ISBN 9788770669184

L&R Uddannelse EGMONT

Uddrag af forord til *Hvad er matematik*? *Opgavebog* 3

(*Opgavebogen er under udarbejdelse. Indtil opgavebogen ligger færdigproduceret henvises til kapitlerne i de tidligere opgavebøger. Afsnittene med "Kontrolspørgsmål til kapitel X" vil indgå i opgavebogen og lægges samtidig særskilt ud her på website*).

…

Alle kapitler har fået en ny facilitet i forhold til de tidligere opgavebøger til C, B og A, nemlig et afsnit 0:

- Kontrolspørgsmål til kapitel X:
  Teori, metoder og grundlæggende viden du skal kende

Dette afsnit er først og fremmest tænkt som en hjælp til den daglige lektielæsning og til en afsluttende repetitionsfase. Afsnit 0 retter sig altså i lige så høj grad til fagets mundtlige dimension som til den skriftlige.

Vi har bestræbt os på at skrive grundbogen, så eleverne faktisk kan læse en matematisk tekst. Men for enhver faglig tekst gælder, at første gang man læser den, er det svært at vide, hvad der er de vigtigste begreber og oplysninger i teksten. Hvad er det især man skal have tilegnet sig, efter at have læst teksten. Det fremgår af spørgsmålene i afsnit X.0.

Eleverne kan således med spørgsmålene selv evaluere, om de har styr på det faglige emne. Og lærerne kan anvende disse opgaver, når man giver lektier for, ved at pege de relevante opgaver i afsnit X.0 ud for eleverne. Endelig kan de anvendes i en repetitionsfase, hvor eleverne med brug af disse opgaver selv kan arbejde stoffet igennem.

Alle spørgsmål i afsnit X.0 kan besvares ved opslag i grundbogens kapitel X. Man kan evt. bruge stikordsregistret.

Vi har valgt også at lægge spørgsmål ind til alle de indledende fortællinger i afsnit 1 i grundbogens kapitler. Man skal i undervisningen dække både den historiske og den anvendelsesmæssige dimension af det faglige stof, og de indledende fortællinger er velegnede hertil. Men det enkelte hold vil sikkert kun gennemgå nogle få af disse, og der er frit valg her. Derfor har vi lagt spørgsmål ind til alle afsnit.

…

Bjørn Grøn Bodil Bruun Olav Lyndrup

ISBN 9788770669184

L&R Uddannelse
EGMONT

Kontrolspørgsmål til kapitel 1: Teori, metoder og grundlæggende viden du skal kende

Afsnit 1.1
Opgave 1.1 a) Hvorfor har tidevandet ikke en fast rytme over årene? b) Hvorfor er der så store udsving i tidevandet fra sted til sted på Jorden?
Opgave 1.2 Den engelske fysiker Kelvin spiller en stor rolle i arbejdet med at tabellægge tidevandsbevægelserne. a) Hvem var Kelvin? (*hint*: Slå op på wikipedia, og udnyt QR-koden s. 50) b) Hvor har du ellers mødt Kelvin i undervisningen? (*hint*: Slå op i *Hvad er matematik*? 1, kap 4 – brug stikordsregistret. Og slå evt op i dine fysik og kemi-bøger)
Opgave 1.3 Hvordan udbreder lyd sig gennem luft?
Opgave 1.4 I grundbogen står der, at ”bølger flytter sig både i tid og rum”. a) Forklar hvad der menes hermed, idet du tager udgangspunkt i en fysisk bølge i vand. b) Forklar hvad der forstås ved de to begreber: *svingningstid* og *bølgelængde*.
Opgave 1.5 Hvad forstår vi ved *frekvensen* af en lydbølge? Hvad er sammenhængen mellem frekvens og svingningstid?
Opgave 1.6 Forklar de to begreber: *ren tone* og *sammensat tone*. Illustrer gerne din forklaring med, hvad der er vi hører, når der frembringes toner med et musikinstrument.
Opgave 1.7 Rene toner kan beskrives matematisk ved hjælp af sinusfunktionen, som er gjort i grundbiogen s 46, hvor vi finder formlen: $s(t)=A\cdot\sin(2\pi\cdot f\cdot t)$. Forklar hvad symbolerne står for, og redegør for, hvordan man kan skitsere grafen ud fra denne viden.
Opgave 1.8 Når flere bølger befinder sig samme sted til samme tid, så siger vi de interfererer. Hvordan kommer dette tio udtryk i den matematiske beskrivelse.
Opgave 1.9 Hvordan er det grafiske forløb for de såkaldte savtakbølger og de såkaldte firkantbølger.
Opgave 1.10 Hvad var det for et fundamentalt spørgsmål om bølger, Fourier løste i 1822
Opgave 1.11 a) Hvad var kommissoriet (den præcise opgave) for *Tidal Committee*? b) I sit foredrag om arbejdet i Tidal Committee taler Kelvin om ”The object of the harmonic analysis”, dvs genstanden for harmonisk analyse. Hvad er det?

ISBN 9788770669184

Opgave 1.12
Kelvin byggede to mageløse maskiner til sit arbejde med at få styr på tidevandsbevægelserne, henholdsvis en *harmonisk analyzer* og en *synthesizer*. Hvilkem forskellige typer prpblemer løste de to maskiner?

Opgave 1.13
Hvad menes med begrebet *tidevandets musik*?

Opgave 1.14
Hvad forstås ved en *Fourieranalyse* af et signal?

Afsnit 1.2 – 1.5

Opgave 1.15
a) Hvorfra stammer den mærkelige enhed, der giver et *gradtal* for en cirkel på $360°$
b) Har man nogensinde prøvet at lave det om?

Opgave 1.16
a) Hvad forstås ved radiantallet for en vinkel?
b) Hvordan omregnes mellem grader og radianer

Opgave 1.17
a) Hvad menes med formuleringen, at sinus og cosinus er *periodiske funktioner*?
b) Angiv nogle *overgangsformler* knyttet til den retvinklede trekant, og argumenter for dem.
c) Angiv nogle overgangsformler knyttet til enhedscirklen, og argumenter for dem.

Opgave 1.18
Hvad siger *Pythagoras sætning for sinus og cosinus*? Argumenter for den

Opgave 1.19
a) Skitser *graferne* for sin og cos i intervallet $[0;2\pi]$.
b) Angiv *monotoniforholdene* for de to funktioner.

Opgave 1.20
a) Forklar med et eksempel hvordan man løser en *grundligning med sinus*.
b) Forklar med et eksempel hvordan man løser en *grundligning med cosinus*.

Opgave 1.21
a) Hvad er de *afledede funktioner* af henh. sinus og cosinus?
b) Hvad er de *dobbelt afledede funktioner* af henh. sinus og cosinus

Opgave 1.22
a) Hvad handler *Hookes lov* om?
b) Opskriv Hookes lov på formen som en differentialligning. Hvad har denne lov med de trigonometriske funktioner at gøre?

Opgave 1.23
a) En harmonisk svingning kan skrives få formen: $h(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + B$. Forklar hvad de forskellige symboler står for. Inddrag det grafiske forløb i din forklaring.
b) Forklar ud fra en grafskitse af en harmonisk svingning, hvad vi forstår ved *perioden* T , og angiv hvordan man bestemme T ved en grafisk aflæsning.

ISBN 9788770669184

c) Der findes en formelmæssig sammenhæng mellem perioden *T* og vinkelhastigheden ω. Opskriv denne og argumenter for den. (*hint*: Praxisboksen s 67)
Opgave 1.24 I beskrivelsen af harmoniske svingninger indgår ofte yderligere begreber som *bølgelængde* og *svingningstid*. Der er en bestemt sammenhæng mellem de to begreber – hvilken?
Opgave 1.25 a) For en harmonisk svingning er der formelmæssige sammenhænge mellem *amplituden A*, *ligevægtsværdien B*, og funktionens maksimum og minimum. Opstil disse og argumenter form dem. b) Illustrer, fx med grafskitserne i øvelse 1.23 s. 66, hvorledes disse sammenhænge kan anvendes til en grafisk bestemmelse af *A* og *B*. (*hint*: Praxisboksen s. 67)

ISBN 9788770669184

L&R Uddannelse
EGMONT

Kontrolspørgsmål til kapitel 2: Teori, metoder og grundlæggende viden du skal kende

Afsnit 2.1

Opgave 2.1
a) Hvad går det matematiske problem *cirklens kvadratur* ud på?
b) Hvilke hjælpemidler måtte man i den græske matematik anvende til løsning af problemet?
c) Denne begrænsning i brugen af hjælpemidler har sin rod i *Euklids 5 aksiomer* (*forudsætninger*). Hvad er disse 5 aksiomer?

Opgave 2.2
I den ægyptiske matematik findes en formel til beregning af en cirkels areal. Hvad siger denne formel?

Opgave 2.3
a) Hvad er definitionen på tallet π?
b) Redegør for, hvorledes formlen for *cirklens omkreds* følger af definitionen i a)
c) Archimedes udledte formlen for *arealet af cirkel*. Redegør for hans argument? Kan du acceptere ha<ns argument, eller synes du der er problemer?

Opgave 2.4
a) Beskriv en metode til at beregne en tilnærmelse til omkredsen af en cirkel (der er flere metoder, vælg en), og dermed til tallet π
b) I folkeskolen lærer man, at $\frac{22}{7}$ er en god tilnærmelse til tallet π. Hvorfra stammer dette?

Opgave 2.5
Begrebet *cirklens kvadratur* er gået ind i det almindelige sprog. Hvad mener man, når man om et problem siger, at det er som at løse cirklens kvadratur?

Opgave 2.6
a) I grundbogen s 77 omtales, at $\sqrt{2}$ er et *konstruerbart tal*. Hvad menes hermed? Kan du tilsvarende argumentere for at fx $\sqrt{5}$ *og* $\sqrt{13}$ er konstruerbare tal?

Opgave 2.7
a) Forklar hvad *Cavalieris princip* går ud på. Giv eksempler på, hvor det går godt, og hvor det går galt når man anvender dette princip til at bestemme arealer og rumfang.
b) Inspireret af Cavalieris princip introducerer Wallis i et værk fra 1656 *uendeligheds-symbolet* ∞ . I hvilken sammenhæng gør han det?

