ISBN 9788770668781

Projekt 9.5 Keplers beregning af Marsbanen

1. Historisk indledning

Efter reformationen voksede der i 1500-tallet i Europa en religiøs intolerance og fundamentalisme frem på begge sider af skellet mellem protestanter og katolikker. Det udløste religionskrige i 1500-tallet og spillede en betydelig rolle i trediveårskrigen i 1600-tallet. Og indenfor den nye religiøse bevægelse skete der en række udspaltninger i nye retninger, fraktioner og sekter, som også var indbyrdes intolerante. Kættere og vantro, som ens modstandere altid blev kaldt, blev jagtet og i denne periode ofte brændt på bålet.

I Centraleuropa var det svært at bevæge sig frit rundt, for hvem var ven og hvem fjende. Kepler blev født i 1571, og skulle egentlig læse teologi, men da han ikke ville han skrive under på hele '*Den Augsburgske trosbekendelse*' – der var passager han fandt for langt ude, specielt lutheranernes opfattelse af nadveren – så kunne han ikke blive præst.

Godt for det, tænker vi nok idag, for Kepler viste så store evner indenfor matematik og astronomi, at han derfor blev opfordret til at tage en matematisk uddannelse. Midt i 1590'erne var han lærer i Graz i det nuværende Østrig. Det var dengang protestantisk, men skillelinjen mellem det protestantiske og det katolske Europa lå ikke klippefast, og da en ny kejser (Ferdinand II) kom til, startede han en modreformation. Kepler havde advokeret for Kopernikus heliocentriske model i både tale og skrift, og nu blev anklagerne mod ham så voldsomme og truende at han og familien flygter nordpå.

Kepler var meget interesseret i astronomi, han havde som barn set den samme komet, som Tycho Brahe beskriver i skriftet '*Kometen 1577*', og nogle år senere oplevede han med få års mellemrum to totale måneformørkelser. Interessen havde han båret med sig, og han kendte godt Europas mest berømte videnskabsmand, Tycho Brahe, ville gerne møde ham og arbejde for ham – men Tycho Brahe sad på Hveen langt mod nord. Men nogenlunde samtidig med Keplers flugt flygter Tycho Brahe ud af Danmark! Der er kommet en ny ung konge (Christian d 4.), som ikke er helt så begejstret for Tycho Brahe, som Faderen (Frederik d. 2) var. Og adelen er endnu mindre begejstret, de finder det uhørt at den danske stat skal yde Tycho Brahe så enorme summer – han modtager faktisk omkring 5% af den danske stats nationale budget! De leder efter et svagt punkt og de har nu en allieret i kongen, så de sætter ind der, hvor de selv finder han er mest sårbar – han respekterer ikke de skarpe grænser mellem stænderne.

Ikke nok med at Tycho Brahe foretrækker kloge og flittige bondesønner (som Longomontanus) fremfor knap så kloge og flittige adelssønner, men han har også tilladt sig at gifte sig under sin stand, med en almindelig borgerlig kvinde. Det opfattes som et farligt bidrag til sædernes forfald, så han får forelagt et krav om at lade sig skille. Så er det han stikker af. I forvejen har han sendt mange af sine instrumenter, dog ikke alle, og sine værdifulde observationer har han også med sig.

Efter flere omskiftelser tager Kejseren i Prag ham til sig i 1598 – han er trods alt Europas mest berømte videnskabsmand. Den slags ansættelser ved hoffet blev brugt til at kaste glans over kejseren. Da Kepler får nys om det skriver han for at få foretræde og søge om en stilling hos ham. Det mislykkes i første omgang, men måske har Tycho Brahe taget oplysninger på ham og fundet ud af, at han er en sand regnekunstner. Sådan en har Tycho Brahe brug for til at gennemføre sin plan: At få beregnet Mars-banen, den bane planeten Mars følger om Solen, med det formål at bevise, at Det Tychonske system, og hverken det geocentriske eller det heliocentriske er den sande model for himmelrummet. Men det vil kræve uhyre mange og nøjagtige beregninger.

