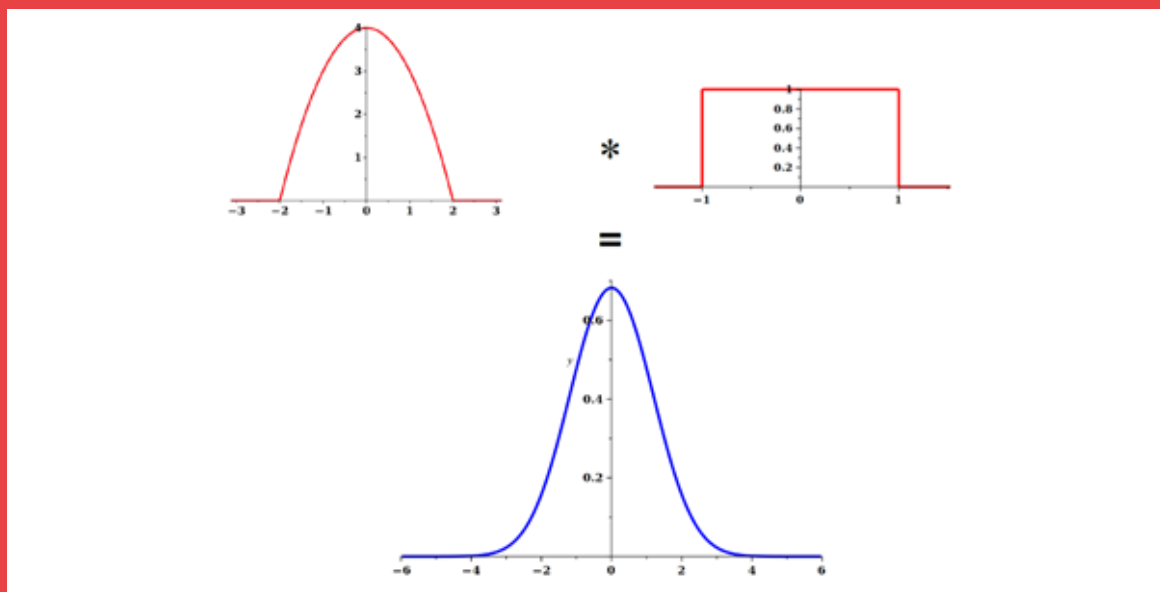
c) Bestem parablens toppunkt – vælg selv om du anvender differentialregning eller anvender toppunktsformlen.

d) Giv endelig en fortolkning af henh. 1. og 2. koordinaterne til toppunktet.



8.

Foldning af kontinuerte funktioner



Foldning er en matematisk teknik, der både kan udglatte skarpe kanter, og give et mere blødt udtryk i et foto, eller omvendt kan trække kontrasterne frem. Foldning findes både i en diskret udgave, som er i spil i kapitel 7, og en kontinuert som vi præsenterer her. Hvis vi fx ønsker at bevare ideen i en firkantfunktions graf, men give den et mere blødt udseende, kan vi folde den med en parabel og få ovenstående blå graf. Kapitlet giver en introduktion til dette matematiske område der har en stor anvendelse i fx arbejdet med billeder og lyd.

8. Foldning af kontinuerte funktioner

Du kan [her](#) link til 8-1 finde et dokument, hvor der gives en mere omfattende indføring i både diskret og kontinuert foldning, og hvor foldning connectes til sandsynlighedsteori)

Foldning, der på engelsk hedder *convolution*, blev udviklet som en matematisk metode til at kombinere to kontinuerte funktioner f og g til en tredje funktion h , med det formål at modificere formen af grafen for f ved hjælp af grafen for g – eller omvendt modificere grafen for g ved hjælp af f . *Foldning* refererer både til processen og til resultatet – den nye funktion, h . Udgangspunktet er kontinuerte funktioner, fordi processen, der skaber den nye funktion, involverer integration, og vi ved, at klassen af kontinuerte funktioner er integrable.

Vi vil i dette afsnit se på definitionen af foldning og illustrere denne med en del eksempler – det kræver lidt øvelse at kunne gennemskue resultatet af en foldning. Vi vil yderligere se på nogle af de egenskaber, man umiddelbart kan udlede af definitionen, og berøre nogle af de mange anvendelser, der i dag findes af foldning af to funktioner. I kapitel 7 så vi nogle eksempler på "diskret foldning", og vil ikke her gå længere ind i denne del. Ovenfor har vi givet et link til ekstramaterialer, hvor der findes en mere samlet fremstilling af dette område

8.1 Definition, eksempler og eksperimenter

Definition - Kontinuert foldning

Givet to kontinuerte funktioner $f(x)$ og $g(x)$, så defineres foldningen af f og g

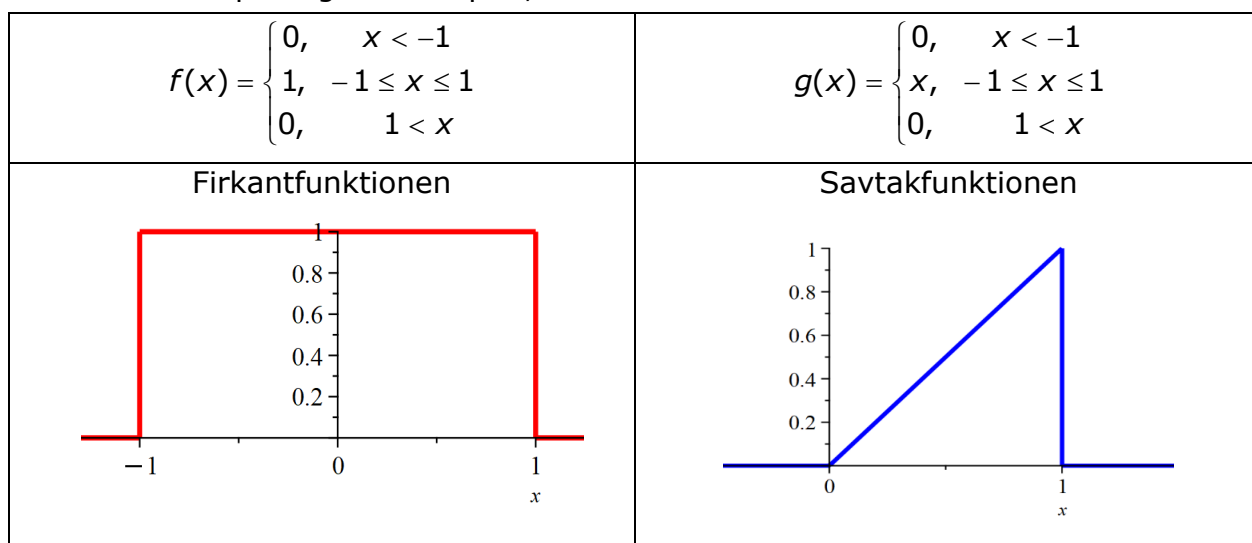
som:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot g(t - x) dx$$

Foldningen af f og g betegnes således med en asterix: $f * g$

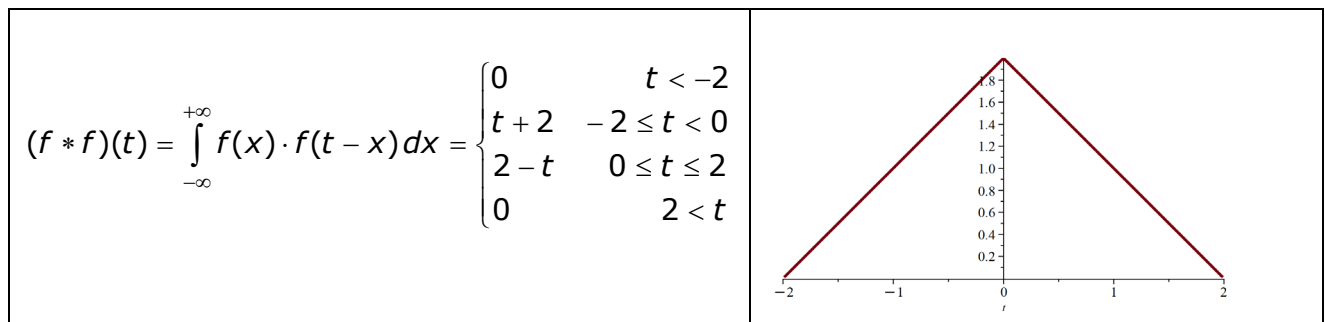
Bemærkning: Vi viser nedenfor, at foldning er kommutativ, dvs $f * g = g * f$, så det giver mening at tale om "foldningen af f og g ". Der er symmetri.

Lad os først se på nogle eksempler, hvor vi direkte anvender definitionen.



