ISBN 9788770668781

Projekt 9.2 Matricer – Forberedelsesmaterialet 2011

Introduktion

Dette forberedelsesmateriale omhandler emnet matricer samt anvendelser af matricer i modeller for populationer. Materialet er opbygget således, at ny teori introduceres gennem eksempler og øvelser, hvorefter teorien præciseres og generaliseres ved definitioner og sætninger.

Eksempel 1:
I en population med kaniner, vælger vi at sige, at en kanin er ung det første leveår og herefter er den gammel. Unge hunkaniners chance for at overleve det første leveår er 70 %, mens en gammel hunkanins chance for at overleve til det næste år er 40%. Unge hunkaniner får i gennemsnit 2 unger om året og gamle hunkaniner får i gennemsnit 1,5 kaniner om året. Hvordan udvikler denne population af hunkaniner sig som årene går?
Vi indfører først nogle variable til beskrivelse af populationens udvikling:
Antallet af unge hunkaniner i år n betegnes x_n, og antallet af gamle hunkaniner i år n betegnes y_n.
Antallet af unge hunkaniner det næste år, dvs år $n+1$, betegnes x_{n+1}, og antallet af gamle hunkaniner i år $n+1$ betegnes y_{n+1}.
Ud fra informationen om populationens udvikling kan sammenhænge mellem de fire variable angives ved ligningssystemet:

$$x_{n+1} = 2 \cdot x_n + 1.5 \cdot y_n$$
$$y_{n+1} = 0.7 \cdot x_n + 0.4 \cdot y_n$$

Øvelse 1: Forklar med naturligt sprog, hvordan informationerne om populationens udvikling kommer til udtryk i ligningssystemet.

Øvelse 2: Det antages, at der er 100 unge hunkaniner og ingen gamle hunkaniner i år 0, dvs når $n = 0$
Udregn på baggrund heraf populationen de efterfølgende år og udfyld tabellen nedenfor.

n	0	1	2	3	4
x_n					
y_n					

Ved at indføre begrebet *matricer* kan vi "automatisere" disse beregninger, således at arbejdet med at bestemme populationens udvikling fra et år til et andet bliver meget lettere.
En matrice er i princippet et "talskema", som man kan regne med ud fra bestemte regneregler.
Matricen, der beskriver kaninpopulationen ovenfor er $\begin{pmatrix} 2 & 1.5 \\ 0.7 & 0.4 \end{pmatrix}$, mens startpopulationen kan beskrives som en vektor $\begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$. For at bestemme populationens sammensætning et år senere *multipliceres* matricen og vektoren. Fx kan populationens sammensætning efter det første år beregnes til

$$\begin{pmatrix} 2 & 1.5 \\ 0.7 & 0.4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 70 \end{pmatrix},$$

og populationens sammensætning efter fire år kan beregnes til

$$\begin{pmatrix} 2 & 1.5 \\ 0.7 & 0.4 \end{pmatrix}^4 \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3155 \\ 1052 \end{pmatrix}.$$

Dvs. at der efter 1 år er der 200 unge hunkaniner og 70 gamle hunkaniner i populationen, og efter 4 år er der 3155 unge hunkaniner og 1052 gamle hunkaniner i populationen.
Med et CAS-værktøj(Her Maple) kan vi nemt bestemme de to produkter:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1.5 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200. \\ 70. \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1.5 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix}^4 \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3155.05000000000 \\ 1051.68000000000 \end{bmatrix}$$

Øvelse 3: Vælg andre startpopulationer, og bestem ved hjælp af et CAS-værktøj populationens sammensætning for hver af disse efter 3, 7 og 10 år.

Regning med matricer

For at få helt styr på matricebegrebet, så definerer vi begrebet fra forrige afsnit, som følger:

Definition 1: En 2×2 *matrice* er et talskema, som kan skrives ved

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

hvor a, b, c og d er reelle tal.

Matricen består af to *søjler* $\boxed{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}}$ og $\boxed{\begin{matrix} c \\ d \end{matrix}}$ samt to *rækker* $\boxed{a \quad c}$ og $\boxed{b \quad d}$.

Multiplikation af en matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ og en vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ er bestemt ved

$$M \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & cy \\ bx & dy \end{pmatrix}.$$

Øvelse 4:

a) Forklar med egne ord, hvordan multiplikationsproceduren for en matrice M og en vektor $\vec{v}$ gennemføres i praksis.

b) Bestem $\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$ med et CAS-værktøj.

