ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

Vektorrum

Wikipedia giver en kort og præcis

Definition

Ved et vektorrum over legemet $\mathbb{K}$ (også kaldet et $\mathbb{K}$-vektorrum) forstås en mængde V udstyret med to operationer

$$+ : V \times V \to V$$

og

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$$

som opfylder følgende betingelser (aksiomer):

- Additionen gør $(V, +)$ til en abelsk (dvs. kommutativ) gruppe. Det betyder at
  1. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ for alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ (associativitet)
  2. Der eksisterer et neutralt element $\vec{o}$ kaldet nulvektoren som opfylder at $\vec{v} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{v} = \vec{v}$ for alle $\vec{v} \in V$
  3. Enhvert element $\vec{v} \in V$ har et inverst element (en *modsat vektor*) kaldet $-\vec{v}$ som opfylder at $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{o}$
  4. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ for alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$ (kommutativitet)
- Multiplikationen opfylder betingelserne (gangetegnet $\cdot$ udelades normalt)
  1. $(rs)\vec{v} = r(s\vec{v})$ for alle $r, s \in \mathbb{K}$ og $\vec{v} \in V$ (en slags associativitet)
  2. $r(\vec{u} + \vec{v}) = r\vec{u} + r\vec{v}$ for alle $r \in \mathbb{K}$ og $\vec{u}, \vec{v} \in V$ (distributivitet over additionen i V)
  3. $(r + s)\vec{v} = r\vec{v} + s\vec{v}$ for alle $r, s \in \mathbb{K}$ og $\vec{v} \in V$ (distributivitet over additionen i legemet $\mathbb{K}$)
  4. $1\vec{v} = \vec{v}$ for alle $\vec{v} \in V$ hvor 1 betegner ét-elementet (det multiplikative neutralelement) i legemet, $1 \in \mathbb{K}$

Elementerne i V kaldes da *vektorer*, mens elementerne i $\mathbb{K}$ kaldes *skalarer*.

Bemærk at der skal foreligge et legeme med alt hvad det indebærer, før man kan indføre et vektorrum. Meget ofte er legemet $\mathbb{K}$ simpelthen $\mathbb{R}$, de reelle tal, eller $\mathbb{C}$, de komplekse tal, men vektorrum over andre legemer betragtes også. Hvis man i det ovenstående udskifter legemet $\mathbb{K}$ med en generel ring, omtaler man ikke V som et vektorrum, men som en modul (eller *et* modul).

Vektorrum er centrale inden for disciplinen lineær algebra, men de forekommer også inden for (stort set alle) mere avancerede matematiske områder.