ISBN 9788770668781

Skalarprodukt (indre produkt) generelt og i funktionernes verden

Et **skalarprodukt** kaldes i lineær algebra generelt for et **indre produkt**. Det er defineret således (hentet fra wikipedia):

Et **indre produkt** er i matematikken en funktion $f: V \times V \to \mathbb{R}$ eller $f: V \times V \to \mathbb{C}$, hvor V er et reelt hhv. komplekst vektorrum, der opfylder tre betingelser. Værdien $f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ skrives dog normalt $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

1. $\langle r\mathbf{u} + s\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = r\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + s\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ og $\langle \mathbf{u}, r\mathbf{v} + s\mathbf{w} \rangle = r\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + s\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$.
2. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
3. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ og $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Her er symbolerne med fed skrift vektorer, og symbolerne med almindelig skrift er tal (skalarer). De tre regneregler skal gælde i tilfældet, hvor tallene er reelle tal. Hvis det er komplekse tal, så er regnereglerne en smule anderledes.

Mængden af kontinuerte funktioner defineret på et bestemt interval $[a;b]$ **er et vektorrum med skalarprodukt.**
Vektorerne er her de kontinuerte funktioner.
Skalarerne er de reelle tal.

Hent definitionen på et vektorrum og kontrollér, at de 8 aksiomer er opfyldt. Det neutrale element er her 0-funktionen, altså den funktion der er 0 i hele $[a;b]$.

Vi definerer skalarproduktet af to funktioner f og g således:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx$$

Er dette virkelig et skalarprodukt? Vi må tjekke de tre krav:

Givet tre funktioner, f, g og h og to tal r og s. Regneregler for funktioner og for integraler giver:

Bevis for 1a):

$$\begin{aligned}
\langle r \cdot f + s \cdot g, h \rangle &= \int_a^b \left(r \cdot f(x) + s \cdot g(x) \right) \cdot h(x)\,dx \\
&= \int_a^b r \cdot f(x) \cdot h(x) + s \cdot g(x) \cdot h(x)\,dx \\
&= \int_a^b r \cdot f(x) \cdot h(x)\,dx + \int_a^b s \cdot g(x) \cdot h(x)\,dx \\
&= r \cdot \int_a^b f(x) \cdot h(x)\,dx + s \cdot \int_a^b g(x) \cdot h(x)\,dx \\
&= r \cdot \langle f, h \rangle + s \cdot \langle g, h \rangle
\end{aligned}$$

Øvelse 1.
Gennemfør selv bevis for 1b) og 2 efter samme opskrift.

Bevis for punkt 3) der normalt er den "problematiske". Her har vi:
Første del

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(x) \cdot f(x)\,dx = \int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx \;,$$

ISBN 9788770668781

og da $\left(f(x)\right)^2 \geq 0$,
er integralet også større end eller lig med 0.

Anden del

Antag nu, at $\langle f,f\rangle = 0$, dvs $\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx = 0$. Så skal vi vise, at $f(x)=0$.
Det er her vi får brug for, at *f* er kontinuert:
Antag $f(x)\neq 0$ i et punkt, x_0 , feks at $f(x_0)>0$.
Så kan vi på *y*-aksen lægge et interval *I* om $f(x_0)$, der er rent positivt. Men da *f* er kontinuert, så kan vi lægge et interval *J* om x_0, således at alle funktionsværdier her er positive. Lad os sige, at intervallet $J=[c;d]$, hvor vi har: $a<c<d<b$.
Det er klart, at $\left(f(x)\right)^2 \geq 0$, men i intervallet $J=[c;d]$ er $\left(f(x)\right)^2 > 0$. Der findes derfor at tal *k*, så $\left(f(x)\right)^2 > k$ for alle tal i $J=[c;d]$.
Nu kan vi udregne:

$$\langle f,f\rangle = \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx = \int_a^c \left(f(x)\right)^2 dx + \int_c^d \left(f(x)\right)^2 dx + \int_d^b \left(f(x)\right)^2 dx \geq \int_c^d \left(f(x)\right)^2 dx \geq k\cdot(d-c) > 0 \ \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx = 0$$

Overvej selv hvilke regler fra integralregning vi har brugt undervejs!

Vi er altså ud fra antagelsen – den grønnede formulering ovenfor – nået frem til, at $\langle f,f\rangle > 0$. Men det er jo i modstrid med punkt 3, hvor forudsætningen var $\langle f,f\rangle = 0$. Derfor må vores "grønne" antagelse være forkert. **Der er ingen punkter, hvor $f(x)\neq 0$**
Altså kan vi konkludere: $\langle f,f\rangle = 0 \Leftrightarrow f(x)=0$ for alle *x*

Hermed har vi afsluttet beviset for, at definitionen: $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx$ giver et skalarprodukt.