I eksemplet med kaninpopulationen har vi multipliceret flere matricer med hinanden, nemlig da vi beregnede

$$\begin{pmatrix} 2 & 1.5 \\ 0.7 & 0.4 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 2 & 1.5 \\ 0.7 & 0.4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1.5 \\ 0.7 & 0.4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1.5 \\ 0.7 & 0.4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1.5 \\ 0.7 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Definition 2: To matricer *M* og *N* er givet ved

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad N = \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Matriceproduktet MN er da defineret ved

$$MN = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + c_1b_2 & a_1c_2 + c_1d_2 \\ b_1a_2 + d_1b_2 & b_1c_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}.$$

Produktet MN bestemmes altså ved pladsvist at multiplicere rækkeelementerne i *M* med søjleelementerne i *N* og summere de to produkter.

På http://www.youtube.com/watch?v=xaN8t83X9UY kan man se, hvordan matricemultiplikation udføres i praksis.

Øvelse 5: To matricer *M* og *N* er givet ved

$$M=\begin{pmatrix}9 & 6\\ 8 & 5\end{pmatrix} \text{og } N=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 11\end{pmatrix}.$$

a) Bestem NM og NM .

a) Vælg andre 2×2 matricer og bestem produkterne NM og NM .

b) Hvilken regneregel for matricer antydes i disse beregninger?

Invers matrice

Definition 3: Matricen $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ kaldes 2×2 *enhedsmatricen*.

Sætning 1: Alle 2×2 matricer M opfylder ligningerne

$$ME=M \text{ og } EM=M ,$$

hvor E er 2×2 enhedsmatricen.

Øvelse 6: Benyt matricemultiplikation med $M=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ til at bevise **Sætning 1**.

Eksempel 2: To ligninger med to ubekendte kan fx være

$$3x+4y=7$$
$$-x+9y=8$$

Dette ligningssystem kan løses med et CAS-værktøj:

$$\text{solve}(3x+4y=7 \text{ and } -x+9y=8,x,y),\quad x=1 \text{ and } y=1$$

Dvs. løsningen til de to ligninger med to ubekendte er $x=1$ og $y=1$.
Ligningssystemet kan også løses med matricer, og det første skridt er at omskrive ligningssystemet med en matrice og to vektorer.

Koefficienterne til x og y beskrives ved matricen $\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 9\end{pmatrix}$, de ubekendte beskrives ved vektoren $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ og højresiden beskrives ved vektoren $\begin{pmatrix}7\\ 8\end{pmatrix}$. Den samlede omskrivning af ligningssystemet bliver således

$$\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 8\end{pmatrix}.$$

Øvelse 7: Forklar med egne ord de tre trin i løsningen af ligningssystemet med matricer.

I et CAS-værktøj(her Maple) løses ligningssystemet ved

$$with(LinearAlgebra):\quad LinearSolve\left(\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 9\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\ 8\end{bmatrix}\right) \quad = \quad \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

ISBN 9788770668781

Eksempel 3: Matricen $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}^{-1}$ kaldes den *inverse matrice* til $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$, da

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og omvendt} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ligningssystem ovenfor kan løses ved hjælp af den *inverse matrice* som følger:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Øvelse 8: Bestem med et CAS-værktøj den inverse matrice $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}^{-1}$.

Kontroller, at $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ og bestem $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}^{-1}$.

Definition 4: En matrice M har en invers matrice M^{-1}, netop når $M \cdot M^{-1} = E$ og $M^{-1} \cdot M = E$.

Øvelse 9: Bestem med et CAS-værktøj den inverse matrice til $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 11 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$.

CAS-værktøjet giver en fejlmelding ved forsøg på beregning af den inverse matrice til $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$, fordi denne matrice har nemlig ikke nogen invers matrice!

Betingelse, der sikrer, at en matrice har en invers matrice bygger på begrebet *determinant*, som vi kender fra vektorer i to dimensioner.