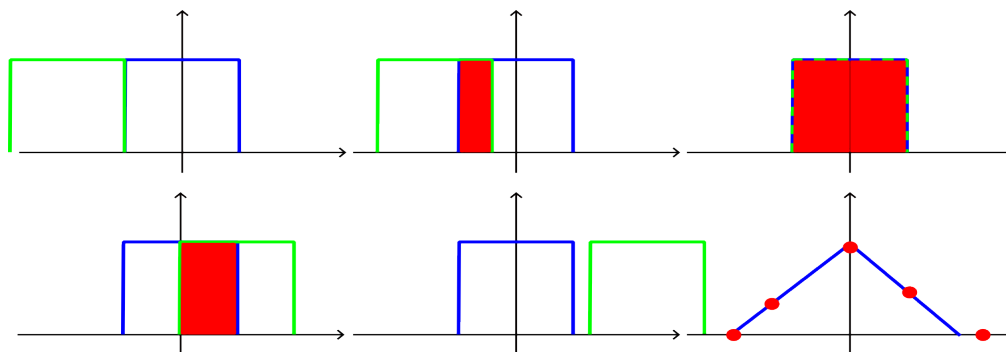
Øvelse 8.1 Foldningen af firkantfunktionen med sig selv

a) Vis, at hvis vi udregner foldningen af f med sig selv, får vi følgende funktionsforskrift:



b) Tegn grafen. Du skal få noget, der ligner ovenstående trekantsgraf.

c) Argumentér for, at dette er et troværdigt resultat ud fra følgende tegneserie, hvor den blå graf er $f(x)$ og den grønne, der forskydes hen over, er $f(t-x)$:



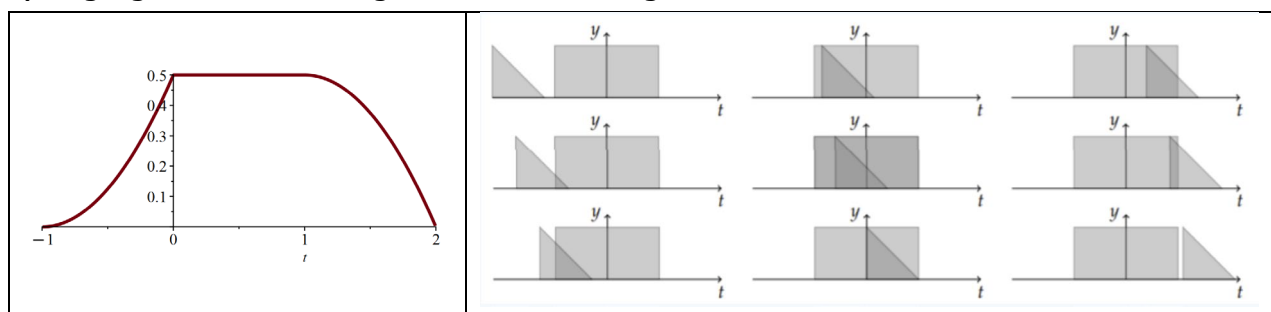
Øvelse 8.2 Foldning af firkant med savtak

a) Tegn selv graferne for de to.

b) Udregn foldningen: $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot g(t-x) dx$

Vores værktøjsprogram klarer det let, men resultatet er noget mere kompliceret.

c) Tegn grafen af foldningen. Du skal få noget i stil med dette:

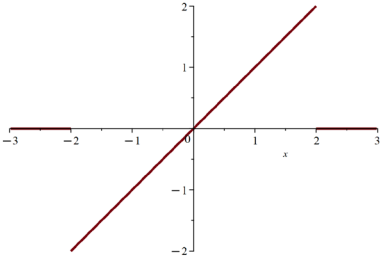
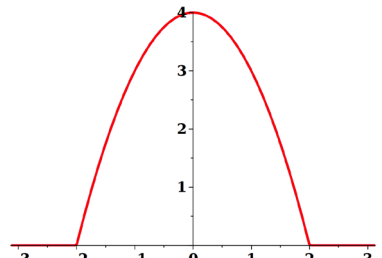
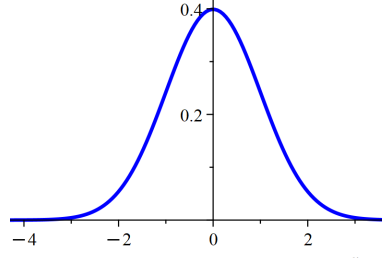


d) Kan du også her argumentere for grafens forløb, ud fra tegneserien ovenfor, hvor savtak-grafen skubbes ind over firkantgrafen. Du skal først overveje savtakgrafs form i tegneserien. (*Tegneserien er lånt fra Libre Texts, Mathematics*)

Selvom de to funktioner nok er de mest simple, man kan komme på, så ser vi, at det hurtigt bliver lidt kompliceret at *argumentere* for foldningsgrafens forløb. Men værktøjsmaskinerne klarer det hele let, og det er en god ide at prøve at folde kendte og simple funktioner for at få et mere overordnet billede af, hvad det egentlig er, der sker.

Øvelse 8.3 Eksempler på foldninger og deres grafer

a) Tegn først graferne hørende til de funktioner, der indgår:

Lineær funktion i $[-2;2]$ $l(x) = x$	Simpel parabel i $[-2;2]$ $p(x) = -x^2 + 4$	Gaussfunktionen normalpdf(0, 1, x), eller $n(x) = 0,4 \cdot \exp(-0,50 \cdot x^2)$
		

b) Bestem nu foldningerne:

- 1) $p * p$, 2) $p * l$, 3) $p * n$, 4) $n * l$, 5) $n * n$, 6) $l * l$

Prøv selv, men du kan kontrollere med grafer og forskrifter [her-link til 8-2](#)

c) Bortset fra nr 6, så bliver man ikke specielt overrasket over de grafiske billeder, når man har øvet sig lidt. Kan du give en generel kommentar eller beskrivelse af, hvad foldning normalt "gør ved" funktioner og deres grafer?

Lad os lige tænke lidt over, hvad definitionen siger grafisk set: Vi tager grafen for g , og så spejler vi først denne i 2. akse, hvilket giver grafen for funktionen $g(-x)$. Dernæst indfører vi en ny variabel t , og forskyder nu grafen for $g(-x)$ stykket $-t$. Dette er grafen for funktionen $g(t - x)$. I den næste øvelse træner vi lige præcis dette at parallelforskyde grafer

Øvelse 8.4 Parallelforskydning af grafer

a) Tegn grafen for $g(x) = x^3$.

b) Tegn grafen for $g(-x)$. Sammenlign med a) – hvad ser du?

c) Tegn grafen for $g(x + 1) = (x + 1)^3$. Sammenlign med a) – hvad ser du?

d) Hvis du ønsker at forskyde grafen for g stykket 4 i x-aksens retning, hvilken forskrift skal du så anvende?

e) Tegn grafen for $g(1 - x) = (1 - x)^3$. Sammenlign med a) – hvad ser du?

f) Givet et fast tal t . Beskriv grafen for $g(t - x)$ ud fra grafen for g .

g) "Kontroller" dine resultater ved at gennemføre en undersøgelse med skydere ('Explore' i Maple) af graferne for $\{x^3, (x + t)^3, (t - x)^3\}$, hvor parameteren t løber mellem -2 og 2.

Når vi har fået styr på, hvad parallelforskydninger gør, så kommer det vanskelige, men præcis det, som gør foldning så anvendelig: Vi ganger og tager et integral. Dvs vi beregner et areal for hver parallelforskydning af den ene!

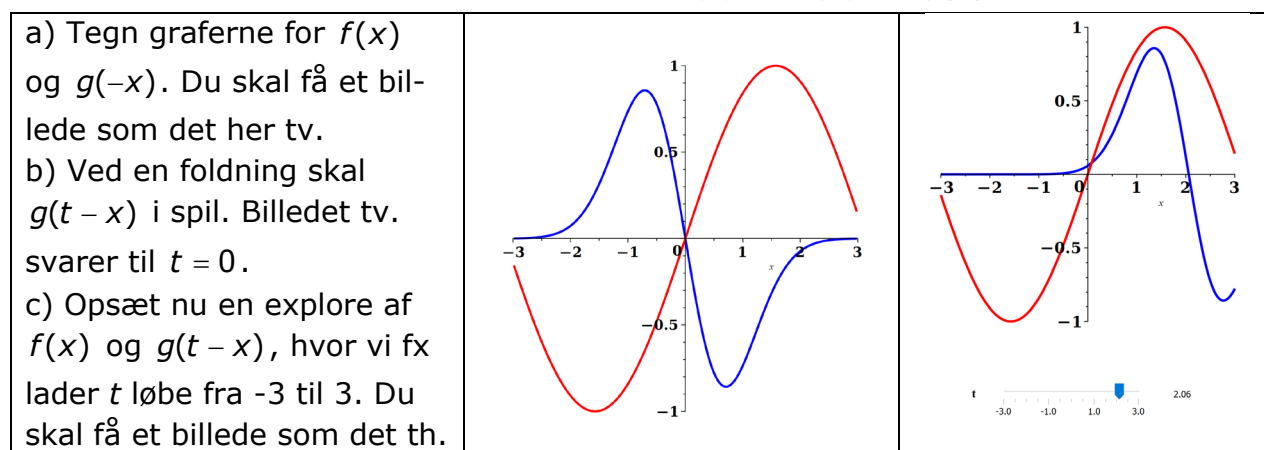
Selvom integralet umiddelbart gør det meget mere uoverskueligt, så kan vi måske af de to tegneserier få et indtryk af, hvorfor graferne, vi har tegnet i øvelse 8.4, og som du kan finde på website, "læner sig op af" nogle standardtyper, i og med at alt det skarpe – en lige linje, en parabel, der lander næste lodret på akse, en firkant funktion, der springer diskontinuert osv – alt det blødes op ved at beregne *arealer* af overlap af funktioners grafer. Dette vokser normalt mere langsomt op.