Så Kepler kommer med på holdet i Prag. Kepler tror ikke på **Tychos system**, , hvor Jorden er centrum, og planeter kredser om Solen, der så igen kredser om Jorden. Kepler tror selvfølgelig heller ikke på **Aristoteles og Ptolemæus geocentriske system**. Han er tilhænger af **Kopernikus heliocentriske system**. Men han er en hæderlig videnskabsmand, så han fifler ikke med data. Kepler er sikker på, at han er et redskab for Gud. Gud har en plan med ham, at det er ham, der skal vise menneskene, hvordan tingene hænger sammen i himmelrummet.

ISBN 9788770668781

Øvelse 1.
a) Opdel klassen i grupper på tre. Alle forbereder sig ved at sætter sig ind i de tre konkurrerende modeller, enten ved at søge på nettet eller ved at hente projekt 10.9 fra HEM1, hvor det hele er gennemgået og illustreret. Du kan hente projektet her:

b) På dagen, hvor grupperne skal arbejde med emnet, trækkes der lod mellem de tre om hvem der skal frem lægge hvad. Fremstillingerne skal være ledsaget af illustrationer.

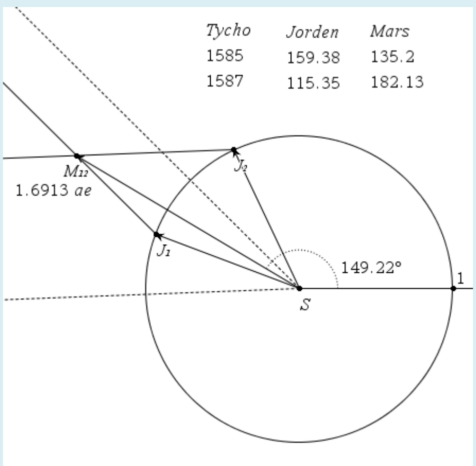
2. Keplers rekonstruktion af Mars ellipsebane ud fra Tycho Brahes observationer

Forhistorien til Keplers beregninger er den at Tycho Brahe gennem omhyggeligt udførte studier af Mars position på nattehimlen havde opbygget en unik liste af observationer, som Kepler kunne tage udgangspunkt i. Tycho Brahe noterede fra sit observatorium Uranienborg på Hven over mange år, hvor Mars stod på nattehimlen langs Ekliptika, Solens bane, og samtidigt noterede han også, hvor Solen stod langs Ekliptika. Særligt interessante er de observationer, der adskiller sig med netop 687 dage, som er Mars omløbstid omkring Solen, for da vidste Kepler, at Mars var tilbage på præcis det samme sted i sin bane omkring Solen: Her er et typisk eksempel fra Tycho Brahes observationer:

Dato	*Heliocentrisk længdegrad for Jorden*	*Geocentrisk længdegrad for Mars*
1585 Feb. 17	159° 23' = 159.38°	135° 12' = 135.20°
1587 Jan. 5	115° 21' = 115.35°	182° 08' = 182.13°

Øvelse 2 **Udfør selv observationer**
Du kan selv 'udføre' observationen ved at gå ind i et planetarieprogram, fx Stellarium, og tage en tur i tidsmaskinen. Du skal huske at tage højde for at planetarieprogrammet arbejder med den gregorianske kalender, mens Tycho Brahe brugte den julianske kalender, hvorfor der er 10-11 dages forskel på de to kalendere (alt eftersom observationen udføres før eller efter midnat). Den ovenstående dato indtastes derfor fx som den 27. februar 1985. Find først den præcise position for Uranienborg