Definition 5: Determinanten $\det(M)$ for en matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ er bestemt ved

$$\det(M) = ad - bc.$$

CAS-værktøjet(her Maple) kan bestemme determinanten for en matrice $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$ ved

$$Determinant\left(\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}\right) = -68$$

L&R Uddannelse EGMONT

Øvelse 10: Bestem determinanten for $\begin{pmatrix}6 & 7\\2 & 9\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2 & 11\\3 & 5\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}5 & 2\\15 & 6\end{pmatrix}$.

Øvelse 11: Vælg to vektorer og opskriv en matrice med søjlerne som de to vektorer.
Stemmer determinanten for de to vektorer overens med determinanten for matricen?

Sætning 2: Matricen *M* er givet ved $M=\begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}$. Hvis $\det(M)\neq 0$, så har *M* en invers matrice, der er givet ved

$$X^{-1}=\frac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix}d & -c\\-b & a\end{pmatrix}.$$

Øvelse 12: Hvis X skal være invers matrice til *M*, så skal X ifølge **Definition 4** opfylde, at $XM=E$ og $MX=E$.
Benyt dette til at bevise **Sætning 2**. Er betingelsen $\det(M)\neq 0$ nødvendig?

Øvelse 13: Omskriv ligningssystemet $\begin{aligned}5x+11y&=23\\7x-8y&=30\end{aligned}$ til matriceform.
Bestem determinanten til matricen, og bestem en løsning til ligningssystemet ved brug af en invers matrice.

Eksempel 4: I **Eksempel 1** med kaninpopulationen kan vi opstille ligningssystemet

$$\begin{pmatrix}2 & 1.5\\0.7 & 0.4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_t\\y_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{t+1}\\y_{t+1}\end{pmatrix}.$$

Da $\det\begin{pmatrix}2 & 1{,}5\\0{,}7 & 0{,}4\end{pmatrix}=2\cdot 0{,}4-0{,}7\cdot 1{,}5=-0{,}25\neq 0$, så har matricen en invers.

Hvis populationssammensætningen er $\begin{pmatrix}300\\90\end{pmatrix}$ til tidspunktet $t=2$, og vi vil bestemme populationssammensætningen til tidspunktet $t=1$, så er udgangspunktet

$$\begin{pmatrix}2 & 1.5\\0.7 & 0.4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}300\\90\end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ kan således bestemmes ved:

$$\begin{pmatrix}2 & 1.5\\0.7 & 0.4\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1.5\\0.7 & 0.4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1.5\\0.7 & 0.4\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}300\\90\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60\\120\end{pmatrix}$$

Vha. CAS-værktøjet kan populationen til $t=1$ bestemmes:

$$\begin{bmatrix}2 & 1.5\\0.7 & 0.4\end{bmatrix}^{-1}\times\begin{bmatrix}300\\90\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}60\\120\end{bmatrix}$$

Ligevægte

I eksempler med populationer kan det være interessant at kigge på *stabile* populationer, dvs populationer som befinder sig i en form for *ligevægt*.

Eksempel 5: I en stor granplantage rammes træerne til tider af svampesygdom. Træerne kan groft inddeles i to grupper: *Raske* og *syge*. Man har konstateret, at et raskt træ med 6 % sandsynlighed vil være blevet sygt året efter. Ligeledes vil et sygt træ med 72 % sandsynlighed været blevet raskt året efter.
Vi antager endvidere, at ingen træer dør af sygdommen eller af andre årsager, og at der heller ikke plantes nye træer.
Det oplyses, at der er i alt 26000 træer i plantagen.
Ud fra disse oplysninger kan vi opstille en model for udviklingen af syge og raske træer i plantagen. Lad r_n hhv. s_n betegne antallet af raske træer hhv. syge træer i år *n*.
De raske træer året efter, dvs i år $n+1$ betegnes r_{n+1}. Disse udgør 94 % af de raske træer året før, dvs. $0,94 \cdot r_n$, samt af 72 % af de syge træer året før, dvs. $0,72 \cdot s_t$. På samme måde kan vi opstille sammenhænge mellem antallet af syge træer i år *n* og år $n+1$, således at vi får udviklingen i antallet af raske og syge træer i plantagen beskrevet ved modellen

$$\begin{pmatrix} 0.94 & 0.72 \\ 0.06 & 0.28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Det antages at de 26000 træer til tidspunktet $t=0$ er fordelt således, at der er 13000 raske og 13000 syge træer. Herefter kan fordelingen af raske og syge træer i år 0 til 4 bestemmes som vist i skemaet nedenfor.

n	0	1	2	3	4
$\begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13000 \\ 13000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 21520 \\ 4420 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 23468 \\ 2532 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 23883 \\ 2117 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 23974 \\ 2026 \end{pmatrix}$

Tabellen viser en tendens til at populationen af raske og syge træer stabiliserer sig. Spørgsmålet er hvilken fordeling, der er den stabile?

