ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse
EGMONT

Skalarprodukt (indre produkt) generelt og i funktionernes verden

Et **skalarprodukt** kaldes i lineær algebra generelt for et **indre produkt**. Det er defineret således (hentet fra wikipedia):

Et **indre produkt** er i matematikken en funktion $f: V \times V \to \mathbb{R}$ eller $f: V \times V \to \mathbb{C}$, hvor V er et reelt hhv. komplekst vektorrum, der opfylder tre betingelser. Værdien $f(\mathbf{u},\mathbf{v})$ skrives dog normalt $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$.

1. $\langle r\mathbf{u}+s\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = r\langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle + s\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle$ og $\langle \mathbf{u}, r\mathbf{v}+s\mathbf{w}\rangle = r\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + s\langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle$.
2. $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle$.
3. $\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle \geq 0$ og $\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Her er symbolerne med fed skrift vektorer, og symbolerne med almindelig skrift er tal (skalarer). De tre regneregler skal gælde i tilfældet, hvor tallene er reelle tal. Hvis det er komplekse tal, så er regnereglerne en smule anderledes.

Mængden af kontinuerte funktioner defineret på et bestemt interval $[a;b]$ er et vektorrum med skalarprodukt.
Vektorerne er her de kontinuerte funktioner.
Skalarerne er de reelle tal.

Hent definitionen på et vektorrum og kontrollér, at de 8 aksiomer er opfyldt. Det neutrale element er her 0-funktionen, altså den funktion der er 0 i hele $[a;b]$.

Vi definerer skalarproduktet af to funktioner *f* og *g* således:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx$$

Givet tre funktioner, *f*, *g* og *h* og to tal *r* og *s* . Regneregler for funktioner og for integraler giver:

$$\langle r\cdot f + s\cdot g, h\rangle = \int_a^b (r\cdot f(x)+s\cdot g(x))\cdot h(x)dx$$

$$= \int_a^b r\cdot f(x)\cdot h(x) + s\cdot g(x)\cdot h(x)dx$$

1a) $= \int_a^b r\cdot f(x)\cdot h(x)dx + \int_a^b s\cdot g(x)\cdot h(x)dx$

$$= r\cdot \int_a^b f(x)\cdot h(x)dx + s\cdot \int_a^b g(x)\cdot h(x)dx$$

$$= r\cdot\langle f,h\rangle + s\cdot\langle g,h\rangle$$

Vis selv 1b) og 2)

Punkt 3) er normalt den ”problematiske”. Her har vi:
$\langle f,f\rangle = \int_a^b f(x)\cdot f(x)dx = \int_a^b (f(x))^2\,dx$, og da $(f(x))^2 \geq 0$, er integralet også større end eller lig med 0.

Antag nu, at $\langle f,f\rangle = 0$, dvs $\int_a^b (f(x))^2\,dx = 0$. Så skal vi vise, at $f(x)=0$.

Det er her vi får brug for, at *f* er kontinuert:
Antag $f(x)\neq 0$ i et punkt, x_0 , feks at $f(x_0)>0$.
Så kan vi på *y*-aksen lægge et interval *I* om $f(x_0)$, der er rent positivt. Men da *f* er kontinuert, så kan vi lægge et interval *J* om x_0 , således at alle funktionsværdier her er positive. Lad os sige, at intervallet $J=[c;d]$, hvor vi har: $a<c<d<b$.

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

Det er klart, at $\left(f(x)\right)^2 \geq 0$, men i intervallet $J=\left[c;d\right]$ er $\left(f(x)\right)^2 > 0$. Der findes derfor at tal *k*, så $\left(f(x)\right)^2 > k$ for alle tal i $J=\left[c;d\right]$.
Nu kan vi udregne:

$$\left\langle f,f\right\rangle = \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx = \int_a^c \left(f(x)\right)^2 dx + \int_c^d \left(f(x)\right)^2 dx + \int_d^b \left(f(x)\right)^2 dx \geq \int_c^d \left(f(x)\right)^2 dx \geq k\cdot(d-c) > 0 \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx = 0$$

Overvej selv hvilke regler fra integralregning vi har berugt undervejs!

Vi har altså ud fra antagelsen – den grønnede formulering ovenfor – nået frem til, at $\left\langle f,f\right\rangle > 0$. Men det er jo i modstrid med punkt 3, hvor forudsætningen var $\left\langle f,f\right\rangle = 0$. Derfor må vores "grønne" antagelse være forkert. **Der er ingen punkter, hvor $f(x)\neq 0$**
Altså kan vi konkludere: $\left\langle f,f\right\rangle = 0 \Leftrightarrow f(x)=0$ for alle *x*

Hermed har vi afsluttet beviset for, at defrinitionen: $\left\langle f,g\right\rangle = \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx$ giver et skalarprodukt.