Men det er bestemt ikke let at gætte på, hvor resultatet ender, som den følgende øvelse demonstrerer. Men det var det heller ikke, da man lærte om integraler og stamfunktioner. Hvem ville uden at have en del erfaring have gættet på resultater som:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x), \quad \int \cos(x) dx = \sin(x), \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1}(x), \quad \int \tan(x) = -\ln(\cos(x)).$$

Øvelse 8.5 Undersøgelse af en foldning af to ikke-simple funktioner

Vi undersøger nu foldningen af funktionerne $f(x) = \sin(x)$ og $g(x) = 2 \cdot x \cdot e^{-x^2}$



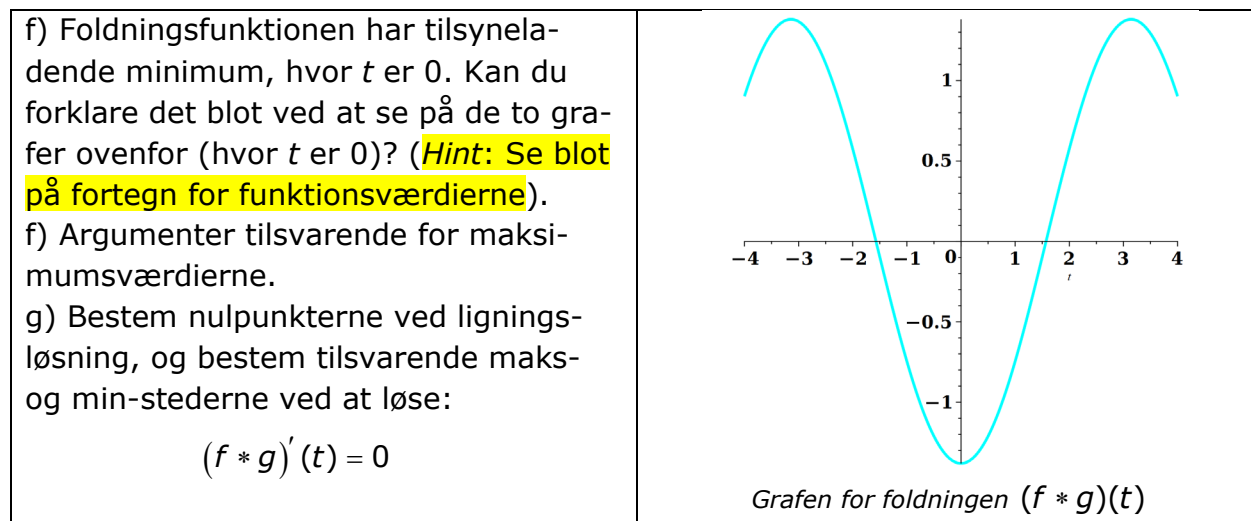
d) Udregn foldningen $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot g(t-x) dx$. Vær opmærksom på, at dit værktøj

ikke slår over i komplekse tal! Du skal få et udtryk som:

$$(f * g)(t) = -\sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{1}{4}} \cdot \cos(t)$$

At foldningen giver en cosinussvingning er nok lidt overraskende.

e) Tegn grafen for foldningen i intervallet $[-4; 4]$. Du skal få noget der ligner grafen nedenfor



8.2 Matematiske egenskaber ved foldning.

Der gælder samme regler for foldning som for addition, multiplikation og division.

Sætning: Regneregler for foldning

For alle integrable funktioner gælder følgende regneregler for foldning:

- Den kommutative regel, dvs: $f * g = g * f$
- Den associative regel, dvs: $(f * g) * h = f * (g * h)$
- Den distributive regel, dvs $f * (g + h) = f * g + f * h$

Øvelse 8.6 Bevis sætningen

- a) Vis at foldning er kommutativ ved at lave substitutionen $z = t - x$. Husk også at substituere i integrationsgrænserne. Og udnyt endelig $-\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$
- b) Vis at foldning er distributiv ved at anvende, at integration er lineær, dvs $\int (f_1 + f_2)(x) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$
- c) Beviset for, at foldning er associativ, kræver udnyttelse af en sætning om dobbeltintegraller, (*Fubinis sætning*) siger, at man må bytte om på integrationsrækkefølgen. Du kan finde dette udfoldet i et dokument på website, se [her](#) – link til 8-3

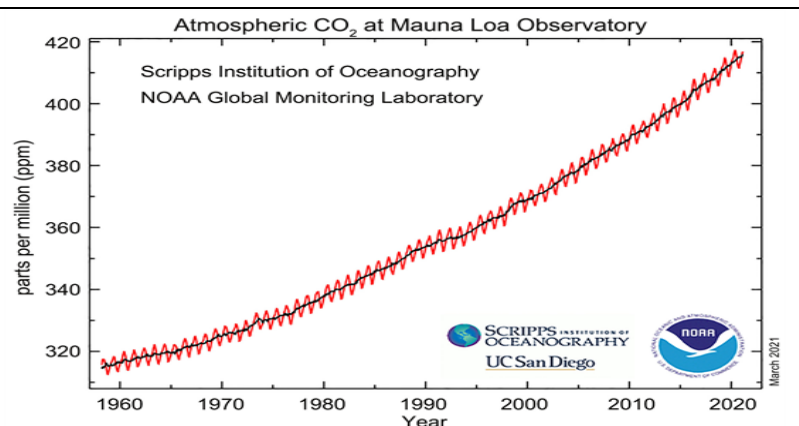
8.3 Anvendelser af foldning af kontinuerte funktioner

Vi vil her kun omtale nogle få af de mange anvendelser af foldning. Du kan på nettet finde omtalt en række andre.

8.3.1 Glidende gennemsnit

Glidende gennemsnit (eng: *moving average*) er en metode til at udjævne tilfældige udsving på en graf over tid eller rum, så vi får tendensen i det grafiske forløb klarere frem. Glidende gennemsnit udregnes som et gennemsnit over et interval $M = b - a$ som forskydes langs x-aksen. I kapitel 7 demonstreres en diskret udgave af teknikken, som dér anvendes til at udjævne tilfælde udsving i graden af fokus på en billedserie.

Det kan også være brugbart ved tidsserier, hvor man eks. vil fjerne sæsonvariation. Grafen her viser, hvordan mængden af CO₂ i atmosfæren svinger med årstiden bla. på grund af et større løvfald på den nordlige halvkugle. Ved et glidende gennemsnit over et interval på et år, frembringes den sorte kurve som viser tendensen:



kilde: NOAA (2021-b). *Sixty Years of Global CO₂ Levels, 1958 to 2018.*

Mængden af CO_2 i atmosfæren er uomtvisteligt voksende.	
--	--

Glidende gennemsnit bruges også ofte for at fjerne støj i databehandling og i lydbehandling. Ved at tage glidende gennemsnit bliver den hurtigt skiftende støj fjernet. Glidende gennemsnit er et eksempel på anvendelse af foldning. Funktionen som vi folder med for at få et glidende gennemsnit, hvor intervallet har en bredde på M , er

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{2}M \\ \frac{1}{M}, & -\frac{1}{2}M \leq x \leq \frac{1}{2}M \\ 0, & \frac{1}{2}M < x \end{cases}$$

Foldningen bliver:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot g(t-x) dx$$

Nu gælder: $t-x < -\frac{1}{2}M \Leftrightarrow t + \frac{1}{2}M < x$, og $t-x > \frac{1}{2}M \Leftrightarrow t - \frac{1}{2}M > x$,

Så faktoren $g(t-x)$ er altså 0 i intervallerne $]-\infty; t - \frac{1}{2}M]$ og $[t + \frac{1}{2}M; \infty[$.

Og imellem de to, i intervallet $[t - \frac{1}{2}M; t + \frac{1}{2}M]$ er $g(t-x)$ konstant lig med $\frac{1}{M}$. Indsættes nu dette, kan vi regne færdig:

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot g(t-x) dx \\ &= \int_{t-\frac{1}{2}M}^{t+\frac{1}{2}M} f(x) \cdot \frac{1}{M} dx \\ &= \frac{1}{M} \cdot \int_{t-\frac{1}{2}M}^{t+\frac{1}{2}M} f(x) dx \end{aligned}$$

Vi afprøver nu dette på et konkret eksempel fra lydbehandling.

Øvelse 8.7 Glidende gennemsnit af svingninger

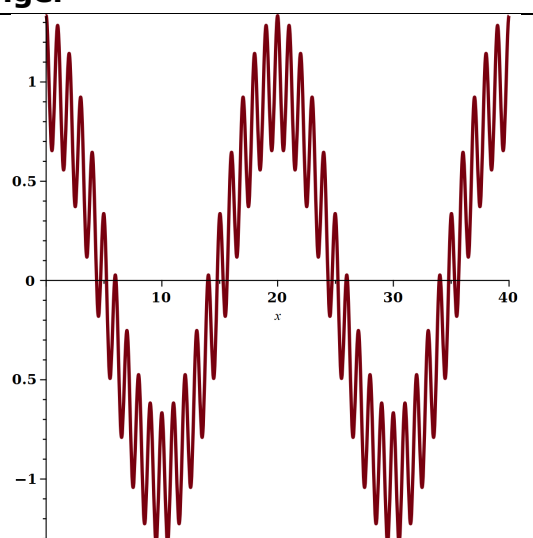
Funktionen $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{10}x\right) + \frac{1}{3}\cos(2\pi x)$ indeholder to cosinusfunktioner.

a) Tegn først graferne for de to funktioner hver for sig i samme koordinatsystem, med $x \in [0; 40]$.