Opgave 2.8
a) Forklar *Wallis metode* til beregning af arealet under en parabelbue, og under grafen for den kubiske funktion.
b) Hvordan generaliserer Wallis de fundne resultater?
c) Forklar, hvordan Wallis kommer fra at have bestemt arealet under grafen for *potensfunktioner* til arealet af en cirkel.
d) Har Wallis dermed løst cirklens kvadratur? Hvorfor? Hvorfor ikke?

ISBN 9788770669184

L&R Uddannelse
EGMONT

Afsnit 2.2 – 2.7

Opgave 2.9
Givet en positiv funktion i området fra tallet *a* og fremad. Hvad forstår vi ved *arealfunktionen* til *f* ?

Opgave 2.10
a) Hvad forstår vi ved en *stamfunktion* til en funktion *f* ?
b) Angiv stamfunktioner til potensfunktionerne. Argumenter for sit svar.

Opgave 2.11
a) Hvad siger *sætningen om samtlige stamfunktioner til en funktion f* ?
b) Giv en grafisk fortolkning af denne sætning.
c) Sætningen giver anledningen til begrebet *den kanoniske stamfunktion*. Hvad står det for?

Opgave 2.12
Forklar, gerne med et eksempel, hvordan man bestemmer en stamfunktion, hvis graf går igennem et bestemt punkt.

Opgave 2.13
a) Hvad forstår vi ved *det ubestemte integral* til en funktion *f* ?
b) Hvordan er *notationen* (hvordan skrives det)?

Opgave 2.14
Angiv stamfunktioner til følgende funktioner - og argumenter for din påstand:
a) x^{-1} (eller $\frac{1}{x}$)
b) $e^{c\cdot x}$, $c \neq 0$
c) x^{a}, $a \neq -1$
d) $\sin(x)$ og $\cos(x)$

Opgave 2.15
a) Angiv *regneregler* for det ubestemte integral af *sum*, *differens* og *gange med konstant*.
b) Argumenter for disse regneregler

Opgave 2.16
a) Forklar regnereglen: *integration ved substitution*, og argumenter for den.
b) Illustrer regnereglen med nogle selvvalgte eksempler.

Opgave 2.17
a) Forklar regnereglen: *delvis integration*, og argumenter for den.
b) Illustrer regnereglen med nogle selvvalgte eksempler.

Opgave 2.18
a) Hvad siger *integralregningens hovedsætning*?
b) Hvad er den røde linje i beviset (med brug af tretrins-reglen)

Opgave 2.19
a) Hvordan beregnes *arealet under grafen* for en positiv, kontinuert funktion i et givet interval?
b) Argumenter ud fra hovedsætningen for metoden beskrevet i punkt a).

Opgave 2.20
a) Hvad forstår vi ved *det bestemte integral* fra *a* til *b* af en funktion *f* ?
b) Hvordan er *notationen* (hvordan skrives det)?

ISBN 9788770669184

L&R Uddannelse EGMONT

c) Hvordan udregnes et bestemt integral i praksis (uden værktøj) ?

Opgave 2.21
a) Hvad siger *indskudssætningen*?
b) Giv eksempler på dens anvendelse.

Opgave 2.22
a) Angiv *regneregler* for det bestemte integral af *sum*, *differens* og *gange med konstant*.
b) Argumenter for disse regneregler

Opgave 2.23
a) Forklar regnereglen: *integration ved substitution* af et bestemt integral, og argumenter for den.
b) Illustrer regnereglen i praksis med nogle selvvalgte eksempler.

Opgave 2.24
a) Hvordan bestemmes *arealet af et område mellem to grafer*
b) Hvordan bestemmes arealet af en punktmængde, der ligger helt under x-aksen

Opgave 2.25
a) Hvad er et *omdrejningslegeme*?
b) Hvordan bestemmes *rumfanget af et omdrejningslegeme*?

Opgave 2.26
a) Hvordan bestemmes *rumfanget af en ring* (et område indesluttet mellem to omdrejningslegemer). (*hint*: Der er to forskellige tilfælde, se grundbogen s. 117)

Opgave 2.27 (kun for htx)
Hvordan bestemmes rumfanget af et omdrejningslegeme, hvor vi drejer om y-aksen?

Opgave 2.28
a) Hvad er definitionen på *Ginikoefficienten*?
b) Hvordan kan Ginikoefficienten skrives på en formel med brug af integraler?

Opgave 2.29
Hvordan beregnes *en gennemsnitlig værdi* af en funktion ved hjælp af integralretgning?

Opgave 2.30
Hvordan beregnes *længden af en kurve*, der er givet som en graf, ved hjælp af integralregning?

Opgave 2.31
a) Hvordan defineres *den naturlige logaritmefunktion* i moderne matematik?
b) Vis ud fra definitionen, at $\ln(1)=0$
c) Vis, at $\ln(x)$ er en voksende funktion.
Det afgørende skridt i beviset for logaritmeregnereglerne er beviset for *den grundlæggende regel*: $\ln(a\cdot b)=\ln(a)+\ln(b)$. Antag vi har vist dette.
d) Argumenter ud fra den grundlæggende regneregel for reglen: $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$
e) Argumenter ud fra den grundlæggende regneregel og d) for at $\ln(a^n)=n\cdot\ln(a)$ og $\ln(a^{-n})=(-n)\cdot\ln(a)$ for alle naturige tal n.
f) Argumenter ud fra c) og e) for at $\ln(x)\to\infty$ når $x\to\infty$

ISBN 9788770669184

L&R Uddannelse EGMONT

Opgave 2.32

a) Forklar hvordan man kan definere e^x og a^x ud fra kendskab til $\ln(x)$

b) Argumenter for, at $\left(e^x\right)' = e^x$

ISBN 9788770669184

Kontrolspørgsmål til kapitel 3A: Teori, metoder og grundlæggende viden du skal kende

Afsnit 3A.1
Opgave 3A.1 Hvornår omtrent udfoldede den hollandske renæssance sig, med navne som Rembrandt, Frans Hals og Jan Vermeer?
Opgave 3A.2 a) Hvornår gennemførte ”den falske Vermeer”, Hans van Meegeren sine svindelnumre? Fortæl kort noget om hans metode til at male ”gamle” malerier. b) Hvorfor var det særligt bemærkelsesværdigt, at ukendte billeder af netop Vermeer dukkede op? c) Hvad var Hans van Meegerens cover-up historie, da han præsenterede sine nye ”Vermeer-billeder”? d) Hvornår blev svindelen afsløret? Fortæl kort om, hvordan han blev opdaget. e) Under retssagen tog Hans van Meegeren et specielt initiativ for at overbevise retten om, at han selv var ophavsmand til de malerier, han havde solgt til museer og fx også til Gøring. Hvad var det han gjorde? Hvorfor gjorde han det?
Opgave 3A.3 De tekniske analyser koncentrerede sig om farven *blyhvidt*. Hvorfor?
Opgave 3A.4 a) Hvad er det, der karakteriserer radioaktive stoffer? b) Hvad er en *henfaldskæde*, fx henfaldskæden for Uran 238 c) Opskriv *henfaldsloven* som en *differentialligning*, og forklar med ord, hvad ligningen siger.
Opgave 3A.5 a) Hvad er definitionen på *halveringstid*? b) Hvad er sammenhængen mellem halveringstid og henfaldskonstant.
Opgave 3A.6 I forbindelse med de videnskabelige undersøgelser af, om malerierne var ægte eller falske, blev der opstillet *to hypoteser*. Formuler disse.
Opgave 3A.7 Hvorfor er der radioaktive atomer i farven blyhvidt?
Opgave 3A.8 Når vi opstiller en differentialligning for *dobbelt radioaktivt henfald* så foretager vi her en vigtig antagelse om en af de variable. Hvilken antagelse er der tale om? Begrund denne antagelse. (*hint*: se argument og formler s 135-136)
Opgave 3A.9 Hvad karakteriserer forholdet mellem henfald for Bly-210 og Radium-226 for et gammelt billede i forhold til et nyt billede? (*hint*: se tabellen og formlerne s 137)
Opgave 3A.10 Hvad er den grundlæggende ide i de udregninger, der foretages i øvelse 3.5 s 137, og som giver det afgørende argument vedrørende maleriernes ægthed eller falskneri?

ISBN 9788770669184

L&R Uddannelse
EGMONT

Afsnit 3A.2 – 3A.3

Opgave 3A.11
a) Hvad er en *differentialligning*?
b) Hvad menes med *begyndelsesbetingelser*?
c) Hvad er en *differentialligningsmodel*? Giv eksempler.

Opgave 3A.12
Differentialligninger løses med forskellige metoder. Redegør for, hvad der forstås ved *eksakt* løsning og ved *numerisk* løsning. Hvad er forklaringen på, at vi har brug for flere løsningsmetoder?

Opgave 3A.13
a) Hvad forstås ved *linjeelementer*?
b) Hvordan anvendes linjeelementer i undersøgelse af en differentialligning? (*hint*: praxisboksen og eksempelt s. 143).
c) Hvad forstås ved en *løsningskurve* til en differentialligning? Illustrer din forklaring med eksempler.

Opgave 3A.14
a) Hvad forstås ved en *kvalitativ analyse* af en differentialligning? Illustrer din forklaring med eksempler.
b) Hvordan kan en differentialligning fortælle om monotoniforhold og lokale ekstrema – uden vi løses ligningen.
c) Hvordan kan en differentialligning fortælle om krumningsforhold – uden vi løses ligningen.

Opgave 3A.15
a) Når vi oversætter mellem sprog og formel, hvad er da den sproglige repræsentation af f'?
b) Når vi oversætter mellem sprog og formel, hvad er da den formelmæssige repræsentation af udtrykket: "er proportional med"?
c) Giv en sproglig præsentation af *Newtons afkølingslov*. Oversæt til en formel-repræsentation og forklar hvordan du oversætter.