Øvelse 14: Kontroller at populationerne i tabellen i **Eksempel 5** er korrekte og bestem populationen for *n* lig med 6, 8 og 10 år.

Definition 6: En vektor $\vec{v}^*$ siges at være en ligevægt for en matrice M, hvis $M\vec{v}^* = \vec{v}^*$.

Følgende konsekvens af **Definition 6** er central:

$$M^2 \cdot \vec{v}^* = M \cdot \left(M \cdot \vec{v}^*\right) = M \cdot \vec{v}^* = \vec{v}^*.$$

Denne overvejelse kan generaliseres, og i følge **Definition 6** betyder det, at når der opnås stabilitet i udviklingen, forbliver populationen i ligevægt!

Øvelse 15: Hvilken ligevægt er der for populationen i **Eksempel 5** jf tabellen og **Øvelse 14**?

Øvelse 16: Findes der en ligevægtstilstand for kaninerne i **Eksempel 1**? Inddrag gerne **Øvelse 3**.

ISBN 9788770668781

Nogle specielle matricer, som kaldes *overgangsmatricer*, er særligt interessante, når vi arbejder med ligevægt for populationssammensætninger.

Definition 7: En matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ er en overgangsmatrice, hvis

a ,b, c og *d* alle er ikke-negative
og $a+b=1$ og $c+d=1$.

Øvelse 17: Er matricen *M* fra **Eksempel 5** en overgangsmatrice? Er matricen *M* fra **Eksempel 1**en overgangsmatrice?

Sætning 3: Lad $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ være en overgangsmatrice.

Så er vektoren $\vec{v}^* = k \cdot \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$ en ligevægt for matricen *M* for alle værdier af *k*.

Øvelse 18: Gennemfør et bevis for sætning 4:
a) Bestem $M\vec{v}^*$ vha. et CAS værktøj. Benyt informationerne om M og $\vec{v}^*$. Husk, at $a+b=1$og$c+d=1$.
b) Benyt nu **Eksempel 1** til argumenterer for **Sætning 3**.
c) Hvad sker der med beviset, når $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Øvelse 19: Bestem *k* for ligevægten i **eksempel 5**. Bestem andre populationer i **Eksempel 5**, hvor der er ligevægt.

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

Egenværdier og egenvektorer

Eksempel 7: Vi betragter igen $M=\begin{pmatrix}2 & 1.5\\ 0.7 & 0.4\end{pmatrix}$ fra **Eksempel 1**, hvor vi minder om, at denne matrice er en matematisk model der modellerer ændringen i kaninpopulationen fra et år til det næste år. Vi antog, at der var 100 unge hunkaniner og ingen gamle hunkaniner fra start, som er illustreret ved

$$\vec{v}_0=\begin{pmatrix}100\\ 0\end{pmatrix}.$$

Øvelserne i forbindelse med **Eksempel 1** viste, at der med tiden bliver cirka 3 gange så mange unge som gamle kaniner. Eksempelvis finder vi, at

$$M^{10}\cdot\vec{v}_0=\begin{pmatrix}2 & 1.5\\ 0.7 & 0.4\end{pmatrix}^{10}\cdot\begin{pmatrix}100\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}770275\\ 256758\end{pmatrix}.$$

Ligeledes kan man ud fra tabellen i **Øvelse 2** se, at populationen cirka vokser med en faktor 2.5 pr år, idet vi får

$$\begin{pmatrix}2 & 1.5\\ 0.7 & 0.4\end{pmatrix}^{2}\cdot\begin{pmatrix}100\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}505\\ 168\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2 & 1.5\\ 0.7 & 0.4\end{pmatrix}^{3}\cdot\begin{pmatrix}100\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1262\\ 420.7\end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix}2 & 1.5\\ 0.7 & 0.4\end{pmatrix}^{4}\cdot\begin{pmatrix}100\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3155.05\\ 1051.68\end{pmatrix}.$$