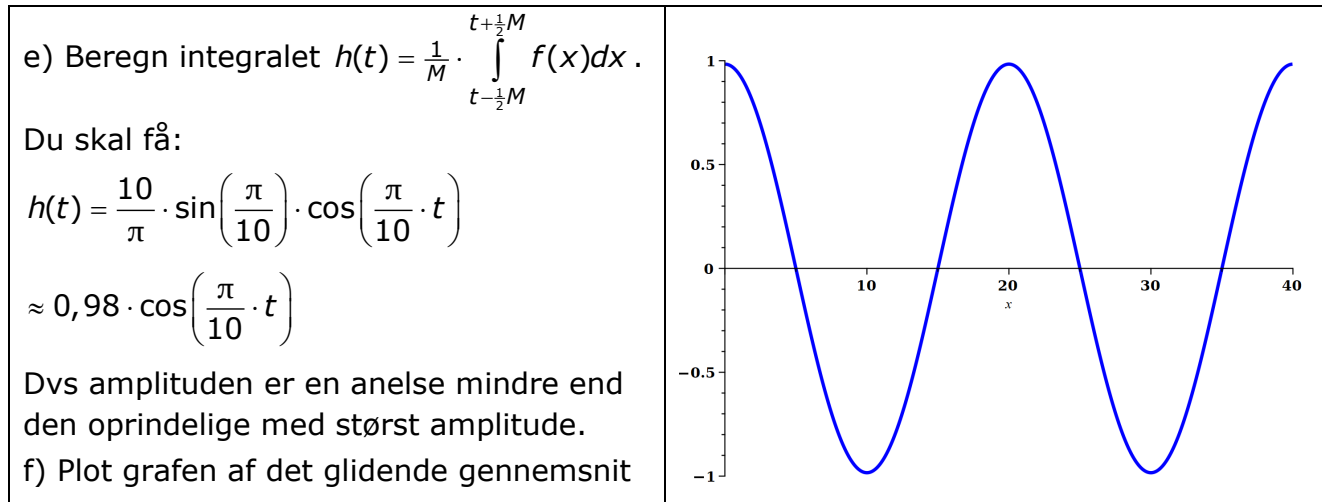
c) Angiv amplituderne for de to.

Svingningstiden er den tid det tager at gennemløbe en hel periode. Den anden af de to svingninger har en svingningstid på 1, fordi vi grafisk gennemløber én hel cosinussvingning i løbet af et sek.

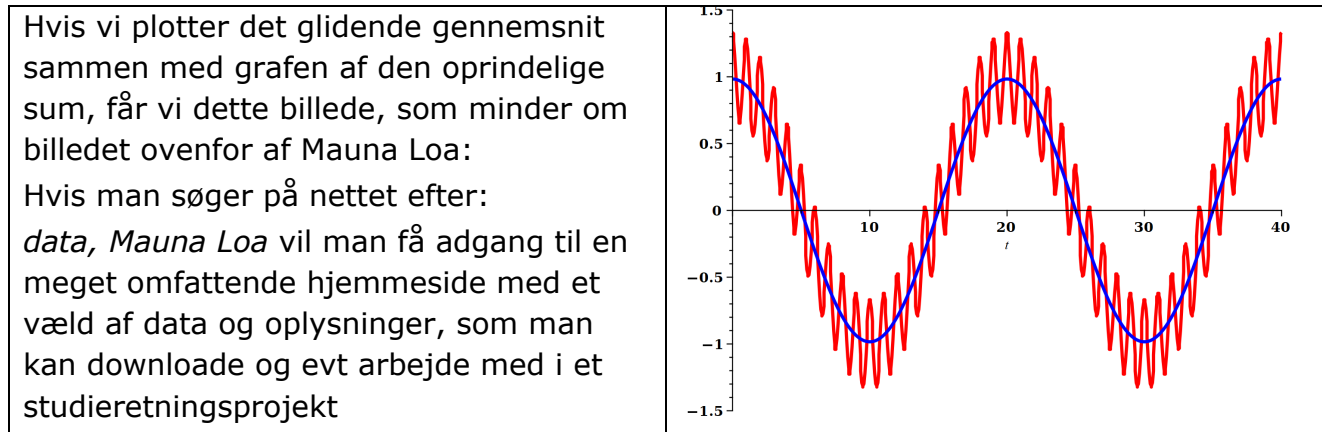
d) Hvad er svingningstiden for den første af de to svingninger?



Vi vil nu tage et glidende gennemsnit med $M = 2$.



Et studieretningsprojekt?



Øvelse 8.8

- Undersøg hvordan foldningen ændrer sig når man ændrer konstanten M ved at tegne grafen ved forskellige værdier $M : \{1, 4, 6, 8, 10, 16, 20\}$
- Hvorfor bliver amplituden på den blå svingning *mindre* når M bliver *større*?

8.3.2 Low Pass filter og High pass filter

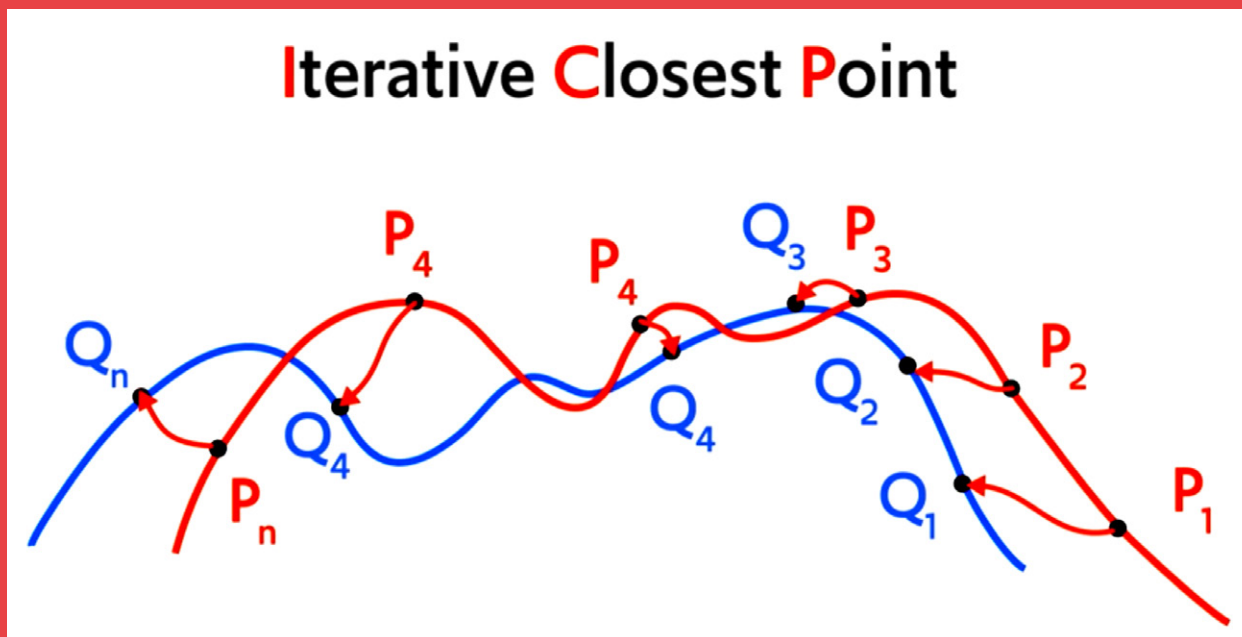
Elektronisk kan man fjerne højfrekvent støj med et såkaldt **Low Pass filter**, hvor kun de lave frekvenser kommer igennem. Et Low Pass filter gør præcis det samme som foldningen ovenover.

Hvis man i stedet vil have de hurtige svingninger, men fjerne de langsomme kan det gøres ved at trække det glidende gennemsnit fra det oprindelige signal. Hvis $f(t)$ er det oprindelige signal og $h(t)$ det glidende gennemsnit er **high pass filtret** $f(t) - h(t)$.

Elektroniske filtre indgår i filmen om B&O og materialerne hertil.

9.

icp - Mindste kvadraters metode



I den stationære Lab-scanner har man styr på, hvorfra de forskellige subscans blev taget, og kan derfor med koordinattransformationer få disse lagt ind i samme koordinatsystem og dér stykket sammen. For Trios scanneren har man ikke styr på, hvilken bevægelse denne har fulgt, da tandlægen kørte den rundt i munden. Det er derfor en anden teknik, der skal udnyttes til at sammenstykke de forskellige subscans. I filmen præsenterer Søren Knudby denne algoritme, der hedder *Iterative Closest Point*. Billederne tages i hastig rækkefølge, og holder vi et bestemt scan fast, så flyttes det næste hen over punkter, der "passer sammen", ved hjælp af en afbildning, der består af parallelforskydninger og rotationer. Hvilke rotationer mv, vi skal vælge, fastlægges af en mindste kvadraters metode. Det iterative i algoritmen er nu, at når den første rotation og parallelforskydning er fastlagt, så gentages processen! Indtil afstanden mellem de to scan er mindre end en fastlagt tolerance. Så stykkes de sammen og næste billede undergår nu samme proces.