Øvelse 3 **En geometriske version af Keplers beregning**
Kepler kendte ikke Jordens afstand til Solen, men satte den til én astronomisk enhed. Ydermere antog han i første omgang at Jorden bevægede sig en cirkel omkring Solen. De heliocentriske længdegrader gav da Jordens position de to datoer. Samtidigt gav de geocentriske længdegrader retningsvinklerne til Mars set fra Jorden. Vi kan altså nemt konstruere de to sigtelinjer til Mars og dermed finde Mars position. Her er Kepler især interesseret i afstanden fra Solen til Mars og retningsvinklen fra Solen til Mars, dvs. den heliocentriske længdegrad for Mars. Kepler regnede - vi konstruerer i



L&R Uddannelse EGMONT

stedet i et dynamisk geometriprogram. Først opretter vi Jordens bane omkring Solen som en cirkel med radius 1 astronomisk enhed. Så drejer vi enhedspunktet på Jordens bane (forårspunktet) med 159.38° henholdsvis 115.35° for at finde Jordens position J_1 og J_2 de to dage. Derefter drejer vi den vandrette sigtelinje med 135.20° henholdsvis 182.13° og forskyder de to sigtelinjer, så de udgår fra Jorden. Der hvor de to sigtelinjer skærer hinanden befandt Mars sig de to dage.
Vi kan nu aflæse (eller som Kepler bruge hård trigonometri kun med støtte af tabeller, dvs. de indbyggede sinus- og cosinusfunktioner) at afstanden til Mars var 1.6913 astronomiske enheder og at retningsvinklen til Mars, den såkaldte heliocentriske længdegrad, var 149.22°. Vi kender altså nu det første punkt på Mars bane. Fortsætter vi på denne måde kan vi finde fx fem udvalgte punkter på Mars bane ud fra Tycho Brahes observationer og omsætte dem til afstande og retningsvinkler for Mars.

Øvelse 4 Her er et udsnit af Tycho Brahes Mars data fra Keplers Astronomia Nova:

Dato	*Heliocentrisk længdegrad for Jorden*	*Geocentrisk længdegrad for Mars*
1585 Feb. 17	159° 23'	135° 12'
1587 Jan. 5	115° 21'	182° 08'
1591 Sep. 19	5° 47'	284° 18'
1593 Aug. 6	323° 26'	346° 56'
1593 Dec. 7	85° 53'	3° 04'
1595 Oct. 25	41° 42'	49° 42'
1587 Mar. 28	196° 50'	168° 12'
1589 Feb. 12	153° 42'	218° 48'
1585 Mar. 10	179° 41'	131° 48'
1587 Jan. 26	136° 06'	184° 42'

Omsæt de fundne observationer til heliocentriske koordinater for Mars.

Resultatet ses i det viste skema. Disse observationer udelukker selvfølgelig, at Mars følger en jævn cirkelbane omkring Solen med Solen i centrum, da afstanden til Solen jo i hvert fald varierer fra 1.38 ae til 1.69 ae, men det vidste Kepler sådan set godt. Allerede Ptolemæus havde foreslået at Solen lå excentrisk (uden for centrum), dvs. et stykke væk fra centrum i cirkelbanen, hvorfor Solen sommetider lå tættere på Mars og somme tider længere væk fra Mars.

Observation	Mars afstand fra Solen	Mars retningsvinkel
1,2	1.6913 ae	149.22°
3,4	1.3789 ae	330.12°
5,6	1.5027 ae	44.39°
7,8	1.6390 ae	185.20°
9,10	1.6747 ae	158.09°

Spørgsmålet er altså blot om en excentrisk cirkelbane er forenelig med netop disse data? Eller om de bedre er forenelige med en ellipsebane med Solen i det ene brændpunkt? Kepler havde selvfølgelig flere data til sin rådighed, men vi vil koncentrere os om de ovenfor fundne fem positioner langs Mars bane.

3. Ellipse eller excentrisk cirkel

Før vi regner skal vi lige have definitionerne på plads (se illustrationerne nedenfor):
For en cirkel med radius a, hvor Solen befinder sig et stykke uden for centrum, defineres excentriciteten som:

$$e_{cirkel} = \frac{|CS|}{a}$$, hvor C er centrum, S er Solens placering og a er radius

ISBN 9788770668781

Heraf får vi: $|CS| = a \cdot e_{cirkel}$.