Hvis vi nu tager udgangspunkt i, at forholdet mellem unge og gamle hunkaniner allerede i starten er 3, og at antallet af gamle hunkaniner er x_0, svarende til $\vec{v}_0=\begin{pmatrix}3\cdot x_0\\ x_0\end{pmatrix}$, så kan vi på baggrund af ovenstående opstille følgende udtryk for populationen i år 1

$$\vec{v}_1=M\cdot\vec{v}_0=\begin{pmatrix}2 & 1.5\\ 0.7 & 0.4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\cdot x_0\\ x_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7.5\cdot x_0\\ 2.5\cdot x_0\end{pmatrix}=2.5\vec{v}_0\,.$$

Altså gælder der, at $M\vec{v}_0=2.5\vec{v}_0$.
Resultatet falder tilbage på sammenhængen mellem M og faktoren 2,5, som vi eksperimenterede os frem til ved at bruge skemaet fra **Øvelse 2**.
Forsøger vi nu at fremskrive én gang mere til år 2, får vi

$$\vec{v}_2=M\cdot\vec{v}_1=M^2\cdot\vec{v}_0=\begin{pmatrix}2 & 1.5\\ 0.7 & 0.4\end{pmatrix}^{2}\cdot\begin{pmatrix}3\cdot x_0\\ x_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18.75\cdot x_0\\ 6.25\cdot x_0\end{pmatrix}=6.25\vec{v}_0=2.5^2\vec{v}_0\,.$$

Dette er en helt speciel egenskab, som vi vender tilbage til lidt senere.

Øvelse 20: Tjek udregninger ovenfor vha. et CAS-værktøj.

Det centrale her er, at vi kunne have brugt faktoren 2,5 – som kaldes en *egenværdi* for M – til at fremskrive uden at bruge selve M i udregningerne. Sammenhængen vil vi arbejde videre med nu.

Eksempel 8: Betragt matricen $M=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ og vektoren $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$.

Vi multiplicerer M med $\vec{v}$ og får

$$M\vec{v}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},$$

dvs ved multiplikationen bliver $\vec{v}$ blot multipliceret med 2!

Det er netop den egenskab, vi også så i **Eksempel 1**, og det giver anledning til følgende definition:

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

Definition 8: Vektoren $\vec{v}$ kaldes en *egenvektor* for en matrice M, når

$M\vec{v} = \lambda\vec{v}$, hvor λ er et tal, og $\vec{v} \neq \vec{0}$

λ kaldes for *egenværdien* til den pågældende egenvektor.

Af **Eksempel 1** følger beregningen

$$\vec{v}_1 = M \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1.5 \\ 0.7 & 0.4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot x_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.5 \cdot x_0 \\ 2.5 \cdot x_0 \end{pmatrix} = 2.5\vec{v}_0 ,$$

dvs. tallet 2.5 er ifølge **Definition 8** en egenværdi for $M = \begin{pmatrix} 2 & 1.5 \\ 0.7 & 0.4 \end{pmatrix}$ med tilhørende egenvektor $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 3 \cdot x_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$.

Øvelse 21: Vis, at $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ også er en egenvektor for $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, og bestem den tilsvarende egenværdi.

Øvelse 22: Bestem en vektor, som *ikke* er egenvektor for $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Selve definitionen af egenværdi og egenvektor giver ikke en metode til at bestemme egenvektorer og egenværdier. Det får vi brug for, og følgende sætning udtaler sig om dette:

Sætning 4: λ er en egenværdi for en matrice *M*, netop hvis $\det(M - \lambda E) = 0$.
Den tilhørende egenvektor $\vec{v}$ kan bestemmes som løsningen til ligningen $(M - \lambda E)\vec{v} = 0$.

Eksempel 9: Vi illustrerer anvendelsen af **Sætning 4** på matricen fra tidligere, før vi beviser sætningen.

Lad $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Vi bestemmer $M - \lambda E = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$,

og beregner determinanten for denne matrice

$$\det\left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 - 7\lambda + 10.$$

Løses andengradsligningen $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ får vi $\lambda = 2$ og $\lambda = 5$, hvilket stemmer med eksempel 8.
Ydermere fortæller det os, at der *ikke er flere* egenværdier.
Hvis vi nu vil bestemme egenvektorerne svarende til $\lambda = 2$, så løser vi $(M - 2E)\vec{v} = 0$, og vi får

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{bmatrix}$$

Dette er – som nævnt tidligere – to ligninger med to ubekendte. Udregningen giver os uendeligt mange løsninger, blot med krav om, at $x = -y$ i overensstemmelse med eksemplet fra tidligere.