9. Subscans stykkes sammen vha. icp-algoritmen

9.1 Algoritmen Iterative Closest Point

I filmens sidste del ($t = 32.50$ og frem) beskrives, hvordan triosscanneren med tilhørende software danner punktskyen ved hjælp af algoritmen Iterative Closest Point (ICP). I dette afsnit går vi lidt mere i dybden med, hvordan det virker. I første del ser vi på, hvordan det virker i 2 dimensioner, og i andet afsnit tager vi så skridtet til 3D. Den grundlæggende idé i ICP er, at når man skal matche to subscans, der er "taget" i umiddelbar nærhed af hinanden, gør man følgende:

1. Først sammenparrer man punkterne i det sidste subscan med deres nærmeste naboer i første subscan.
2. Derefter finder man den rotation og parallelforskydning af 2. subscan, der gør summen af kvadraterne på afstanden mellem sammenparrede punkter mindst mulig. Der er altså tale om en *mindste kvadraters metode* – du kan finde et materiale om dette [her link til 9-1](#)
3. Nu flyttes og roteres alle punkter fra subscan 2 ved den fundne rotation og parallelforskydning, og man går til punkt 1 og foretager en ny sammenparring.

Man gentager nu denne procedure, indtil kvadratsummen er mindre end en fastlagt mindste tolerance, og har derved fundet den position og orientering af det andet subscan, der placerer det korrekt i forhold til første subscan.

Som vi allerede har set, er en rotation en lineær afbildning, men når der nu også skal parallelforskydes, har vi brug for begrebet affine afbildninger.

9.2 Affine afbildninger

Definition på affin afbildning

En affin afbildning er en afbildning fra et vektorrum ind i sig selv, der har formen:

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

hvor A er en kvadratisk rotationsmatrix og $\mathbf{b}$ er en parallelforskydningsvektor.

Øvelse 9.1 Affine afbildninger og lineære afbildninger

Vis, at for $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ er afbildningen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ ikke lineær.

Da vi kiggede på rotationsafbildninger, var udgangspunktet hele tiden, at vi roterede om origo. Når triosscanneren føres rundt inde i munden bliver den drejet om alle mulige forskellige punkter, som vi ikke har styr på. Man kan derfor spørge, om vi så kan beskrive alle disse drejninger ved udelukkende at rotere om origo. Svaret er ja! Når vi har lov til at parallelforskyde det roterede objekt *efter* rotationen, kan vi kompensere for at rotationen foregår om origo:

$$R_O(v) \cdot \text{objekt} + \mathbf{b} = R_P(v) \cdot \text{objekt} \Leftrightarrow \mathbf{b} = R_P(v) \cdot \text{objekt} - R_O(v) \cdot \text{objekt} = (R_P(v) - R_O(v)) \cdot \text{objekt}$$

Notationen her skal forstås på den måde, at vi anvender rotationsmatricerne R_O og R_P begge beregnet med vinklen v på alle punkter i objektet. Den opmærksomme læser

bemærker selvfølgelig straks, at denne notation er noget dunkel og spørger sig selv, om det virkelig kan passe, at alle punkter i objektet giver samme konstante vektor **b**?

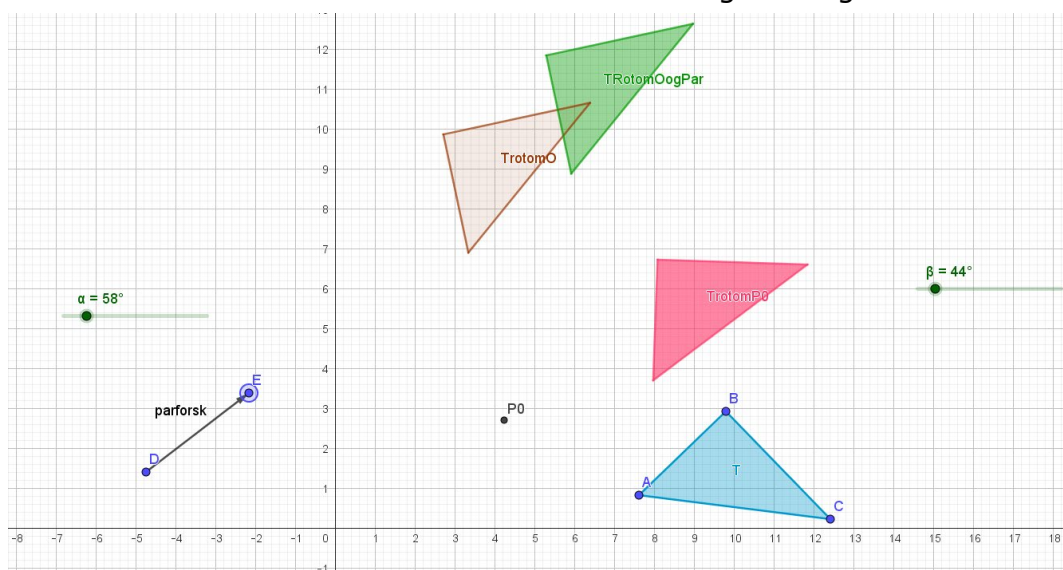
Vi beviser det ikke her. I stedet gennemfører vi i det følgende en række "spil" i geogebra, hvor vi overbeviser os selv om, at det er tilfældet.

9.3 Drejning og parallelforskydning i 2D

9.3.1 Drejning og parallelforskydning af trekanter i 2D - Et spil i Geogebra

Hent filen, du skal bruge, [her: link til 9.2](#). Eller direkte her: <https://www.geogebra.org/m/jr4mzcbm>

Det er et spil med to deltagere, **alfa** og **beta**. Spilleren **beta** starter med at trække i den blå trekant, til den har den form, spilleren ønsker. Derefter vælger **beta** et centrum for rotationen af den blå trekant T ved at trække i punktet P0. Endelig vælger **beta** en rotationsvinkel ved at trække i β -skyderen. Den røde trekant viser, hvordan den blå trekant er blevet roteret som resultat af **beta**'s valg – se figuren:



Nu er det så **alfa**'s tur. Først demonstrerer vi **alfa**'s muligheder: **Alfa** kan rotere den blå trekant om **origo**. Dette kunne fx resultere i den brune trekant. **Alfa** kan også parallelforskyde sin trekant ved at trække i parallelforskydningsvektoren DE. Den brune trekant kunne således parallelforskydes, så **alfa** danner den grønne trekant. Den grønne trekant er altså resultatet af en rotation af den blå trekant om origo efterfulgt af den valgte parallelforskydning.

Alfa vinder nu, hvis han kan placere den grønne trekant eksakt oveni den røde – ellers vinder beta.

I næste runde byttes rollerne om, og spillet fortsætter til I har overbevist jer selv om, at det altid kan lade sig gøre at ramme den røde trekant præcist.

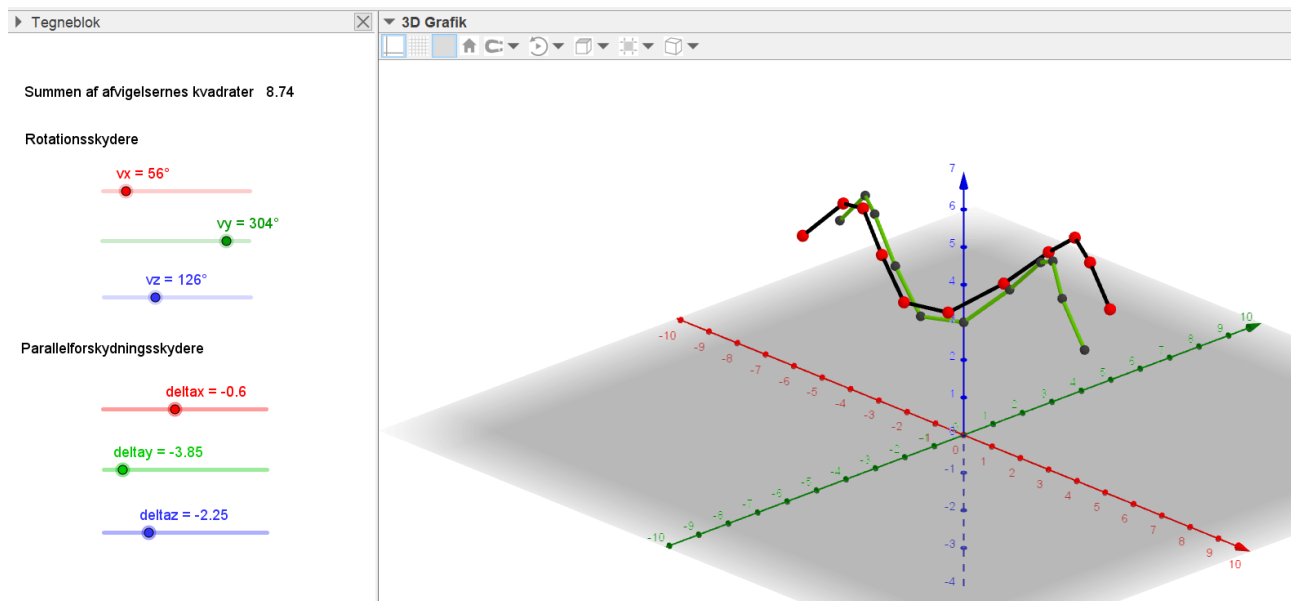
Nu er det jo ikke en pæn trekant, vi skal ramme med vores rotation og parallelforskydning. I den virkelige verden er det en punktsky fra et første subscan, der skal rammes via en rotation og parallelforskydning udført på et andet subscan. Og begge subscans indeholder tusindvis af punkter, der alle er i 3 dimensioner. Det er let at se, at dette ikke er helt let!

Vi skal derfor gennem en række skridt for at nå frem til at kunne behandle *drejning og parallelforskydning af subscans i 2D* – og som ovenfor gennemføres dette som et spil i Geogebra.