For en ellipse, der er karakteriseret ved sine to *brændpunkter*, gælder der, at summen af afstandene fra et vilkårligt punkt på ellipsen til de to brændpunkter er en konstant. Ellipsen er fladtrykt, så her er der ikke én radius, men en *storakse a*, og en *lilleakse b*. I en ellipse-model for planetbanerne er Solen placeret i et af brændpunkterne. Excentriciteten, der her måler graden af fladtrykthed er defineret:

$$e_{ellipse} = \frac{|CS|}{a}$$, hvor C er centrum, S er Solens placering og a er storaksen.

Heraf får vi: $|CS| = a \cdot e_{ellipse}$.

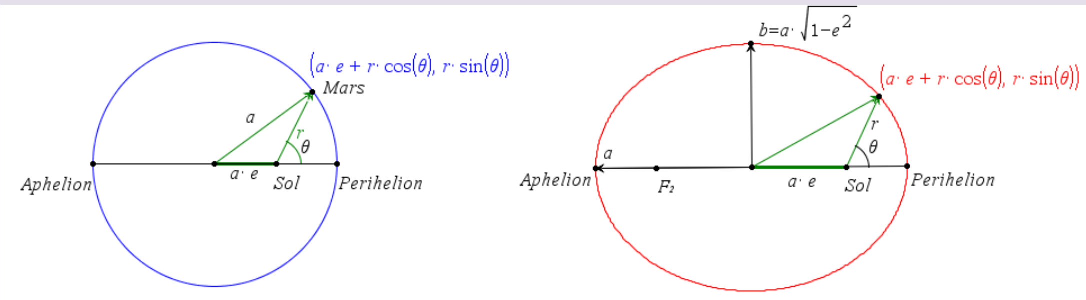
I HEM B, kapitel 0, afsnit 1 og i HEM 2, kapitel 7, afsnit 1 er ellipsen behandlet. Her vises blandt andet, at ellipsen kan beskrives ved ligningen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

samt formlen, der kæder a, b og e sammen:

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

Øvelse 5



Excentrisk cirkelmodel for Marsbanen — Ellipsemodel for Marsbanen

I begge modeller kaldes a for den halve storakse og e for excentriciteten

a) Vis, at der i begge modeller gælder:

1) $r_{\min} = a \cdot (1 - e)$ (Perihelion) 2) $r_{\max} = a \cdot (1 + e)$ (Aphelion)

3) $a = \dfrac{r_{\min} + r_{\max}}{2}$ 4) $e = \dfrac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}$

Vi vil nu finde ligningerne, der binder radius og retningsvinkel sammen, for de to modeller:

Øvelse 6

a) Gør rede for at der i cirkelmodellen gælder: $a^2 = a^2 \cdot e^2 + 2 \cdot a \cdot e \cdot r \cdot \cos(\theta) + r^2$

b) Gør rede for at der i ellipsemodellen gælder: $r + r \cdot e \cdot \cos(\theta) = a \cdot (1 - e^2)$

(Vink: For punkt a): Anvend cosinus-relationerne. For punkt b): Kald planetpunktet $P(x, y)$ og vis ved afstandsformlen og brug af ellipsens ligning, at $r^2 = (a - e \cdot x)^2$. Kontroller dine udregninger med udregningerne på bogens **website (Mangler – På vej)**

Bemærkning: I begge modellerne forudsættes det at aksen ligger vandret, men det behøver jo ikke gælde oppe på himlen. Så der har aksen i stedet en retningsvinkel θ_0 og modelligningerne hedder derfor

Excentrisk cirkelbane: $a^2 = a^2 \cdot e^2 + 2 \cdot a \cdot e \cdot r \cdot \cos(\theta - \theta_0) + r^2$

ISBN 9788770668781

Ellipsebane: $r + r \cdot e \cdot \cos(\theta - \theta_0) = a \cdot (1 - e^2)$

med modelparametrene a (den halve storakse), e (excentriciteten) og θ_0 (retningsvinklen til perihelion).
Til at bestemme disse tre modelparametre har Kepler adgang til fem datapunkter, dvs. han kan opstille 5 ligninger og derved bestemme de 3 parametre.