Opgave 3A.16
SD-diagrammer: Hvis man ønsker at repetere SD-diagrammer er der spørgsmål hertil i *Hvad er matematik*? *Opgavebog* 2, kapitel 6

Opgave 3A.17
a) Hvad forstås ved *den fuldstændige løsning til en differentialligning*?
b) Hvad menes med en *partikulær løsning til en differentialligning*

Opgave 3A.18
En opgave indeholder følgende formulering: Undersøg om en funktion er en løsning til en differentialligning. Hvordan gribes sådan en opgave an?

Opgave 3A.19
Givet en differentialligning. Hvordan løses følgende opgavetyper (illustrer med selvvalgte eksempler):
- Bestem væksthastigheden i et bestemt punkt.
- Bestem en tangentligning i et bestemt punkt.

Opgave 3A.20
I udledningen af eksakte løsninger til lineære differentialligninger anvendes monotonisætningen i udstrakt grad. Hvad siger monotonisætningen?

ISBN 9788770669184

Opgave 3A.21
a) Hvad karakteriserer eksponentiel vækst?
b) Hvordan udtrykkes dette i en differentialligning?
c) Hvad er den fuldstændige løsning til: $y' = k \cdot y$
d) Skitser grafisk de forskellige typer af løsninger til ligningen.

Opgave 3A.22
a) Beviset der giver os den fuldstændige løsning til $y' = k \cdot y$ udnytter vores viden om *produktreglen* og om *reglen for sammensat differentiation*. Redegør for disse to regneregler.
b) Forklar den røde tråd, dvs. gangen i beviset for sætningen om den fuldstændige løsning. .

Opgave 3A.23
a) Newtons afkølingslov (se s. 147), medicin-indhold i kroppen i en sygdomsbehandling (HEM2, s. 246ff), blyforgiftning (s. 160), forurening af en sø (HEM2, s 251) er alle eksempler på *forskudt eksponentiel vækst*. Forklar de fælles træk i eksemplerne der giver anledning til samme differentialligning.
b) Opstil differentialligningen og begrund i hvert af de fire ovenstående eksempler, hvad kontanterne står for.
c) Forklar for hvert af eksemplerne, hvordan *det grafiske forløb af løsningskurverne* er.
d) Giv en fortolkning af *den asymptotiske grænse* i hvert af eksemplerne. (*hint*: Slå op på eksemplerne i grundbøgerne).

Opgave 3A.24
Vælg ét af beviserne, det i bogen, hvor der anvendes substitution, eller det på website, hvor der gennemføres udregninger parallelt til beviset for sætning 1. Redegør for *gangen i beviset* (den *røde tråd*).

Opgave 3A.25
a) I øvelse 3.26 om blyforgiftning tales om *halveringstiden for blyindholdet* i kroppen. Hvad er definitionen på *halveringstid*?
b) Løsningen til det virkelige problem har formen $B(t) = c \cdot e^{-a \cdot t} + \frac{b}{a}$. Det afsluttende spørgsmål lyder: Bestem grænseværdien, og giv en fortolkning af dette resultat. Hvad menes hermed?

Opgave 3A.26
Øvelse 3.27, 3.28 og 3.29, s. 161-62 handler om løsning til differentialligningen: $y' = f(x) \cdot y$. Redegør for *den bærende ide i beviset*.

Opgave 3A.27
I øvelse 3.31 siges at ”*linearkombinationer* også er løsninger”. Hvad menes hermed?

Opgave 3A.28
Redegør for den *bærende ide i beviset for sætning 4*, løsning af den generelle lineære differentialligning

Opgave 3A.29
Redegør for *Gompertz* vækstmodel

Opgave 3A.30
Ved udslip fra et atomkraftværk er det sundhedsmæssige fokus i særlig grad rettet mod *skjoldbruskkirtlen*. Hvorfor>?

ISBN 9788770669184

Opgave 3A.31
a) Radioaktivt Jod-131 er en del af en henfaldskæde. Forklar hvad en *henfaldskæde* er.
b) Hvad er sammenhængen mellem halveringstid og henfaldskonstant.

Opgave 3A.32
a) I 2012 gennemførte Felix Baumgartner et udspring fra en ballon i 36,5 km's højde. Hvad var formålet med udspringet?
b) Et sådant spring er underlagt nogle grundlæggende *fysiske love.* Hvilke?
c) Hvordan tager man fat på at opstille *en matematisk model for springet*, når der er så mange variable og sammenhænge i spil?

Opgave 3A.33
a) Den mest simple modellering af et frit fald er et *fald uden luftmodstand.* Hvordan opstilles en model for et sådant fald?
a) En af de vanskelige faktorer, det er svært at få styr på i et fald som Baumgartners, er *luftmodstanden*. Forklar hvorledes man modellerer denne.
b) Forklar hvorledes man modellerer *lufttætheden*?

Opgave 3A.34
Lufttætheden er en funktion af højden. Hastigheden er en funktion af tiden. Vi ønsker en model, hvor *hastigheden er en funktion af højden*. Hvordan gør vi det? Forklar ideen heri, ikke nødvendigvis de tekniske omskrivninger.

Opgave 3A.3
a) Hvad ved vi om sammenhængen mellem lydens hastighed og højden over jordoverfladen?
b) Målet med Baumgartners spring var at gennembryde lydmuren. Hvad betyder det at *gennembryde lydmuren*?
c) Hvor i sit spring sker dette gennembrud af lydmuren for Baumgartner

ISBN 9788770669184

L&R Uddannelse
EGMONT

Kontrolspørgsmål til kapitel 3B: Teori, metoder og grundlæggende viden du skal kende

Afsnit 3B.1
Opgave 3B.1 Vi betragter en enkelt fiskearts udvikling over tid. Hvad er de centrale *tilstandsvariable*
Opgave 3B.2 a) Redegør for den grundlæggende ide i *modelleringen af vægten* af en fisk. b) På s. 180 og frem gennemføres en *modellering af væksthastigheden* af vægten af en fisk. Argumenter for de to ligninger for henh. Ud-leddet og Ind-leddet, der er udgangspunktet for modelleringen. c) Ud-leddet er proportional med vægten, mens Ind-leddet er proportional med et overfladeareal. Hvordan foregår omskrivningen, så også Ind-leddet er proportional med vægten?
Opgave 3B.3 *Bertalanffy-modellen* for vægten af en fisk er et specialtilfælde af en større klasse af differentialligninger. Hvad er det for differentialligninger?
Opgave 3B.4 Bernouillis differentialligning har formen: $y' = g(x) \cdot y^{\alpha} - f(x) \cdot y$. Argumenter for, at *den logistiske differentialligning* er et specialtilfælde heraf.
Opgave 3B.5 a) Hvad er det karakteristiske grafiske forløb for *vægtfunktionen* af én fisk? b) Hvor har du før mødt funktioner med tilsvarende grafiske forløb?
Opgave 3B.6 a) Betragt en hel årgang af en bestemt fiskeart, og antag der ikke fiskes, og at de ikke jages af rovdyr. Argumenter for, hvilken differentialligning *antallet af fisk* vil følge under de forudsætninger. b) Hvad dækker begrebet *samlet biomasse* af fx en årgang af en fiskeart over? c) Hvordan opstilles en formel for samlet biomasse?
Opgave 3B.7 a) Hvad menes med udtrykket: ”det bedste tidspunkt at tage fiskene på”? b) Forklar med egne ord, hvorfor der må være et sådant optimalt tidspunkt.
Opgave 3B.8 Forklar grafen, der er gengivet side 185 i grundbogen.
Opgave 3B.9 Hvilken matematisk teknik leder os fra at modellere biomassen af én årgang til at se på den samlede biomasse af pågældende art?
Opgave 3B.10 a) Forklar de centrale begreber: *fiskeriintensitet* og *rekrutår*. b) Hvordan kan disse reguleres?

ISBN 9788770669184

Afsnit 3B.2 – 3B.3
Opgave 3B.11 Giv eksempler på fænomener, der følger en *logitisk vækstkurve*
Opgave 3B.12 a) Vælg en af de tre former for *den logistiske differentialligning*, forklar hvad symbolerne står for, og hvordan differentialligningen fremkommer. b) Opskriv løsningsformlen.
Opgave 3B.13 Linjeelementer kan illustrere *de forskellige typer af løsninger til en logistisk differentialligning*. Beskriv det grafiske forløb af de forskellige typer. (*hint*: det grafisie billede s 189)
Opgave 3B.14 Betragt løsningen til en logistisk differentialligning på formen: $y=\dfrac{M}{1+c\cdot e^{-b\cdot x}}$, hvor $b=a\cdot M$. Forklar *betydningen af parametrene M, b og c for det grafiske forløb*. (*hint*: QR-koden nederst s. 189).
Opgave 3B.15 a) Hvad er den grundlæggende ide i *beviset for løsningsformlen* til den logistiske differentialligning? b) Et sted i beviset anvendes reglen for *sammensat differentiation*. Hvad siger denne regel? Hvor og hvordan anvendes reglen?
Opgave 3B.16 a) Forklar begrebet *bæreevne*. b) Gør rede for *de asymptotiske forhold* for logistisk vækst.
Opgave 3B.17 a) Hvor er *væksthastigheden* for en almindelig logistisk funktion størst? b) Giv et argument for din påstand.
Opgave 3B.18 a) Grafen for en almindelig logistisk funktion er *symmetrisk om et bestemt punkt*. Hvilket? b) Hvad menes med *symmetrisk*?
Opgave 3B.19 Giv med dine egne ord en beskrivelse af de *karakteristiske træk ved de tre vækstformer*: Lineær vækst, eksponentiel vækst og logistisk vækst.
Opgave 3B.20 I øvelse 3.63 s. 199 (der fejlagtigt har nummer 6.39 i bogen) gives en tabel over den relative væksthastighed af en bestemt dyreart. Hvad menes med begrebet *relativ væksthastighed*?
Opgave 3B.21 Omkring 1920 genopdagede nogle forskere den logistisike vækstmodel. Det var først Raymond Pearl og Lowell Reed, og derfnæst parret H.S. Reed og R.H. Holland. Hvad var det for eksempler de illustrerede modellen med? (*hint*: Afsnit 2.1.1 s. 187 og afsnit 2.14 s. 199-201)
Opgave 3B.22 Hvad forstås ved en *separabel differentialligning*?