9.3.2 Parallelforskydning af subscans i 2D - Et spil i Geogebra

Start med at orientere dig i problemstillingen ved at hente filen, du skal bruge [her](https://www.geogebra.org/m/ha8ckx7b): (link til 9.3). Eller direkte her: <https://www.geogebra.org/m/ha8ckx7b>.

Du får denne figur frem:



Her er de sorte punkter på den grønne kurve fra subscan 1. De røde punkter på den sorte kurve er fra subscan 2. Vi kan gennemføre rotationer om alle akser og parallelforskydning langs alle tre akser af subscan 2 ved hjælp af skyderne til venstre. Du kan også rotere koordinatsystemet (synsvinklen) ved at højreklikke og trække.

I dette spil kan vi ikke få de to subscans til at ligge præcist oven i hinanden, så opgaven er at komme så tæt på som muligt. "Så tæt på" måles med *mindste kvadraters metode* – se evt linket først i kapitlet.

Øverst til venstre er vist summen af afvigelsers kvadrater. Du **vinder**, hvis du kan få de to punktskyer til at matche så godt, at kvadratsummen kommer under 0,25.

Vi starter med den simplest mulige situation, hvor vi kun har to Q-punkter og to P-punkter, der alle ligger på 1.-aksen. Og her kan der selvfølgelig kun være tale om parallelforskydninger.

Parallelforskydning af subscan med to punkter i 1D

Givet punkterne fra subscan 1: $Q_1(0,0)$, $Q_2(3,0)$ og tilsvarende punkter fra subscan 2: $P_1(1,0)$, $P_2(4.5,0)$

a) Sammenpar punkterne, og beregn summen af afvigelsers kvadrater KS.

Nu parallelforskydes alle punkterne i 2. subscan med en vektor $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$.

- b) Opstil et beregningsudtryk $KS(x)$ for kvadratafgivelsen som funktion af x og vis, at det kan reduceres til: $KS(x) = 2x^2 + 5x + 3,5$
- c) Bestem den vektor $\mathbf{p}$, der minimerer kvadratsummen, og bestem den mindst mulige værdi af kvadratsummen

Næste skridt er at se på et vilkårligt antal punkter i rummet. Og vi ser stadig kun på parallelforskydninger.

Parallelforskydning af subscan med n punkter i 1D

Vi kigger nu på n punkter i hvert subscan og en vilkårlig parallelforskydningsvektor $\mathbf{p}$.

Kvadratsummen på afvigelserne mellem punkterne som funktion af $\mathbf{p}$ er følgende:

$$KS(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \|f_{\mathbf{p}}(P_i) - Q_i\|^2$$

- a) Forklar hvad formelen udtrykker. Du skal herunder overveje
- Hvilke punkter kommer fra henholdsvis subscan 1 og 2
 - Hvor mange koordinater har punkterne i de to subscans
 - Hvor mange punkter er der i de to subscans?
 - Er punkterne i formelen allerede parret sammen, eller skal vi selv finde en sammenparring?
 - Hvilke punkter bliver parallelforskudt - P eller Q punkterne?
- b) Argumentér for, at når punktet P_i parallelforskydes, får det koordinaterne

$$f_{\mathbf{p}}(P_i) = \overrightarrow{OP_i} + \mathbf{p}$$

I det følgende vil vi anvende notationen $\mathbf{P}_i = \overrightarrow{OP_i}$ for stedvektoren til punkterne P_i og tilsvarende for punkterne Q_i

- c) Vis, at udtrykket $\|f_{\mathbf{p}}(P_i) - Q_i\|^2$ kan omskrives til

$$\|f_{\mathbf{p}}(P_i) - Q_i\|^2 = \|\mathbf{p}\|^2 + 2(\mathbf{P}_i - \mathbf{Q}_i) \cdot \mathbf{p} + \|\mathbf{P}_i - \mathbf{Q}_i\|^2$$

- d) Vis, at kvadratsummen $\sum_{i=1}^n \|f_{\mathbf{p}}(P_i) - Q_i\|^2$ bliver til

$$KS(\mathbf{p}) = n \cdot \|\mathbf{p}\|^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n (\mathbf{P}_i - \mathbf{Q}_i) \right) \cdot \mathbf{p} + \sum_{i=1}^n \|\mathbf{P}_i - \mathbf{Q}_i\|^2 \quad (1)$$

I én dimension bliver udtrykket (1) til et almindeligt andengradspolynomium:

$$KS(\mathbf{p}) = KS(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

- e) Forklar hvad a , b og c står for i denne forskrift
- f) Bestem et beregningsudtryk for den parallelforskydning x , der giver den mindst mulige kvadratafgivelse
- g) Bestem et udtryk for den mindst mulige kvadratafgivelse.

Øvelse 9.2 Mindste kvadratafgivelse i 1D

Hent Excel filen "mindstekvadrater 1d parallelforskydning.xls" [her-link til 9.4](#). I denne har vi listet koordinaterne for to subscans, der næsten passer sammen. Punkterne er allerede parret sammen, og man har mulighed for selv at vælge en parallelforskydning "x" for subscan 2 i det gule felt – se figuren herunder:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1									Subscan 2	kvadratafgivelse		
2	Parallelforskydning	x =	-4,3		Subscan 1	Subscan 2			parallelforsku	Subscan 2 parallelforsku		
3					Q-punkter	P-punkter	2(P-Q)	(P-Q)^2	P+x	(P+x-Q)^2		
4		Kvadratsum		1	-5	-2,605	4,79	5,736025	-6,915	3,667225		
5	Afvigelse Subscan 2 fra subscan 1 oprindelig	85,977575		2	-4,1	-1,75	4,7	5,5225	-6,06	3,8416		
6				3	-3,2	-0,44	5,52	7,6176	-4,75	2,4025		
7	Afvigelse Subscan 2 forskudt med x fra subscan 1	39,946775		4	-2,3	0,355	5,31	7,049025	-3,955	2,739025		
8				5	-1,4	1,115	5,03	6,325225	-3,195	3,222025		
9				6	-0,5	2,3	5,6	7,84	-2,01	2,2801		
10				7	0,4	3,125	5,45	7,425625	-1,185	2,512225		
11				8	1,3	4,02	5,44	7,3984	-0,29	2,5281		
12				9	2,2	4,535	4,67	5,452225	0,225	3,900625		
13				10	3,1	5,9	5,6	7,84	1,59	2,2801		
14				11	4	6,45	4,9	6,0025	2,14	3,4596		
15				12	4,9	7,385	4,97	6,175225	3,075	3,330625		
16				13	5,8	8,165	4,73	5,593225	3,855	3,783025		
17							66,71	85,97758		39,94678		

- Justér på x i regnearket, så du får en kvadratafgivelsessum under 5.
- Prøv at **beregne** den parallelforskydning, der giver den mindste kvadratafgivelsessum ved at aflæse koefficienterne a , b og c til andengradspolynomiet:

$KS(\mathbf{p}) = KS(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ og bruge f.eks. toppunktsformlen for andengradspolynomier.

Parallelforskydning af subscan med n punkter i 3D

I 2 og 3 dimensioner må vi behandle udtrykket (1) som en funktion af flere variable. Metoden til at finde den optimale parallelforskydning er heldigvis den samme: Vi skal finde det stationære punkt for (1) ved at differentiere partielt og sætte gradienten lig nulvektoren: $\nabla KS(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$

Vi indfører nu betegnelsen $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ for parallelforskydningsvektoren og tilsvarende be-

tegnelsen $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i - \mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix}$ for summen af punktafgivelserne.

Øvelse 9.3 Beregning af den mindste kvadratafgivelse i 3D

- Vis, at gradienten af (1) bliver $\nabla KS(\mathbf{p}) = 2n \cdot \mathbf{p} + 2 \left(\sum_{i=1}^n (\mathbf{P}_i - \mathbf{Q}_i) \right)$
- Vis, at ligningen $\nabla KS(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ har den entydige løsning $\mathbf{p} = -\frac{1}{n} \cdot \mathbf{S}$
- Gør rede for, hvorfor der **ikke** gælder: $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = \sum_{i=1}^n \|\mathbf{P}_i - \mathbf{Q}_i\|^2$

d) Vis, at den mindst mulige værdi for kvadratsummen bliver: $\sum_{i=1}^n \|\mathbf{P}_i - \mathbf{Q}_i\|^2 - \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}}{n}$

9.3.3 Rotationer af subscans i 2D

(Bemærk, at i dette afsnit trækker vi på en viden om matrix-beskrivelse af rotationer, se kap 5 afsnit 5.2)

Nu ser vi på, hvordan kvadratsummen kan minimeres ved rotationer. Vi starter igen med simpelt eksempel, men er selvfølgelig nødt til at gå ud i 2 dimensioner for at rotationer skal give mening:

Øvelse 9.4 Minimering af Kvadratsummer ved rotation af to punkter i 2d

Givet punkterne fra subscan 1: $Q_1(0,3)$, $Q_2(3,2)$ og tilsvarende punkter fra subscan 2: $P_1(1,3)$, $P_2(4,1)$

a) Sammenpar punkterne, og beregn summen af afvigelses kvadrater KS

Nu roteres punkterne i 2. subscan om Origo med vinklen v .

b) Opskriv matricen for denne lineære afbildning.