I praksis kunne han forsøge sig med at løse 3 ligninger med 3 ukendte, og se hvordan de to sidste ligninger opførte sig, men selv det var meget svært for Kepler! Så i stedet satsede han på at der blandt Tycho Brahes data var to observationer, der fastlægger perihelet og aphelet. De to første datapunkter adskiller sig netop stort set med 180° og har en meget høj afstand til Solen henholdsvis en meget lav afstand til Solen. Kepler satsede derfor på at de netop udgjorde perihelet og aphelet for Mars bane og regnede glad videre på modellen, der nu kunne forenkles betydeligt!

Her prøver vi i stedt at tillempe modellerne, så de bedst muligt går gennem de fem datapunkter. Vi vil først forsøge at transformere ligningerne om, så de passer bedst muligt med *en lineær model*. Den grimmeste ikke-lineære parameter er retningsvinklen θ_0. Den gemmer vi væk i projektionen på den halve storakse, dvs. vi indfører variablen $x = r \cdot \cos(\theta - \theta_0)$ og opfatter storaksen som en *x*-akse med nulpunkt i Solen.

Øvelse 7 Gør rede for at den excentriske cirkelbaneligning kan omskrives på formen:

$$a^2 = a^2 \cdot e^2 + 2 \cdot a \cdot e \cdot x + r^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = -2 \cdot a \cdot e \cdot x + a^2 \cdot (1 - e^2)$$

Kvadratet på afstanden er altså i denne model en lineær funktion af projektionen *x*, på formen $r^2 = A_1 \cdot x + B_1$.

b) Gør rede for at ellipsebanens ligning kan omskrives på formen:

$$r + e \cdot x = a \cdot (1 - e^2) \quad \Rightarrow \quad r = -e \cdot x + a \cdot (1 - e^2)$$

Afstanden er altså i denne model en lineær funktion af projektionen *x*, på formen $r = A_2 \cdot x + B_2$.

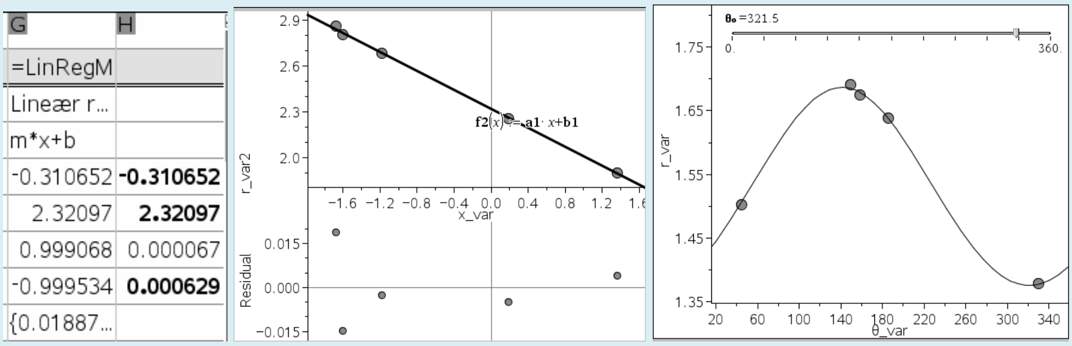
c) Gør rede for at sammenhængen mellem de to modeller er givet ved $r_{ellipse}{}^2 = r_{cirkel}{}^2 \cdot (1 - e^2) + e^2 \cdot x^2$.

d) Hvis excentriciteten *e* er lille, fx 0.1, hvor stor er så den relative forskel mellem $r_{ellipse}$ og r_{cirkel}?