Eksempel: En ortogonal basis for mængden af kontinuerte funktioner

En af de helt store opdagelser i den matematiske analyses historie blev gjort af den franske matematiker Joseph Fourier, da han omkring 1820 fandt ud af, at stort set enhver funktion, men i alt fald de kontinuerte, kan skrives som en sum af trigonometriske! Det forekommer højst besynderligt første gang man hører det. Beviset for at det er tilfældet bygger på, at disse basisfunktioner: {1, $\cos(n\cdot t)$, $\sin(n\cdot t)$ }, hvor *n* løber fra 1 til uendelig, og som vi betragter på en definitionsmængde som $[0;\pi]$, er en ortogonal familie. De kan dermed udgøre en basis for vektorrummet af kontinuerte funktioner, på samme måde som enhedsvektorerne langs akserne er en basis for de to- eller tredimensionale vektorer.

Der er mange andre baser, og intervallet $[0;\pi]$ kan skaleres op eller ned og det kan parallelforskydes – det medfører blot at der kan komme en konstant på $\cos(n\cdot t)$ og $\sin(n\cdot t)$, så det bliver $\cos(k\cdot n\cdot t)$ og $\sin(k\cdot n\cdot t)$.

Det fulde bevis for påstanden er givet i HEM3, projekt 1.3a, samt i både studieretningskapitel 11 om matematik og fysik og studieretningskapitel 15 om matematik og musik. Beviset indeholder to dele:

- et bevis for, at den omtalte familie af funktioner er ortogonale
- et udledning af koefficienterne til hvert led, dvs koordinaterne efter pågældende "retning".

Koordinater er her som andre steder i vektorregning givet ved projektionen ned på pågældende basisvektor. Det vil vi overlade til at man selv finder et af de pågældende steder. Her vil vi bevise den første påstand.

Til det skal vi bruge de såkaldte **logaritmiske formler**, der siger:

$\sin(A)\cdot\cos(B)=\frac{1}{2}\cdot\sin(A+B)+\frac{1}{2}\cdot\sin(A-B)$ $\cos(A)\cdot\sin(B)=\frac{1}{2}\cdot\sin(A+B)-\frac{1}{2}\cdot\sin(A-B)$	$\cos(A)\cdot\cos(B)=\frac{1}{2}\cdot\cos(A+B)+\frac{1}{2}\cdot\cos(A-B)$ $\sin(A)\cdot\sin(B)=-\frac{1}{2}\cdot\cos(A+B)-\frac{1}{2}\cdot\cos(A-B))$

Øvelse 2.
a) Argumenter grafisk eller analytisk for, at:

$$\int_0^{2\pi}\sin(t)\,dt=0 \quad \text{og} \qquad \int_0^{2\pi}\cos(t)\,dt=0$$

b) Argumenter grafisk eller analytisk for, at:

$$\int_0^{2\pi}\sin(n\cdot t)\,dt=0 \qquad \text{og} \qquad \int_0^{2\pi}\cos(n\cdot t)\,dt=0$$

Skalarproduktet af to funktioner fra familien er defineret som:

$$\langle\cos(n\cdot t),\cos(m\cdot t)\rangle=\int_0^{2\pi}\cos(n\cdot t)\cdot\cos(m\cdot t)\,dt$$

$$\langle\cos(n\cdot t),\sin(m\cdot t)\rangle=\int_0^{2\pi}\cos(n\cdot t)\cdot\sin(m\cdot t)\,dt$$

Øvelse 3.
Argumenter for, at den kontante funktion 1 er ortogonal på alle andre i familien

Øvelse 4.
a) Vis følgende omskrivning ved brug af de logaritmiske formler:

$$\cos(7\cdot t)\cdot\cos(5\cdot t)=\tfrac{1}{2}\cdot\cos(12\cdot t)+\tfrac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot t)$$

b) Vis at:

$$\langle\cos(7\cdot t),\cos(5\cdot t)\rangle=0$$

Øvelse 5.
a) Vis følgende omskrivning ved brug af de logaritmiske formler:

$$\sin(7\cdot t)\cdot\sin(5\cdot t)=-\tfrac{1}{2}\cdot\cos(12\cdot t)-\tfrac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot t)$$

b) Vis at:

$$\langle\sin(7\cdot t),\sin(5\cdot t)\rangle=0$$

Øvelse 6.
a) Vis følgende omskrivning ved brug af de logaritmiske formler:

$$\sin(7\cdot t)\cdot\cos(5\cdot t)=\tfrac{1}{2}\cdot\sin(12\cdot t)+\tfrac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot t)$$

b) Vis at:

$$\langle\sin(7\cdot t),\cos(5\cdot t)\rangle=0$$

Argumenter endelig for den sidste formel, så vi har alle mulighederne på plads ogh konkluder!