c) Vis, at punkterne fra subscan 2 sendes over i koordinaterne:

$$f_v(P_1) = \begin{pmatrix} \cos(v) - 3 \sin(v) \\ \sin(v) + 3 \cos(v) \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad f_v(P_2) = \begin{pmatrix} 4 \cos(v) - \sin(v) \\ 4 \sin(v) + \cos(v) \end{pmatrix}$$

d) Vis, at kvadratafgigelsen for det første punkt $\|f_v(P_1) - Q_1\|^2$ kan reduceres til:

$$\|f_v(P_1) - Q_1\|^2 = 19 - 6 \sin(v) - 18 \cos(v)$$

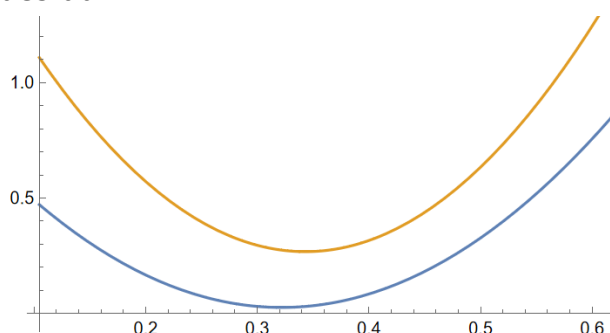
Beregningerne er lidt hårde med håndkraft alene, men du kan sikkert få hjælp af dit CAS-værktøj ved at anvende "Expand", og/eller "Simplify". I Ti-Nspire ser kommandoen f.eks. således ud, hvis man vil reducere kvadratafgigelsen for det roterede P_2 :

$$\text{expand}((4 \cdot \cos(v) - \sin(v) - 3)^2 + (4 \cdot \sin(v) + \cos(v) - 2)^2)$$

e) Vis, at kvadratafgigelsen for det andet punkt $\|f_v(P_2) - Q_2\|^2$ kan reduceres til

$$\|f_v(P_2) - Q_2\|^2 = 30 - 10 \sin(v) - 28 \cos(v)$$

Et plot af de to kvadratafgigelser som funktion af rotationsvinklen (i radianer) ser således ud:



Læg mærke til, at det *ikke* er den samme rotationsvinkel, der minimerer de to kvadratafgivelser.

- f) Opstil et beregningsudtryk $KS(v)$ for kvadratafgivelsen som funktion af v og vis, at det kan reduceres til: $KS(v) = 49 - 16 \sin(v) - 46 \cos(v)$
- g) Bestem den vinkel, der minimerer kvadratsummen, og sammenlign denne med de to vinkler fra figuren ovenfor, der minimerer hvert af leddene.

Øvelse 9.5 Minimering af Kvadratsummen ved rotation af n punkter i 2d

Vi kigger nu på den generaliserede kvadratsum (KS) som funktion af en vilkårlig rotationsvinkel (om origo) v :

$$KS(v) = \sum_{i=1}^n \|f_v(\mathbf{P}_i) - \mathbf{Q}_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|A_v \cdot \mathbf{P}_i - \mathbf{Q}_i\|^2, \text{ hvor} \quad (2)$$

$$A_v = \begin{pmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{pmatrix} \text{ er rotationsmatricen for vinklen } v.$$

Vi indfører nu koordinater for punkterne $\mathbf{P}_i$ og $\mathbf{Q}_i$

$$\mathbf{P}_i = \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \end{pmatrix} \text{ og } \mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} q_{i1} \\ q_{i2} \end{pmatrix}$$

- a) Vis, at punkterne $\mathbf{P}_i$ sendes over i koordinaterne

$$f_v(\mathbf{P}_i) = A_v \cdot \mathbf{P}_i = \begin{pmatrix} p_{i1} \cos(v) - p_{i2} \sin(v) \\ p_{i1} \sin(v) + p_{i2} \cos(v) \end{pmatrix}$$

- b) Vis, at hvert led $\|A_v \cdot \mathbf{P}_i - \mathbf{Q}_i\|^2$ i summen (2) kan reduceres til

$$\begin{aligned} & \|A_v \cdot \mathbf{P}_i - \mathbf{Q}_i\|^2 \\ &= (p_{i1} \cos(v) - p_{i2} \sin(v) - q_{i1})^2 + (p_{i1} \sin(v) + p_{i2} \cos(v) - q_{i2})^2 \quad (a) \\ &= (p_{i1} \cos(v) - p_{i2} \sin(v))^2 + q_{i1}^2 - 2 \cdot (p_{i1} \cos(v) - p_{i2} \sin(v)) \cdot q_{i1} \quad (b) \\ &\quad + (p_{i1} \sin(v) + p_{i2} \cos(v))^2 + q_{i2}^2 - 2 \cdot (p_{i1} \sin(v) + p_{i2} \cos(v)) \cdot q_{i2} \\ &= p_{i1}^2 \cos^2(v) + p_{i2}^2 \sin^2(v) - 2 \cdot p_{i1} \cos(v) \cdot p_{i2} \sin(v) \quad (c) \\ &\quad + p_{i2}^2 \sin^2(v) + p_{i2}^2 \cos^2(v) + 2 \cdot p_{i1} \sin(v) \cdot p_{i2} \cos(v) \\ &\quad + q_{i1}^2 + q_{i2}^2 \\ &\quad - 2 \cdot (p_{i1} \cdot q_{i1} \cdot \cos(v) - p_{i2} \cdot q_{i1} \cdot \sin(v) + p_{i1} \cdot q_{i2} \cdot \sin(v) + p_{i2} \cdot q_{i2} \cdot \cos(v)) \\ &= p_{i1}^2 \cdot (\cos^2(v) + \sin^2(v)) + p_{i2}^2 \cdot (\sin^2(v) + \cos^2(v)) \quad (d) \\ &\quad + q_{i1}^2 + q_{i2}^2 \\ &\quad - 2 \cdot (p_{i1} \cdot q_{i1} \cdot \cos(v) + p_{i2} \cdot q_{i2} \cdot \cos(v)) - 2 \cdot (p_{i1} \cdot q_{i2} \cdot \sin(v) - p_{i2} \cdot q_{i1} \cdot \sin(v)) \\ &= p_{i1}^2 + p_{i2}^2 + q_{i1}^2 + q_{i2}^2 - 2 \cdot (p_{i1} \cdot q_{i1} + p_{i2} \cdot q_{i2}) \cdot \cos(v) - 2 \cdot (p_{i1} \cdot q_{i2} - p_{i2} \cdot q_{i1}) \cdot \sin(v) \quad (e) \\ &= \|\mathbf{P}_i\|^2 + \|\mathbf{Q}_i\|^2 - 2\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{Q}_i \cos(v) - 2 \det(\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i) \sin(v) \quad (f) \end{aligned}$$

c) Man kan prøve at tage sit CAS-værktøj til hjælp her! Men selv om værktøjet naturligtvis regner korrekt, er det ikke altid den giver det resultat, man ved, man skal få. Reduktioner og omskrivninger kan tage flere veje. Det er en god ide at prøve selv at nå frem til resultatet. Ovenfor er det foldet betydeligt ud, men alligevel kræves der en del argumenter. Giv selv en forklaring på, hvad der sker i hvert trin af omskrivningerne, fra (a) til (f).

d) Argumentér for, at hele kvadratsummen $KS(v) = \sum_{i=1}^n \|A_v \cdot \mathbf{P}_i - \mathbf{Q}_i\|^2$ vil have formen

$$KS(v) = A + B \cos(v) + C \sin(v)$$

og gør rede for, hvad de tre konstanter A , B og C står for.

e) Vis, at den vinkel v , der minimerer kvadratsummen, kan findes ved den pæne formel

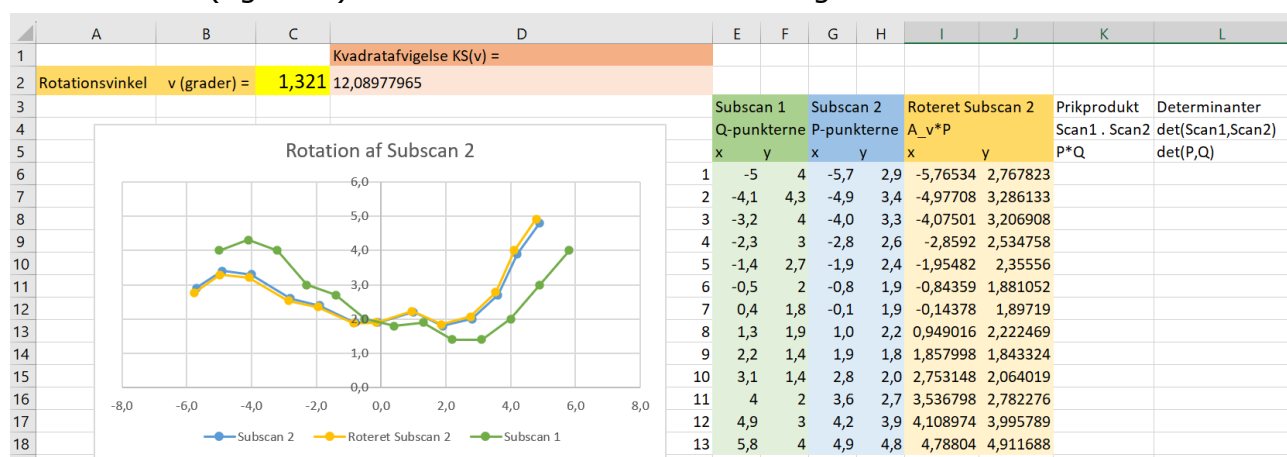
$$\tan(v) = \frac{\sum_{i=1}^n \det(\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{Q}_i} \quad (3)$$

f) Formulér med ord hvad formelen ovenfor udtrykker og diskutér under hvilke forhold formelen gælder.