Opgave 3B.23 Givet et konkret eksempel – hvilke trin skal man normalt igennem, når man i praksis og uden et værktøjsprogram skal løse en differentialligning ved separation af de variable?
Opgave 3B.24 a) Givet en separabel differentialligning. Gør rede for *løsningsmetoden*, som den fremgår af sætning 2 s. 206. b) Vi kræver, at *definitionsmængden for en løsning* til en differentialligning er et sammenhængende interval. For en given separabel differentialligning, hvor der opstår huller i definitionsmængden, hvordan afgør vi da hvilken del af definitionsmængden, der hører til den søgte løsning?

ISBN 9788770669184

L&R Uddannelse EGMONT

Kontrolspørgsmål til kapitel 4: Teori, metoder og grundlæggende viden du skal kende

Afsnit 4.1

Opgave 4.1
a) Man anslår, at der blev anlagt 400.000km veje i hele Romerriget. Hvad var formålet?
b) Omkring år 0 fremstilles *et særligt kort over Romerrigets veje*. En del af kortet hugges i sten og opsættes på den centrale plads i Rom. I hvilken forstand er kortet en korrekt gengivelse af Romerrigets infrastruktur?
c) Hvor ved vi det fra?

Opgave 4.2
Efter Romerrigets fald forvitrede også den infrastruktur der var opbygget. Hvad er det næste skridt i samme store skala mht opbygningen af en infrastruktur i Europa (og nu også i resten af verden)?

Opgave 4.3
Fra 1930'erne begyndte man at anlægge motorveje, først i USA, siden i Europa.
a) Hvad adskiller *motorvejsnettet* fra det øvrige vejnet?
b) Nævn nogle af de særlige problemer, man skulle løse, for at opfylde kravene til et motorvejsnet.

Opgave 4.4
Motorvejsudfletninger krummer i sagens natur.
a) Hvorfor anlægges disse ikke som de simplest mulige krumme figurer, nemlig cirkelbuer?
b) Hvad er det karakteristiske ved de særlige *klotoidebuer*, man anvender?
Man havde allerede fra slutningen af 1800-tallet erfaringer med anvendelse af klotoidebuer for at skabe en bedre kørselskomfort.
c) Hvor var det, de blev anvendt, og hvad var baggrunden for, at man netop på det tidspunkt begyndte at lede efter andre buer end cirkelbuerne?
d) En bestemt ingeniør formulerede det præcise krav til de buer, de ønskede konstrueret. Hvad var dette for nogle krav, og hvad hed denne ingeniør
(*hint*: Grundbogen s 214, citat og QR-kode)

Opgave 4.5
Forklar hvad *krumningscirklen* i et bestemt punkt af en kurve er.

Opgave 4.6
a) Opstil en *parameterfremstilling for en cirkel med radius R* og centrum i Origo
Parameterfremstillingen kan også tolkes som en forskrift for en vektorfunktion. $\vec{r}$
b) Differentier vektorfunktionen. Til et givet tidspunkt t_0, tegn en skitse af, hvordan $\vec{r}(t_0)$ og $\vec{r}'(t_0)$ ligger i forhold til hinanden?
c) Bestem *den anden afledede* af vektorfunktionen. Til et givet tidspunkt t_0, tegn en skitse af, hvordan $\vec{r}(t_0)$ og $\vec{r}''(t_0)$ ligger i forhold til hinanden?

Opgave 4.7
Giv et sprogligt argument for, at $\frac{1}{R}$ er et godt *mål for krumningen* af en cirkel med radius *R*.

ISBN 9788770669184

Opgave 4.8 Givet en banekurve for en vektorfunktion. a) Hvad er definitionen på *krumningen* i et punkt? b) Hvorfor indføres differentiation mht. *kurvelængde*?
Opgave 4.9 I definitionen og i øvelse 4.3 s. 217 er flere variable i spil: $\vec{e}$, θ og s . Forklar hvad hver af disse står for (repræsenterer).
Opgave 4.10 Formlen $\frac{d\theta}{ds} = k \cdot s$ i øvelse 4.3 fremkommer ved hjælp af sammensat differentiation. Hvad er den sammensatte funktion?
Opgave 4.11 Tidligere kaldtes klotoider også for Eulers spiral og Cornus spiral. Forklar hvad klotoider har med spiraler at gøre.
Opgave 4.12 Antag en motorvejsudfletning konstrueres ved at lade en ret linje blive efterfulgt af en cirkelbue. Vi forestillær os vi kører gennem denne udfletning med jævn fart.Skitser grafen for krumningen som funktion af tiden ved denne gennemkørsel.
Afsnit 4.2 – 4.4
Opgave 4.13 Forklar med ord, gerne med brug af begrebet *geometrisk sted*, hvad der karakteriserer følgende kurver: - en cirkel - en ellipse - en hyperbel - en cykloide - en archimedisk spiral
Opgave 4.14 a) Hvad forstår vi ved en *stedvektor* til et punkt *P*? b) Hvad forstår vi ved en *vektorfunktion*? c) Hvad er *banekurven* til en vektorfunktion? d) Hvad forstår vi ved en parameterfremstilling for en kurve
Opgave 4.15 Giv for en selvvalgt vektorfunktion eksempler på de 4 *repræsentationsformer* (sprog, tabel, graf, formel).
Opgave 4.16 Giv eksempler på, at samme banekurve kan have *forskellige parameterfremstillinger* (*hint*: Tænk på forskellige måder, eksempelvis forskellige hastigheder, at gennemløbe en kurve på).
Opgave 4.17 a) Giv en parameterfremstilling for en *cirkel* med radius *R*. b) Giv en parameterfremstilling for en *ellipse* med centrum i $C(c_1, c_2)$ og akserne *a* og *b*. c) Giv en parameterfremstilling for en *almindelig graf* for en almindelig funktion af én variabel

ISBN 9788770669184

L&R Uddannelse EGMONT

Opgave 4.18
a) Hvordan bestemmes en banekurves *skæring med akserne*?
b) Hvad er et *dobbeltpunkt*, og hvordan bestemmes det?

Opgave 4.19
En banekurve har en parameterfremstilling med et andengradspolynomium som 1. koordinat, og et tredjegradspolynomium som 2. koordinat. Skitser banekurvens forløb.

Opgave 4.20
a) Hvad er definitionen på at en vektorfunktion er *kontinuert*?
b) Hvad er definitionen på at en vektorfunktion er *differentiabel*?
c) Hvad er definitionen på en differentiabel vektorfunktions *hastighedsvektor* og *accelerationsvektor*?

Opgave 4.21
Vis, at for en vektorfunktion er differentialkvotienten også *grænseværdi for en differenskvotient*.

Opgave 4.22
a) Hvad er definitionen på en *tangent til en banekurve*?
b) Hvordan bestemmes en banekurves eventuelle *lodrette og vandrette tangenter*?
c) Hvordan bestemmes vinklen mellem tangenterne i et dobbeltpunkt?

Opgave 4.23
a) Hvad forstås ved *en logaritmisk spiral*
b) Hvad er det for en geometrisk egenskab, der karakteriserer en logaritmisk spiral?

Opgave 4.24
Banekurven for vektorfunktionen $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} t-\sin(t) \\ 1-\cos(t) \end{pmatrix}$, $t\in[-2\pi;4\pi]$ er en *cykloide*, se fx grafen s. 220.
a) Argumenter for, at vektorfunktionen er differentiabel.
b) Der er en stor forskel på det grafiske forløb for en almindelig reel differentiabel funktion og det grafiske forløb af cykloiden. Hvilken?

Opgave 4.25
Givet en vektorfunktion $\vec{r}(t)$.
a) Opskriv en formel, hvor hastighedsvektoren $\vec{v}(t)=\vec{r}\,'(t)$ udtrykkes ved *fart* og *retning*
b) Argumenter for at accelerationens retning er vinkelret på hastighedens retning (*hint*: Differentier identiteten $\left(\vec{e}(t)\right)'=1$, hvor $\vec{e}(t)$ er en enhedsvektor i hastighedens retning).

Opgave 4.26
Redegør for definitionen af *krumningen for en banekurve*, herunder for, hvorfor vi differentierer mht kurvelængden

Opgave 4.27
a) I sætning 3 s. 233 gives formlen for krumning af en banekurve. Redegør for, hvad *den bærende ide i beviset for formlen* er.
b) Redegør for, hvordan vi får formlen for *krumning af en graf* (sætning 4, s. 234) ud fra den generelle formel for krumning.

ISBN 9788770669184

Opgave 4.28 Hvordan beregnes *længden af et stykke af en banekurve*?
Opgave 4.29 Hvordan beregnes *arealet af et område* afgrænset af en banekurve (Bemærk, der er tro versioner, alt afhængig af, hvordan vi afgrænser)

ISBN 9788770669184

Kontrolspørgsmål til kapitel 5: Teori, metoder og grundlæggende viden du skal kende

Afsnit 5.1
Opgave 5.1 Forklar de forskellige trin i en matematisk modellering. (*hint: praxisboksene s. 48 og s. 244 i Hvad er matematik? 2*)
Opgave 5.2 a) Hvad er *Det økonomiske råd*? b) Hvad står SMEC for? c) Hvad anvendes SMEC til?
Opgave 5.3 Hvad er de to centrale variable i en *produktionsfunktion*?
Opgave 5.4 Hvad forstår man ved *partielt afledede*?
Opgave 5.5 Hvilke tre betingelser skal en funktion af to variable opfylde, for at man kalder det en *produktionsfunktion*? - Formuler svaret med ord. - Udtryk svaret med formler.
Opgave 5.6 Hvordan afgøres ved beregning, om grafen for en funktion (af én variabel) krummer opad (eller nedad)?
Opgave 5.7 Hvilken egenskab har en såkaldt *homogen* funktion af to variable?
Opgave 5.8 Vis, at hvis en potensfunktion af to variable skal være homogen, så skal summen af potenserne være lig med 1
Opgave 5.9 Hvad er definitionen på en *Cobb-Douglas funktion*?
Opgave 5.10 Hvad er definitionen på *priselasticitet*? Forklar det med *ord*, og opstil den tilsvarende *formel*.
Opgave 5.11 a) Giv et eksempel på et forbrugsgode, der er stærkt priselastisk. b) Giv et eksempel på et forbrugsgode, der er meget lidt priselastisk. c) Forklar hvorfor priselasticiteten i alle normale situationer er et negativt tal.
Opgave 5.12 Givet en Cobb-Douglas funktion på formen $f(I,A)=k\cdot I^{\alpha}\cdot A^{1-\alpha}$. Hvordan kan potenserne α og $1-\alpha$ fortolkes i relation til *elasticitetsbegrebet*?