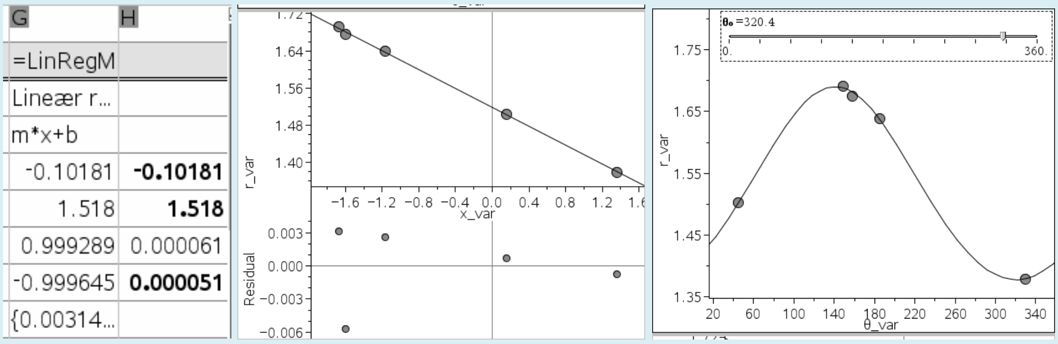
Opgave 50 giver os nu en opskrift på, hvad vi skal gøre.

Øvelse 8	**Eksperimenter selv med modellerne** Vi indfører en skyder for perihel-vinklen θ_0 og udregner projektionen *x*. Derefter udfører vi en lineær regression på henholdsvis kvadratet på afstanden og selve afstanden som funktion af projektionen *x*. Det giver os den bedste rette linje gennem de transformerede datapunkter. Da denne rette linje afhænger af perihel-vinklen θ_0 trækker vi nu forsigtigt i skyderen for perihel-vinklen og kan grafisk se hvornår de transformerede data samler sig omkring en ret linje. Vi kan også holde øje med summen af kvadraterne på residualerne i den lineære model: Jo mindre den er, jo bedre er modellen ifølge mindste kvadraters metode.

ISBN 9788770668781



Den excentriske cirkelmodel



Keplers Ellipsemodel

Øvelse 9	a) Vis at summen af residualkvadraterne for den excentriske cirkelmodel er givet ved 0.000629. b) Vis at summen af residualkvadraterne for Keplers ellipsemodel er givet ved 0.000051.

Øvelse 10	a) Tegn den fundne excentriske cirkelmodel oven i marspunkterne og vurdér overensstemmelsen. b) Tegn den fundne ellipsemodel oven i marspunkterne og vurdér overensstemmelsen.

Formelt klarer ellipsebanen sig en anelse bedre end den excentriske cirkelmodel. Men forskellen er så lille, fordi excentriciteten på ca. 0.10 er så tilpas lille, at vi i praksis *ikke* kan bruge de fem datapunkter til at afgøre om cirkelmodellen skal forkastes, og at vi derfor er tvunget til at beskrive Marsbanen som en ellipsebane.
For at komme frem til den konklusion måtte Kepler dykke længere ned i Tycho Brahes observations-manualer og regne videre i yderligere nogle år. For det første må han som udgangspunkt forbedre Jordens banemodel og inddrage det faktum, at også Jordens bane er excentrisk – noget, der fx fremgår af de forskellige længder af årstiderne, dvs. tidsrummene mellem solhverv og jævndøgn. For det andet så befinder den tydeligste afvigelse sig i ellipsens to øvrige toppunkter, endepunkterne for lilleaksen. I den excentriske cirkelmodel er der ingen forskel på storeaksen og lilleakse, idet begge to er givet ved cirklens diameter.

Men i en ellipse er den halve lilleakse givet ved $b = a \cdot \sqrt{1-e^2}$. En omhyggelig udmåling af den halve lilleakse *b* kan altså ikke blot vise at den effektivt er mindre end *a*, men også at den er rimelig overensstemmelse med ellipseformlen, hvilket var et af Keplers vigtigste indicier for ellipsebanen.