Lad os prøve at teste formlerne med en lille opgave

Øvelse 9.6 Den optimale rotationsvinkel

I regnearket "Rotation i 2D.xls", som du kan hente [her-link til 9.5](#) har vi med grønt og blå markeret subscan 1 og 2 og i det gule felt har vi mulighed for selv at vælge en rotationsvinkel (i grader) – der resulterer i det roterede gule subscan 2:



Kvadratsummen $KS(v)$ er beregnet i det lyserøde felt ved siden af vinklen.

a) Juster på rotationsvinklen så kvadratsummen $KS(v)$ kommer under 0,25

I regnearket er der også blevet gjort klar til, at du kan beregne prikprodukt og determinanter mellem vektorerne fra subscan1 og 2.

- b) Beregn prikproduktet $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}_1$ determinanten $\det(\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1)$ i de tilhørende felter. Du skal gerne få:

Prikprodukt	Determinanter
Scan1 . Scan2	$\det(\text{Scan1}, \text{Scan2})$
$\mathbf{P}^* \mathbf{Q}$	$\det(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$
40,1	-8,3

- c) Beregn - ved at trække de to felter ned – alle prikprodukter og determinanter samt tilhørende summer. Du bør få:

$$\sum_{i=1}^{13} \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{Q}_i \approx 255,13 \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^{13} \det(\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i) \approx -49,54$$

- d) Beregn den optimale drejningsvinkel ved formel (3) og bestem den mindste kvadratafgivelse. Du bør få $KV_{\min} \approx 0,1395$

9.4 ICP i tre dimensioner

I tre dimensioner skal der bruges 3 parametre til at beskrive en rotation samt tre koordinater for at beskrive en parallelforskydning. Kvadratsummen bliver altså en funktion af seks variable, og da den samtidig indeholder flere tusind led (3 for hvert punkt), bliver det i praksis umuligt at nedskrive pæne resultater for kvadratsummen og dens afledte. I stedet for at "differentiere korrekt" vil man her typisk bruge software, der differentierer numerisk, og på den måde kunne finde en tilnærmet værdi for vinklerne, der optimerer kvadratsummen.

Proceduren er i princippet enkel. Lad som før $KS(v_x, v_y, v_z, p_x, p_y, p_z)$ stå for summen af de kvadratiske afvigelser af subscan 2 fra subscan 1.

De seks variable $v_x, v_y, v_z, p_x, p_y, p_z$ beskriver, hvor meget scan 2 roteres om de tre akser og efterfølgende parallelforskydes langs de tre akser. For at holde notationen enkel og intuitiv indfører vi forkortelsen $\mathbf{x}_0 = (v_x, v_y, v_z, p_x, p_y, p_z)$. ICP fungerer nu efter følgende algoritme:

- 1) Først bestemmes gradienten $\nabla KS(\mathbf{x}_0)$ ved *numerisk differentiation* med udgangspunkt i det aktuelle scan2

Gradienten har generelt den egenskab, at den peger i den retning hvor funktionen, som den er gradient for, vokser stejlest, så derfor beregner vi nu KS i gradientens retning:

- 2) Opstil $KS(\mathbf{x}_0 + t \cdot \nabla KS(\mathbf{x}_0))$. Dette er nu en funktion af kun én variabel nemlig t

- 3) Find minimumsstedet (t -værdien) for $KS(\mathbf{x}_0 + t \cdot \nabla KS(\mathbf{x}_0))$

- 4) Beregn de rotationsvinkler og parallelforskydningskoordinater

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + t \cdot \nabla KS(\mathbf{x}_0),$$

der giver den mindste kvadratsum.

- 5) Rotér og parallelforskyd scan 2 ved hjælp af den fundne $\mathbf{x}_1$

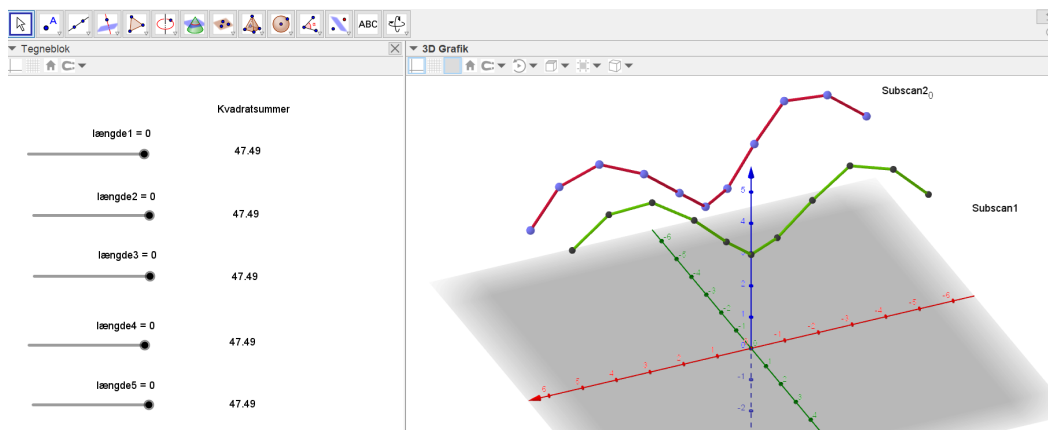
Gentag proceduren og generer på denne måde $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n$ indtil kvadratafgivelsen er mindre, end en fastlagt tolerance. Nu er subscan 2 ved nogle få flytninger og parallelforskydninger lagt oven på subscan 1.

I filen "Tandkurveopgave ICP.ggb", som du kan hente [her-link til 9.6](#), kan du få et indtryk af hvordan algoritmen virker:

Øvelse 9.7

I venstre side kan du trække i længde1 skyderen, der bestemmer hvor langt du går i den første gradients retning.

a) Justér længde1 skyderen, så den viste første kvadratsum bliver mindst mulig



b) Fortsæt med at justere de næste skydere én en efter én, så den tilhørende kvadratsum minimeres

Det er vanskeligt indenfor den præcision, man kan opnå med skyderne, at "ramme" subscan 1 helt præcist og få kvadratsummen helt ned på 0.

c) Men: Fortsæt indtil kvadratsummen kommer ned på eller under 0,3

9.4.1 Numerisk differentiation

Når man – som det her er tilfældet her – skal differentiere "meget besværlige" funktioner, gør man i praksis ofte det, at man benytter *sekanthældningen* for funktionen f i stedet for den korrekt differentierede f' :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\text{numdiff1})$$

Hvis man benytter tilpas små værdier af parameteren h , giver sekanthældningen et resultat, der kun afviger ganske lidt fra den korrekte værdi af den afledte.

Øvelse 9.8

Overvej, hvorfor sekanthældningen giver ok estimater for f' . Hvordan er det nu den afledte funktion er defineret?

Imidlertid kan man få endnu bedre estimater for f' , hvis man benytter formlen

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (\text{numdiff2})$$

Øvelse 9.9

Undersøg for hver af funktionerne herunder, hvilken af formlerne (numdiff1) og (numdiff2) der giver det bedste resultat for $f'(2)$, når $h = 0,1$

- a) $f(x) = x^2$
- b) $f(x) = e^x$
- c) $f(x) = \sin(x)$

Øvelse 9.10

Det er her en fordel at bruge sit CAS-værktøj!

En funktion er givet ved $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2x + 2y^2 + 6y + 3z^2 - 18z + 32$

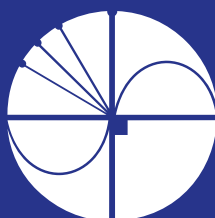
- a) Beregn gradienten $\nabla f(2, 2, 2)$ af funktionen f i punktet $(2, 2, 2)$.
- b) Opstil forskriften for funktionen $g(t) = f((2, 2, 2) + t \cdot \nabla f(2, 2, 2))$ og vis, at funktionen kan reduceres til: $g(t) = 1216t^2 + 460t + 44$.
- c) Find den t -værdi t^* , der minimerer funktionen $g(t)$.
- d) Bestem koordinatsættet $\mathbf{x}_1 = (2, 2, 2) + t^* \cdot \nabla f(2, 2, 2)$.
- e) Gentag proceduren med udgangspunkt i $\mathbf{x}_1$, indtil du har fundet det globale minimum for funktionen f . Du skulle gerne ende meget tæt på punktet $(1, -2, 3)$

Projektet **Træk virksomhederne ind i undervisningen** fortæller, hvordan matematik er uundværlig for avancerede virksomheder i et moderne samfund. I filmene besøger Casper og Nicoline 12 forskellige virksomheder og lærer noget om den matematik, de anvender.

Casper og Nicoline møder ansatte, der er med helt i front af det matematiske arbejde: statistikere, ingeniører, matematik-økonomer, epidemiologer m.fl. Alle har uddannelser med et betydelig matematisk indhold.

Til hver film kan du downloade undervisningsmaterialer. Her finder du øvelser, opgaveforløb, projekter og oplæg til studieretningsprojekter. Materialerne er opdelt i tre niveauer af sværhedsgrad fra 9 kl til 3 g. Emnerne er inspireret af filmen om virksomheden og den anvendte matematik, men man kan arbejde med materialet uden at have filmen kørende.

Hæftet om Matematikken bag moderne dental teknologi hos 3Shape knytter sig til filmen af samme navn.



**matematik
i arbejde**