ISBN 9788770669184

Afsnit 5.2 – 5.9

Opgave 5.13
Hvad forstås ved et *højrehåndssystem* og et *venstrehåndssystem*?

Opgave 5.14
a) Hvad er en funktion af to variable?
b) Hvad forstår vi ved *grafen* for en funktion af to variable?
c) Hvilke af følgende figurer, der kan tetgnes i et 3d-koordinatsystem kan opfattes som graf for en funktion:
- en kugle?
- en kegle?
- en kælkebakke?
- en vindelflade (som "vejen" op i Rundetårn)?

Opgave 5.15
a) Hvad forstås ved en *snitkurve*? (Beskriv det geometrisk)
b) Hvad forstås ved en *snitfunktion*?
c) Giv et eksempel på, hvordan vi får et formeludtryk for en snitfunktion

Opgave 5.16
a) Hvad forstås ved en *højdekurve*?
a) Hvad forstås ved en *niveaukurve*?
c) Hvda er sammenhængen mellem højdekurver og niveaukurver?
d) Hvad er et *konturplot*?

Opgave 5.17
Hvad er definitionen på, at en funktion (af 2 variable) er *differentiabel*?

Opgave 5.18
a) Givet en flade, der er graf for en funktion af to variable. Hvad er definitionen på den *retningsafledede* i et bestemt punkt, og med en bestemt vektors retning?
v) Giv et beksempel på beregning heraf.

Opgave 5.19
Givet en flade, der er graf for en funktion af to variable. Giv en tolkning af den retningsafledede i et bestemt punkt og i en *enhedsvektors* retning

Opgave 5.20
Argumenter for at en differentiabel funktion har retningsafledede i alle retninger.
(*hint: Tag udgangspunkt i definitionen på differentiabilitet af henh. en funktion af to variable og af en funktion af én variabel*)

Opgave 5.21
a) Hvad forstås ved *de partielt afledede* af en funktion?
b) Hvordan er *notationen*? (dvs; Hvordan skrives partielt afledede)
c) Giv et eksempel på beregning af partielt afledede.

ISBN 9788770669184

Opgave 5.22
a) Hvad er definitionen på *gradienten* af en funktion i et bestemt punkt?
b) Hvordan er *notationen*? (dvs; Hvordan skrives gradienten)
c) Giv et eksempel på beregning af gradienten
d) Hvad er et graientfelt?

Opgave 5.23
Givet en flade, der er graf for en funktion af to variable, og et punkt *P* i definitionsmængden.
a) Hvad er sammenhængen mellem gradienten i *P* og niveaukurven gennem *P*?
b) Beskriv med ord gradientens betydning for det grafiske forløb

Opgave 5.24
a) Hvad siger *produktreglen* for en funktion $f(x,y)$ af to variable?
b) Hvad siger *kædereglen* for en sammensat funktion $f(h(t),k(t))$

Opgave 5.25
Givet en differentiabel funktion. Hvad er sammenhængen mellem *gradienten* og den *retningsafledede* gennem et punkt *P* og i en vektor $\vec{v}$´s retning

Opgave 5.21
Hvad er "den røde tråd" i beviset for, at *gradienten angiver retningen med størst stigning*?

Opgave 5.22
Hvad er "den røde tråd" i beviset for, at *gradienterne står vinkelret på niveaukurverne*?

Opgave 5.23
Givet en flade, der er graf for en funktion af to variable, og et punkt *P* på fladen. Hvad er ligningen for *tangentplanen* i *P*?

Opgave 5.24
a) Hvad er definitionen på et *stationært punkt*?
b) Argumenter for, at ekstrema er stationære punkter
c) I teorien for funktioner af én variabel har vi begrebet *et vendepunkt*. Hvad karakteriserer et vendepunkt? Hvad er det tilsvarende begreb i teorien for funktioner af to variable?

Opgave 5.25
a) Hvad forstås ved de *dobbelt afledede* og de *blandede afledede*?
b) Hvordan er *notationen*? (dvs; Hvordan skrives de dobbelt afledede)?
c) Giv eksempel på beregning de *dobbelt afledede* og de *blandede afledede*.
d) I mange situationer takler man blot iom *den* blandede afledede. Hvorfor gør man det, og hvad er det for situationer?

Opgave 5.24
a) Hvad menes med formuleringen: *Bestem arten af de stationære punkter?*
b) Hvordan løses en sådan opgave med hjælp fra grafiske metoder?
c) Når arten af de stationære punkter skal bestemnmes ved beregning, udregnes en særlig størrelse, der i formelsamlingen hedder $r \cdot t - s^2$. Hvad står symbolerne *r*, *t* og *s* for, og hvordan kan denne størrelse hjælpe med at bestemme om der er maksimum, minimum eller saddelpunkt?

ISBN9788770669184

Kontrolspørgsmål til kapitel 6: Teori, metoder og grundlæggende viden du skal kende

Afsnit 6.1
Opgave 6.1 Den engelske matematiker og ingeniør *Frederick W. Lanchester* lancerede i 1916 den differentialligningsmodel, der siden blev opkaldt efter ham. Hvad var det han ønskede at modellere?
Opgave 6.2 Lanchester havde studeret en række af krigshistoriens store slag som grundlag for sin model. Særligt et slag, der havde stor betydning for det engelske imperium spillede en rolle i hans forarbejder. Hvad var det for et slag, og hvad var det ved slaget, der især optog Lanchester.
Opgave 6.3 a) Opstil den *generelle Lanchester model*, og forklar, hvorfor koblede differentialligninger volder særlige problemer ift. almindelige differentialligninger. b) Forklar med dine egne ord, hvad det er for en situation, Lanchesters *lineære model* beskriver. c) Forklar med dine egne ord, hvad det er for en situation, Lanchesters *kvadratiske model* beskriver. d) Hvis du har gennemgået hele kapitlet, specielt øvelse 6.36 og 6.37, så redegør for de to betegnelser: *lineære model* og *kvadratiske model*.
Opgave 6.4 Giv et kort resume af situationen i 2. VK i foråret 1941.
Opgave 6.5 a) Giv et kort resume af *udviklingen i operation Barbarossas* første år, eksemplificeret med situationen i og omkring Leningrad, Moskva, Stalingrad og Kaukasus. b) Hvad var Nazi-Tysklands *strategiske mål med Kursk-slaget*? c) Giv et kort resume af udviklingen i slaget over de 14 dage det varede.
Opgave 6.6 s. 276 er opstillet en stor tabel over udviklingen i slaget målt på en række parametre. a) Hvor stammer data fra? b) Der er *tre kategorier af data*, hvoraf den ene, FCUD er gengivet i bogen, de to øvrige, ACUD og CCUD findes på bogens website. Forklar, hvad forkortelserne står for, og hvad der ligger bag hver af disse kategorier.
Opgave 6.7 a) I vurderingen af *styrkeforholdet* udregnes et samlet mål. Hvordan foretages dette? b) Denne vurdering indeholder et subjektivt element, så hvorfor gøres det mon?
Opgave 6.8 a) I øvelse 6.4 har vi i punkt a) valgt at skitsere grafiske forløb, hvor *den uafhængige variable er produktet af de variable x og y*. Hvad kan begrunde dette valg?
Opgave 6.9 a) I Lanchesters lineære model indgår to parametre, *a* og *b*. *Hvordan estimeres disse*? b) Hvordan kan disse parameterværdier anvendes til at sammenligne den teoretiske model med de empiriske data

ISBN9788770669184

Afsnit 6.2 – 6.5
Opgave 6.10 Den klassiske mekanik beskriver, hvorledes legemer bevæger sig og hvordan de vekselvirker med hinanden. Den grundlæggende naturlov i den klassiske mekanik er *Newtons 2. lov*. Hvad siger denne og hvorfor er det, at den giver anledning til 2. ordens differentialligninger?
Opgave 6.11 a) Opskriv den generelle form for en lineær 2. ordens differentialligning. b) Hvad menes med begreberne *homogen* og *inhomogen* differentialligning? c) Giv en begrundelse for, at differentialligningen kaldes for *lineær*.
Opgave 6.12 Som hjælpeformler i løsningen af 2. ordens differentialligninger, anvendes: - *produktreglen* for differentiation, - reglen for *sammensat differentiation*, - *monotonisætningen*. Forklar hvad hver enkelt går ud på.
Opgave 6.13 a) Opstil den fuldstændige løsning til $y''=k^2\cdot y$ b) Hvad forstås ved en *partikulær løsning*? c) Hvad menes med at "gøre prøve"? d) Gør selv prøve med den løsning, du har opstillet!
Opgave 6.14 a) Hvad er *den røde tråd* i beviset for løsningsformlen til $y''=k^2\cdot y$? b) I beviset ganges på et tidspunkt med en såkaldt *integrationsfaktor*. Hvad er ideen hermed? c) For at kunne anvende produktreglen adderes og subtraheres samme led. Hvordan ræsonnerer vi os til, hvad dette led er? d) Demonstrer omskrivningen hvor produktreglen anvendes e) Demonstrer hvorledes ligningen til sidst omskrives til en 1. ordens differentialligning.
Opgave 6.15 I løsningsformlen indgår *to parametre*. Hvad kræves der for at bestemme disse tal?
Opgave 6.16 Prototypen på et fænomen, der beskrives med differentialligningen $y''=k^2\cdot y$, er *kædelinjen*. a) Hvad er en kædelinje? b) Hvilke kræfter virker i et bestemt punkt af en ophængt kædelinje?
Opgave 6.17 a) Begrund den *vektorligning*, $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=0$, der er givet s. 285. b) Tyngdekraftens størrelse angives som $s\cdot g$. Hvad er *s*?
Opgave 6.18 I opstillingen af differentialligningen for kædelinjen anvendes *formlen for en tangents vinkel,* α *med vandret:* $\tan(\alpha)=f'(x)$. Begrund denne formel.