Øvelse 23: Bestem egenværdier og tilhørende egenvektorer til matricen $M = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Øvelse 24: Vis, at ikke matricen $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ikke har nogen egenværdier.

Øvelse 25: Vi vender nu tilbage til **Sætning 4**, som vi beviser i etaper

Bevis for Sætning 4, 1. etape: Vi antager, at $\det(M-\lambda E)=0$ og at $M=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Bestem $M-\lambda E$ og opstil den ligning, som fremkommer ved udregning af $\det(M-\lambda E)=0$.

Benyt et CAS-værktøj til at udregne $(M-\lambda E)\begin{pmatrix} d-\lambda \\ -b \end{pmatrix}$ og $(M-\lambda E)\begin{pmatrix} -c \\ a-\lambda \end{pmatrix}$.

Sammenlign resultaterne med $\det(M-\lambda E)$.

Benyt antagelsen om, at $\det(M-\lambda E)=0$ til at vise, at

$$(M-\lambda E)\begin{pmatrix} d-\lambda \\ -b \end{pmatrix}=0 \quad \text{og} \quad (M-\lambda E)\begin{pmatrix} -c \\ a-\lambda \end{pmatrix}=0\,.$$

Isoler $M\begin{pmatrix} d-\lambda \\ -b \end{pmatrix}$ i $(M-\lambda E)\begin{pmatrix} d-\lambda \\ -b \end{pmatrix}=0$, og vis, at $\lambda E\begin{pmatrix} d-\lambda \\ -b \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} d-\lambda \\ -b \end{pmatrix}$.

Benyt ovenstående resultater samt **Definition 8** til at redegøre for, at λ er en egenværdi til M med tilhørende egenvektor $\begin{pmatrix} d-\lambda \\ -b \end{pmatrix}$.

Vis på samme måde, at λ også er egenværdi for M med tilhørende egenvektor $\begin{pmatrix} -c \\ a-\lambda \end{pmatrix}$.

Øvelse 26: (Bevis for Sætning 4, 2. etape) Vi forholder os nu til ordene *"…netop, hvis…"* i **Sætning 4**.
Antag derfor, at $\det(M-\lambda E)\neq 0$. Det betyder, $M-\lambda E$ har en invers matrice (hvorfor?).
Ud fra dette kan vi opskrive følgende:

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ så } (M-\lambda E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\vec{0} \text{ og hermed } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(M-\lambda E)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Redegør for skridtene i beviset ovenfor og argumenter for, at der heraf kan udledes, at λ at ikke er en egenværdi for M. Overvej nu, hvilken sammenhæng ovenstående har med *"…netop, hvis…"* i **Sætning 4**.

Øvelse 27: Benyt resultaterne fra de to øvelser ovenfor til at argumentere for første del af **Sætning 4**.

Den sidste del af **Sætning 4** siger, at med en egenværdi λ for M, findes den tilhørende egenvektor $\vec{v}$ ved at løse ligningen $(M-\lambda E)\vec{v}=\vec{0}$.

Øvelse 28 (**Bevis for Sætning 4, 3. etape):** Redegør for omskrivningen af $M\vec{v}=\lambda\vec{v}$ til $(M-\lambda E)\vec{v}=0$, og benyt dette til at vise denne sidste del af **Sætning 4**.

Hvis vi afslutningsvist igen vender os mod **Eksempel 1** med kaninpopulationen, kan vi nu udlede den sammenhæng mellem ligevægten i en population og egenværdierne, som blev sandsynliggjort tidligere. Ofte vil man nemlig være interesseret i at kende udviklingen af $\vec{v}_n$, når *n* bliver stor.