L&R Uddannelse EGMONT

Opgave 6.19

Argumenter ud fra tegningen s. 285 og den foregående opgave for differentialligningen: $y' = \frac{g}{|\vec{F}|} \cdot s$

Opgave 6.20
a) Hvad er formlen for *længden af et stykke af en graf*?
b) I øvelse 6.10 anvendes *analysens hovedsætning* på denne formel. Hvad siger denne sætning?

Opgave 6.21
I øvelse 6.11 foretages i punkt c) en *substitution*. Hvad menes hermed, og hvorfor gør vi det? Er det en teknik, du har mødt før?

Opgave 6.22
a) Opstil den fuldstændige løsning til $y'' = -k^2 \cdot y$
b) Hvad forstås ved en *partikulær løsning*?
c) Hvad menes med at ”gøre prøve”?
d) Gør selv prøve med den løsning, du har opstillet!

Opgave 6.23
a) Hvad er *den røde tråd* i beviset for løsningsformlen til $y'' = -k^2 \cdot y$?
b) I beviset ganges på et tidspunkt med en såkaldt *integrationsfaktor*. Hvad er ideen hermed?
c) For at kunne anvende produktreglen adderes og subtraheres samme led. Hvordan ræsonnerer vi os til, hvad dette led er?
d) Demonstrer omskrivningen hvor produktreglen anvendes
e) Demonstrer hvorledes ligningen til sidst omskrives til en 1. ordens differentialligning.

Opgave 6.24
I afslutningen af beviset for sætning 2 anvendes *lige store koefficienters metode* til at løse to ligninger med to ubekendte. Hvad går metoden ud på? Hvad er de to ubekendte?

Opgave 6.25
I løsningsformlen indgår *to parametre*. Hvad kræves der for at bestemme disse tal?

Opgave 6.26
Prototypen på et fænomen, der beskrives med differentialligningen $y'' = -k^2 \cdot y$, er *frie udæmpede fjedersvingninger*, der følger *Hookes lov*.
a) Hvad siger denne lov?
b) Løsningsformlen giver en sum af to svingninger. I eksemplet s. 290-91 foretages en omskrivning til *én harmonisk svingning*. Hvad er den grundlæggende ide i denne omskrivning?
c) Undervejs i omskrivningen anvendes en formel, der knytter *skalarproduktet* mellem to vektorer sammen med vinklen mellem dem. Hvad er det for en formel?
d) Hvis løsningsformlen giver os $y = c_1 \cdot \cos(k \cdot x) + c_2 \cdot \sin(k \cdot x)$, hvad bliver da *amplituden* af den harmoniske svingning? (*hint*: praxisboksen s 291)

Opgave 6.27
Redegør for, hvad der forstås ved fænomenerne:
- *frie udæmpede* fjedersvingninger (s. 292f),
- *frie dæmpede* fjedersvingninger (s. 295ff),
- *tvungne* svingninger (s. 300ff)

ISBN9788770669184

Opgave 6.28 I løsningen af den generelle lineære anden ordens differentialligning opstilles det såkaldte *karakteristiske polynomium*. a) Hvad er dette? b) Hvilken rolle spiller diskriminanten (positiv, 0 eller negativ), og de eventuelle rødder i polynomiet, når vi skal løse en lineær anden ordens differentialligning? (*hint*: s. 293-94)
Opgave 6.29 Hvad menes med udtrykket: ”Linearkombinationer er også løsninger”?
Opgave 6.30 a) Hvad forstår vi ved *en partikulær løsning*? b) Kontroller, at du kan bestemme partikulære løsninger med dit værktøjsprogram.
Opgave 6.31 For de frie, dæmpede svingninger skelner vi mellem tre typer: - *overdæmpning* - *kritisk dæmpning* - *almindelig dæmpet* svingning a) Hvad er det i løsningsformlen, der bestemmer typen? b) skitser for hver af de tre et muligt grafisk forløb.
Opgave 6.32 a) Hvad er sammenhængen mellem løsninger til en *inhomogen* ligning og til den tilsvarende homogene ligning? b) Hvad menes med at ”anvende gættemetoden”? (*hint*: s. 298 - se QR-koden)
Opgave 6.33 a) Hvad er *et matematisk pendul*? b) I den endelige differentialligning bliver $\sin(\theta)$ erstattet med θ . Hvad er argumentet for det?
Opgave 6.34 a) Hvad forstår vi ved et mekanisk systems *egensvingning* og ved systemets *egenfrekvens*? (*hint*: praxisboksen s. 297 og s. 300f) b) Forklar hvad det er for en situation, hvor små påtvungne svingninger kan udvikle sig til en katastrofe. (*hint*: Inddrag begrebet *resonans*)
Opgave 6.35 I øvelse 6.28 punkt b) kan vi læse argumentet: ”*Da dette skal gælde for alle t må første parentes være lig med ...*”. Redegør for hvorfor vi kan argumentere på den måde.
Opgave 6.36 I øvelserne 6.29-6.33 er den bærende ide, at vi undersøger *amplituden som en funktion*. Hvad er den uafhængige variabel? Hvorfor kan denne metode udpege, hvor katastrofen indtræffer?
Opgave 6.37 I afsnit 5.1 foretages en sammenligning mellem anden ordens differentialligninger og *koblede differentialligninger*. Hvad er metoden i omskrivningen fra den første type til den anden og omvendt fra den anden type til den førte?

ISBN9788770669184

Opgave 6.38

a) I øvelse 6.36 og 6.37 argumenteres for, hvorfor *Lanchesters lineære og kvadratiske modeller* har fået disse navne. Giv et resume af argumenterne.

b) Hvad er et *faseplot*?

Kontrolspørgsmål til kapitel 7:
Teori, metoder og grundlæggende viden du skal kende

Afsnit 7.1
Opgave 7.1 De reelle tal opdeles i en række forskellige klasser, defineret ud fra bestemte egenskaber. Giv en kort beskrivelse af følgende klasser af tal:' - de *rationale* og de *irrationale* - de *algebraiske* og de *transcendente*
Opgave 7.2 a) Hvad er et *normalt* tal? b) Argumenter for påstanden nederst s 309: Givet et normalt tal a. Så vil enhver endelig følge bestående af tallene 0, 1, ... ,9 findes et eller andet sted i den uendelige decimaludvikling for tallet a. c) Prøv at illustrere med dine egne ord, hvad dette betyder for kompleksiteten af et normalt tal.
Opgave 7.3 Der findes forskellige "grader" af uendelighed. a) Hvilke redskaber har vi til at afgøre, om to uendelige mængder er "lige store"? b) Hvorfor indfører vi et ord som *ækvipotent* (dansk: *mægtighed*) – hvad er der galt med bare at sige "lige store"? c) Hvad er definitionen på *numerabel* (dansk: *tællelig*). Giv eksempler.
Opgave 7.4 Giv med dine egne ord et resume af fortællingen om *Hilberts hotel*. Du skal kunne demonstrere, hvordan hotellet får plads til én ekstra gæst. Og generelt redegøre for, *hvad de kan klare* mht. ekstra værelser, og *hvad de ikke kan klare*!
Opgave 7.5 På s 312 er der indsat et lille felt om "Uendelige tals aritmetik". Hvad er *aritmetik*? Og hvad har de forskellige regnestykker med Hilberts hotel at gøre?
Opgave 7.6 a) Argumenter for at de *rationale tal* både kan beskrives som *brøker* (med hele tal i tæller og nævner) og som *periodiske decimaltal*. (*hint*: HEM 1, kapitel 7, s. 259 og 265. Eller HEM 1, projekt 7.4) b) Redegør for ideen i beviset s. 314 for at de rationale tal er tællelig. Hvilket nummer i række bliver brøken $\frac{4}{3}$?
Opgave 7.7 I 1873 arbejder Cantor på at finde det bevis, der siden i matematikhistorien blev kaldt for *Cantors diagonalbevis*. a) Hvad er det for en egenskab ved tallene, Cantor er sikker på gælder, og som han vil bevise? b) Redegør for ideen i Cantors diagonalbevis. c) Hvad er indholdet i *kontinuums-hypotesen*?
Opgave 7.8 I diskussionen, om tallinjen er kontinuert eller har huller omtales *sætningen om mellemliggende værdier*. Hvad siger denne sætning?

ISBN 9788770669184

Opgave 7.9
Forklar, hvad Dedekinds aksiom for konstruktion af de reelle tal (ved hjælp af *Dedekind-snit*) går ud på. Illustrer aksiomet med definitionen af tallet $\sqrt{2}$.

Opgave 7.10
Forklar, hvad Cantors aksiom for konstruktion af de reelle tal (ved hjælp af *intervalruser*) går ud på. Illustrer aksiomet med definition af tallet π

Afsnit 7.2 – 7.5

Opgave 7.11
I kapitel 2 indførtes integraler vha. *stamfunktioner*. Hvad kan så begrunde, at vi skal indføre integralregningen på ny, nu vha. *summer*?

Opgave 7.12
Givet en begrænset funktion, f defineret på et interval $[a;b]$.
a) Hvad forstås ved en *intervalinddeling* af $[a;b]$?
b) Hvad forstås ved en undersum og en oversum for funktionen f ?
c) Hvad er definitionen på, at funktionen f er *Riemann-integrabel* i $[a;b]$, og hvad forstås ved *Riemann-integralet* $\int_a^b f(x)dx$

Opgave 7.13
Givet en begrænset funktion, f defineret på et interval $[a;b]$.
a) Hvad forstås ved en *middelsum* for f , hørende til en given intervalinddeling ?
b) Hvad forstås ved en *venstresum*, en *højresum* og en *midtsum* ?

Opgave 7.14
a) Tegn en grafskitse af en begrænset, monoton funktion, og giv ved hjælp af den et argument for, at funktionen er Riemann-integrabel (*hint*: sætning 1 og beviset s 321)
b) Hvad siger *hovedsætningen om Riemann-integralet*?

Opgave 7.15
Redegør for de almindelige regneregler for integration

Opgave 7.16
Hvad siger *integralregningens middelværdisætning*? Illustrer din forklaring med en grafskitse.

Opgave 7.17
Analysens hovedsætning udtaler sig om sammenhængen mellem integration og differentiation.
a) Giv en præcis formulering af sætningen.
b) Redegør for ideen i beviset for sætningen, herunder for, hvordan integralet opdeles vha. *indskudssætningen* og vha. *regnereglerne*, samt for hvordan *integralregningens middelværdisætning* anvendes i omskrivningen.

Opgave 7.18
a) Hvad er formlen for *kurvelængden* af en graf?
b) I sætning 6 side 328 anføres, at funktionen f skal være differentiabel og f' skal være kontinuert. Hvorfor stilles de krav?
c) Skitser beviset

ISBN 9788770669184

Opgave 7.19
a) Illustrer grafisk, på en enhedscirkel, hvordan vi definerer *arcussinus* til et tal *y* (afsat på 2. aksen).
b) $\arcsin(y)$ er en buelængde på enhedscirklen. Redegør for hvordan *enhedscirklen* kan beskrives som *grafen for en funktion*, og hvordan denne buelængde, derfor kan beregnes.
c) Giv nu den præcise *analytiske definition af* $\arcsin(y)$.
d) Hvad er den præcise *definition af sinus og cosinus* til vinkler givet ved radiantal.

Opgave 7.20
a) Argumenter for, hvad den *afledede funktion af* $\arcsin(y)$ er.
b) På s. 333 gennemføres beviset for, at $\left(\sin(x)\right)' = \cos(x)$. Hvad er den grundlæggende ide i beviset?
c) Hvordan udledes formlen for differentiation af cosinus?

Opgave 7.21
Sætning 8 siger, at: $\dfrac{\sin(x)}{x} \to 1$ når $x \to 0$.
Giv en grafisk illustration på enhedscirklen af, at ”sætningen må være sand”.

Opgave 7.22
Den grundlæggende ide i en numerisk løsning af differentialligninger fremgår af skemaet s. 335. Forklar dette skema.

Opgave 7.23
I øvelse 7.19 på s. 335 er opstillet nogle koblede differentialligninger på vektorform.
a) Opstil de 4 differensligninger, vi får ud fra dette.
b) Redegør for, at vi får v_x og v_y som i tabellen s. 336.
Bemærk: I bogens tabel er de første værdier af Δv_x og Δv_y *skrevet i række 0. De skal stå nedenfor i række 1.*
c) Brug differensligningerne til at beregne Δx_1 og Δy_1 , samt kontrollere værdierne af Δv_x og Δv_y .
d) Udregn nu vha. differensligningerne x_1 og y_1 , samt v_{x1} og v_{y1}
e) Udregn v_1 og ψ_1 (*hint*: vinklen ψ_1 kan beregnes ved hjælp af tangens og v_{x1} og v_{y1})
f) Forklar, hvordan man udnytter regnearkets egenskaber til at fuldføre beregningerne.

Opgave 7.24
a) Redegør for, hvad vi forstår ved en SIR-model.
b) Nederst s. 336 står formlen: $N = S(t) + I(t) + R(t)$. Hvorfor står der *N* og ikke $N(t)$?
c) Øverst s. 337 står der: ”Antallet af mulige kontakter mellem raske og syge til tiden *t* er $S(t) \cdot I(t)$ ”. Argumenter for det.

Opgave 7.25
a) Redegør for de tre ligninger i den diskrete model, der præsenteres mindst s. 337.
b) Grafen side 337 mangler angivelse af, hvilke variable, der hører til hvilke grafer. Kan du ræsonnere dig frem til hvilke der hører sammen?

ISBN 9788770669184

Kontrolspørgsmål til kapitel 8: Teori, metoder og grundlæggende viden du skal kende

Afsnit 8.1

Opgave 8.1
I indledningen s. 339 fortælles, at Danmark i første del af 1900-tallet havde 4 nobelpristagere indenfor medicin og biologi. Find via fx Wikipedia hvem det var, og hvilke opdagelser der gav dem prisen.

Opgave 8.2
a) Giv eksempler på den særlige indsats der gøres i Danmark i årtierne omkring 1900 for at fremme forskning inden for medicin og biologi.
b) Beskriv Wilhelm Johannsens egen forskerkarriere

Opgave 8.3
Forskerne på Wilhelm Johannsens tid kunne bygge videre på banebrydende videnskabelige opdagelser i anden halvdel af 1800-tallet. ikke mindst Darwins og Mendels arbejder. Giv en kort præsentation af de vigtigste resultater, der er knyttet til de to videnskabsmænd.

Opgave 8.4
Wilhelm Johannsen indførte begrebet *gen* og betegnelserne *genotype* og *fænotype*. Redegør for hvad disse to betegnelser står for?

Opgave 8.5
Wilhelm Johannsen ønskede at udvikle faget biologi til et mere eksakt fag, der som andre naturvidenskabelige fag anvender eksperimenter. Han havde til dette brug for *rene linjer* indenfor planteavl. Hvad er en ren linje?

Opgave 8.6
a) Galtons undersøgelser af sammenhængen mellem fædres og sønners højde får ham til at indføre begrebet *regression*. Hvad står dette for, og hvorfor anvender han et sådant ord?
b) Galton opdager, at børn af meget høje forældre nok bliver høje, men normalt ikke bliver lige så høje som forældrene. Han kaldte dette fænomen ”regression towards the mean”. Hvis Galton har ret, hvorfor bliver vi så ikke generelt mindre? Eller: hvorfor sker der ikke en udjævning, så variationen bliver mindre?

Opgave 8.7
a) Hvad er et *Galtonbræt*?
b) Wilhelm Johannsen tegnede et histogram over vægten af sine prinsessebønner, og overlejrede diagrammet med en kurve gengivet s. 343. Kurven kaldte han ”die ideale Variationskurve”, eller den såkaldte ”Fehlerkurve”. Hvad er det for en kurve? Hvorfor brugte Johannsen ordet *fejlkurve* om denne?

Opgave 8.8
a) Redegør for Wilhelm Johannsens forsøg med *prinsessebønner*. Hvad er det han finder ud af om gennemsnitsvægten?
b) Forklar formuleringen s. 344: ”Wilhelm Johannsen har altså i første omgang *eftervist Galtons regressionslov*?

ISBN 9788770669184

Opgave 8.9 a) I øvelse 8.5 møder vi begrebet *z-score*. Forklar, hvad dette står for. b) I øvelse 8.5, punkt c) argumenteres for *højde og bredde af histogrammets søjler*. Forklar disse udregninger
Opgave 8.10 Wilhelm Johansen påviste, at gener ikke kan ændres via (Mendels) arvelove. Hvad er så hans forklaring på udvikling af *nye egenskaber* og *nye arter*?
Afsnit 8.2 – 8. 4
Opgave 8.11 a) Hvad er definitionen på en *random walk*? b) Hvis vi i en random walk er nået til 7 på tallinjen, hvor kan vi så lande i næste trin? c) Hvis en random walk har 6 skridt, hvad er da de mulige *slutværdier*?
Opgave 8.12 Hvad er et *Galtonbræt*? (*hint*: illustrationen s. 348 og den indledende fortælling).
Opgave 8.13 a) Hvad forstås ved et *ideelt eksperiment*? b) Forklar begreberne *forventet frekvens* og *forventet hyppighed*. c) Forklar begreberne *forventet slutværdi* og *forventet slutkvadrat*.
Opgave 8.14 På s. 350 undersøges en random walk med 5 skridt. a) Forklar hvorfra vi får tallene i tabellen over *hyppigheder*. b) Forklar *hvordan man udregner* den forventede slutværdi og det forventede slutkvadrat ud fra en sådan tabel.
Opgave 8.15 Argumenter for, at *den forventede slutværdi for en ideel random walk* er 0
Opgave 8.16 a) Hvad er *det forventede slutkvadrat* for en random walk med n skridt? b) I argumentationen herfor på s. 351-52 indgår et *induktionsbevis*. Forklar hvad et induktionsbevis er. c) Hvad er den grundlæggende ide i *udregningen af slutkvadratet* efter $n+1$ skridt? (*hint*: se øverst s. 352)
Opgave 8.17 a) Hvad er en *generaliseret random walk*? b) Hvad er den forventede slutværdi for en generaliseret random walk?
Opgave 8.18 Der findes mange forskellige forklaringer på opbygningen af *Pascals trekant*. I definitionen s. 353 er den knyttet til random walk. Redegør for dette, dvs. redegør for, hvor tallene i den n'te række kommer fra (*hint*: se evt. tabellen s. 359 over en random walk med 5 skridt)
Opgave 8.19 a) Hvad siger *sumreglen* i Pascals trekant? Argumenter for den. b) Konstruer selv *efterfølgende rækker* ud fra sumreglen.

ISBN 9788770669184

L&R Uddannelse
EGMONT

Opgave 8.20
På s. 355 defineres tallene $K(n,r)$ i relation til definitionen på Pascals trekant.
a) Forklar hvad vi forstår ved tal som $K(7,0)$, $K(7,1)$ og $K(7,4)$. Anvend fx en formulering som: ” $K(7,r)$ er den ideelle hyppighed for at man efter ... skrift lander i ... ”

Opgave 8.21
I øvelse 8.16 er $K(n,r)$ defineret som *antal måder, man kan vælge r personer eller ting ud fra en samlet population på n*. Redegør for sammenhængen mellem de to definitioner på det samme symbol.