Sætning 5: Når *n* bliver stor, vil $\vec{v}_n = M^n \cdot \vec{v}_0$ nærme sig $c \cdot \lambda_1^n \cdot \vec{v}$, hvor *c* er en konstant, λ_1 er den største af de to egenværdier til M, (dvs $|\lambda_1| > |\lambda_2|$), med tilhørende egenvektor $\vec{v}$.
Sætningen kan også formuleres med matematisk notation:

$$\vec{v}_n = M^n \cdot \vec{v}_0 \to c \cdot \lambda_1^n \cdot \vec{v} \text{ for } n \to \infty$$

Da $\vec{v}_n \approx c \cdot \lambda_1^n \cdot \vec{v}$, når *n* er stor, gælder det også, at

$$\vec{v}_{n+1} \approx c \cdot \lambda_1^{n+1} \cdot \vec{v} = \lambda_1 \cdot c \cdot \lambda_1^n \cdot \vec{v} = \lambda_1 \cdot (c \cdot \lambda_1^n \cdot \vec{v}) = \lambda_1 \cdot \vec{v}_n$$

Fortolkningen er interessant:

For store værdier af *n*, kan man fremskrive en population blot ved at gange $\vec{v}_n$ med λ_1.

Eller:

Populationen vokser med en faktor λ_1 ved hver fremskrivning.

Fremskrivning af en population over flere perioder, kan altså generaliseres ved blot at gange $\vec{v}_n$ med den rette potens af λ_1.

Sætningen vises ikke, men resultatet føres tilbage til **Eksempel 1** med kaninpopulationen. Her var populationsmatricen $M = \begin{pmatrix} 2 & 1.5 \\ 0.7 & 0.4 \end{pmatrix}$, og udregninger senere viste, at egenværdien for matricen var 2,5 med tilhørende egenvektor $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 3 \cdot x_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$. Den videre udregning viste, at $\vec{v}_2 = \lambda_1^{\,2} \begin{pmatrix} 3 \cdot x_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = 2.5^2 \begin{pmatrix} 3 \cdot x_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$, hvilket er i overensstemmelse med **Sætning 5**.

Populationen kan altså fremskrives *udelukkende* vha. af egenvektoren og egenværdien – og så selvfølgelig startbetingelsen!

Der gælder ligeledes en sætning for overgangsmatricerne, som gør at vi kan bruge egenvektoren til at finde en populations ligevægt. Dette anskueliggøres ud fra **Eksempel 5**. Først findes en af egenvektorerne og den tilsvarende egenværdi til matricen i eksemplet.

Øvelse 29: Eftervis ved at benytte **Definition 8**, at $\vec{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor til overgangsmatricen $M = \begin{pmatrix} 0{,}94 & 0{,}72 \\ 0{,}06 & 0{,}28 \end{pmatrix}$ med tilhørende egenvektor $\lambda = 1$. Udregn ligeledes $M \cdot \vec{v}$. Hvad fortæller resultatet?

Øvelse 30: I **Øvelse 14** var $M^{10}\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 23994{,}3 \\ 2005{,}67 \end{pmatrix}$. Hvordan hænger dette sammen med øvelsen ovenfor?

Vi har nu sandsynliggjort, at der er en klar sammenhæng mellem en populations ligevægt og egenvektoren, som vi kan formulere i en sætning:

Sætning 6: Hvis M er en overgangsmatrice, og $\vec{v}^*$ er en ligevægt for M, så er $\vec{v}^*$ en egenvektor med tilhørende egenværdi 1.
Det gælder desuden, at 1 er den største egenværdi for M, og at $\vec{v}_n \to k \cdot \vec{v}^*$, når $n \to \infty$.

Sætningen siger netop, at en populations ligevægt er proportional med egenvektoren. Det betyder altså, at forholdet mellem egenvektorens koordinater kan genfindes i koordinatsættet for populationens ligevægt. Bemærk, at **Sætning 3** siger, at dette forhold faktisk også kan genfindes mellem *c* og *b* i selve overgangsmatricen *M* !

ISBN 9788770668781

I øvelserne før **Sætning 6** fremgår det fx, at forholdet mellem koordinaterne i populationens ligevægt $\vec{v}_0 \approx M^{10}\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 23994,3 \\ 2005,67 \end{pmatrix}$ er 12, ligesom i egenvektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix}$. Det samme forhold findes mellem 0,72 og 0.06 i M .

Materialet er inspireret af *MATEMATIK OG DATABEHANDLING: NOTER OM MATEMATIK*
KVL, 2006, Henrik Laurberg Pedersen & Thomas Vils Pedersen