Opgave 8.22
Der udføres en random walk med *n* skridt. Hvad er *det mest sandsynlige udfald*?

Opgave 8.23
a) Argumenter for, at i en random walk med n skridt er *den forventede afstand mellem slutværdi og middelværdi* lig med $\sqrt{n}$ (*hint*: se først på det forventede afstandskvadrat, se s. 358).
b) Hvad er betegnelsen for dette tal, og hvilket symbol anvendes for det?
c) Forklar de to begreber: *normale udfald* og *exceptionelle udfald*.

Opgave 8.24
I afsnit 2.5 gennemføres en statistisk vurdering af en *nulhypotese*.
a) Hvad er en nulhypotese?
b) Hvad er den grundlæggende ide i et *random walk- test*?

Opgave 8.25
a) Hvad er en *normalfordeling*?
b) Hvad er en *standardnormalfordelingskurve*?
c) Argumenter for at konstruktionen af standardnormalfordelingen medfører, at middelværdien er 0 og spredningen er 1.

Opgave 8.26
Vi har en tommelfingerregel for, om et datamateriale er normalfordelt, udtrykt ved andelen af observationer der ligger indenfor en afstand på 1, 2 eller 3 spredninger fra middelværdien.
a) Hvad siger ”reglen”?
b) ”Reglen” bunder i beregninger, vi kan foretage med en random walk. Forklar dette. (*hint*: se afsnit 2.4, specielt øvelserne 8.18 og 8.19)

Opgave 8.27
a) Forklar med dine egne ord, hvad *tæthedsfunktionen* for standardnormalfordelingen er.
b) Hvad er forskriften for tæthedsfunktionen?
c) I tidligere tider kaldtes tæthedsfunktionen ofte for *fejlfunktionen* (eng.: *errorfunction*, tysk: *Fehlerkurve*). Forklar dette.

Opgave 8.28
Opskriv med integraler og brug af tæthedsfunktionen, $\varphi(x)$:
a) Middelværdien = 0
b) Spredningen = 1
c) Kontroller dine formler med dit værktøjsprogram.

ISBN 9788770669184

Opgave 8.29
a) Hvad er forskriften for tæthedsfunktionen for en *normalfordeling med middelværdi =* μ *og spredning =* σ ?
b) Givet et datasæt med middelværdi = *m* og spredning = *s*. Antag et histogram over datasættet har areal *A*. Hvis vi vil prøve at *tilnærme med en normalfordelingskurve*, hvilken forskrift skal vi så anvende? (*hint*: praxisboksen s. 369 og eksempel 1 s. 370)

Bemærk: På s. 372 og 373 er der ved en fejl skrevet $\varphi(x)$ *(der er symbolet for tæthedsfunktionen) i stedet for* $\Phi(x)$ *, der er symbolet for fordelingsfunktionen. I praxisboksen s. 374 står det korrekt.*

Opgave 8.30
Givet en normalfordelt stokastisk variabel $X \sim N(\mu,\sigma)$.
a) Hvad er definitionen på *fordelingsfunktionen* for *X* opskrevet med et integral?
b) Hvad er definitionen på *fordelingsfunktionen* for *X* opskrevet med symbolikken $P(X...)$?
(*hint*: afsnit 3.5, s. 377-78).
c) Hvordan svarer vi på spørgsmål som: "Bestem den %-del som ligger over tallet a, ligger under tallet b, ligger mellem a og b"? Hvordan opskriver vi svarene med brug af fordelingsfunktionen $\Phi(x)$? Hvordan opskriver vi svarene med brug af symbolikken $P(X...)$?

Opgave 8.31
Antag et datasæt tilnærmes med en normalfordeling. Tæthedsfunktionen "svarer" da til et histogram. Hvad svarer fordelingsfunktionen til? (*hint*: Eksempel 2, s. 372)

Opgave 8.32
a) Forklar med udgangspunkt i øvelserne 8.28 og 8.29 hvorledes vi med *lineariseringsteknikken* undersøger om et datamateriale er normalfordelt.
b) Forklar, hvorledes vi med lineariseringsteknikken kan nå frem til en grafisk aflæsning af μ og σ .

Opgave 8.33
a) Redegør for, hvordan vi selv tegner et *fraktilplot.* (*hint*: øvelse 8.30, s. 375)
b) Redegør for, hvordan vi selv tegner et *QQ-plot.* (*hint*: øvelse 8.31, s. 376)
c) Redegør for, hvordan vi tegner et *QQ-plot med brug af et værktøjsprogram*? (*hint*: s. 376, QR-koden)

Opgave 8.34
Givet en normalfordelt stokastisk variabel $X \sim N(\mu,\sigma)$.
Antag vi har to oplysninger, fx: $P(X \leq 3) = 0{,}2$ og $P(X \geq 10) = 0{,}3$. Hvordan bestemmes μ og σ ?

Opgave 8.35
a) Forklar ideen i *bootstrapping* som metode til at undersøge kvaliteten af estimaterne på en lineær regression. Inddrag *konfidensintervaller* i din forklaring. (*hint*: afsnit 4, s. 378-381)
b) Redegør for, hvordan vi bestemmer *konfidensintervaller for parametrene med brug af et værktøjsprogram*? (*hint*: s. 381, QR-koden)

ISBN 9788770669184

Kontrolspørgsmål til kapitel 9: Teori, metoder og grundlæggende viden du skal kende

Afsnit 9.1

Opgave 9.1
a) Hvad menes med formuleringen hos Kepler – senere astronomer – om at ”der mangler en planet”?

Opgave 9.2
a) Kepler var overbevist om, at solsystemets opbygning og dynamik er styret af harmoniske love, og at han var sat på Jorden for at opdage disse. Blandt de mange, han mente at opdage, var den vi i dag kalder for *Keplers 3. lov*. Hvad siger denne? Er det en videnskabelig lov? Hvorfor / hvorfor ikke?
b) Jagten på den manglende planet fik bl.a. næring af den såkaldte *Titius-Bodes lov*. Hvad siger denne? Er det en videnskabelig lov? Hvorfor / hvorfor ikke?
c) Hvad var *Himmelpolitiet* for en institution?

Opgave 9.3
Redegør for historien om opdagelsen af *Ceres*, om dens ”forsvinden” og om Gauss’ bidrag til at den blev genfundet

Opgave 9.4
På s. 385-86 gengives uddrag af Gauss’ egen fremstilling af sin nye metode.
a) Hvorfor er det ifølge Gauss nødvendigt med flere observationer end antallet af ukendte parametre, for at bestemme disse med nogenlunde sikkerhed?
b) Hvordan bestemmes det mest sandsynlige sæt af værdier for de søgte parametre?

Opgave 9.5
a) Forklar ideen i ligningsløsning med *lige store koefficienters metode*.
b) Metoden kaldes også for ”Gauss-elimination”. Kan du forklare dette navn?

Opgave 9.6
Den franske matematiker *Legendre* havde faktisk fundet *mindste kvadraters metode* før Gauss. Hvad var det Legendre brugte sin metode til?

Afsnit 9.2 – 9.4

Opgave 9.7
Givet et råt, ubearbejdet datasæt. Hvordan går vi frem i en undersøgelse af, om vi kan gennemføre en matematisk modellering af datasættet?

Opgave 9.8
Formuler og bevis Pythagoras sætning i 3 dimensioner.

Opgave 9.9
a) Hvordan *adderes* n-dimensionale vektorer, hvordan *ganges en konstant* på en n-dimensional vektor og hvordan udregnes *skalarproduktet* af to n-dimensionale vektorer?

ISBN 9788770669184

Begreber, sætninger og formler du skal kende fra kapitel 9

Opgave 9.10
a) Forklar hvorledes en *kvadratsum*, som indgår i mindste kvadraters metode, kan tolkes som *kvadratet på afstanden* fra en vektor til en linje i et n-dimensionalt rum.
b) Hvilket tal *m* giver *den mindste afstand* i det n-dimensionale rum, mellem et datasæt og linjen bestemt ved $t\cdot(1,1,...,1)$?
c) Illustrer den geometriske ide i beviset for denne sætning.

Opgave 9.11
Givet et datasæt med *n* værdier.
a) Hvordan bestemmes *middeltallet*?
b) Hvordan bestemmes *variansen* og *spredningen*?

Opgave 9.12
a) Givet to datasæt, ***x*** og ***y***. Hvad forstår vi ved *covariansen*, $\mathrm{cov}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$?
b) Hvis vi tror på en lineær afhængighed, Hvordan *estimeres* da hældningskoefficienten $\hat{a}$ og konstantleddet $\hat{b}$?

Opgave 9.13
Givet to datasæt, ***x*** og ***y***. Hvad forstår vi ved *tyngdepunktet* for datasættet?

Opgave 9.14
a) Givet to datasæt, ***x*** og ***y***, hvor vi tror på en lineær afhængighed. Hvad forstår vi ved *observerede* værdier og *forventede* værdier?
b) Argumenter for, at observerede og forventede værdier har samme middeltal.

Opgave 9.15
a) Hvad mener man, når man siger, at ”to datasæt er korrelerede”?
b) Der findes et mål for, hvor god korrelationen er. Hvad er definitionen på denne *korrelationskoefficient, R*?

Opgave 9.16
Hvad forstås ved ”planen udspændt af vektorerne , ***a*** og ***b***”

Opgave 9.17
a) Korrelationskoefficienten kan tolkes som *cosinus til en vinkel mellem to planer*. Hvilke to planer?
b) Argumenter for, at korrelationskoefficienten, *R* altid ligger mellem -1 og +1.

Opgave 9.18
a) Hvad er definitionen på *determinationskoefficienten* (*forklaringsgraden*), r^2?
b) Hvad er sammenhængen mellem forklaringsgraden og korrelationskoefficienten?
c) Hvad er sammenhængen mellem forklaringsgraden og graden af afhængighed mellem to variable? Kommenter i den forbindelse udsagn som ”den uafhængige variabel ***x*** forklarer 57% af variationen i den afhængige variabel ***y*** ”.

Opgave 9.19
Hvad var statistikeren Francis Anscombes hensigt med at producere sine 4 datasæt?