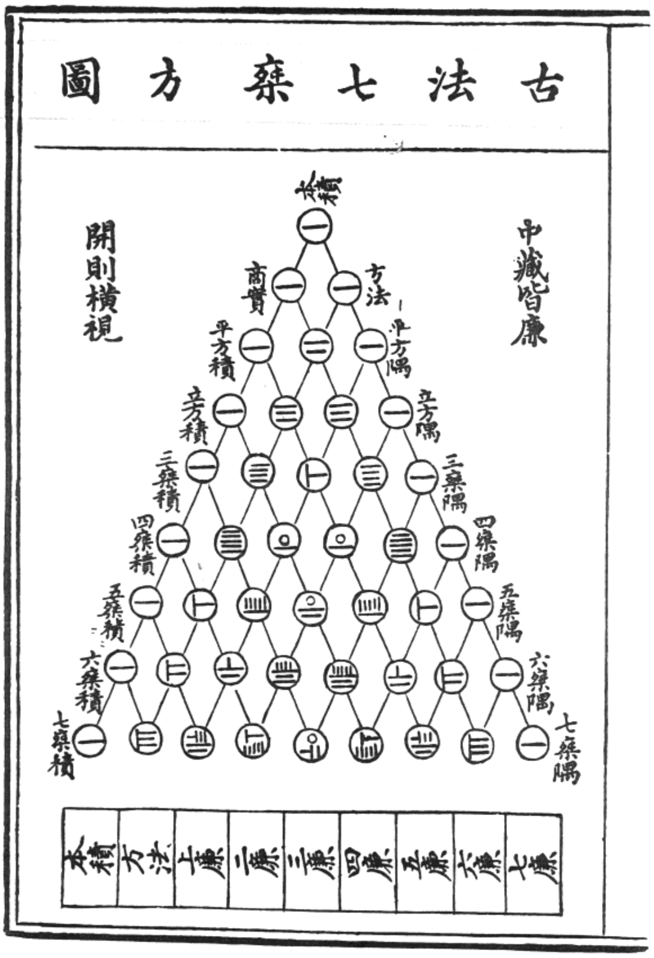
ISBN 9788770668781

Pascals trekant – i mange versioner og i mange kulturer

Pascals trekant har rødder i den gamle indiske, muslimske og kinesiske matematik, der for de indiske rødders vedkommende strækker sig et par tusinde år tilbage. I renæssancen dukker den op i Vesteuropæisk matematik, hvor den til sidst bliver givet en særlig grundig behandling af Pascal, hvorfor vi i Europa og USA kalder den *Pascals trekant*, mens fx kineserne kalder den *Yang Huis trekant* og Iranerne kalder den *Khayyams trekant*. Du kan finde et større uddrag af Pascals artikel om den aritmetiske trekant ***her***, men vær opmærksom på at Pascal er uddannet i den gamle geometriske tradition, hvor alting navngives med bogstaver - latinske og græske - hvorfor cellerne ikke betegnes med række og søjlenumre som vi i dag er vant til, men med bogstaver. Det kan godt gøre det lidt tungt at trænge ind i såvel formlerne som Pascals tankegang fordi notationen er lidt uvant for en moderne læser.

Inderne introducerer Pascals trekant i forbindelse med *kombinatorik* (antallet af ord, der kan laves ud fra et givet antal bogstaver). De ældste overleverede referencer er fra 900-tallet, men de refererer tilbage til tidligere værker fra før vor tidsregning.

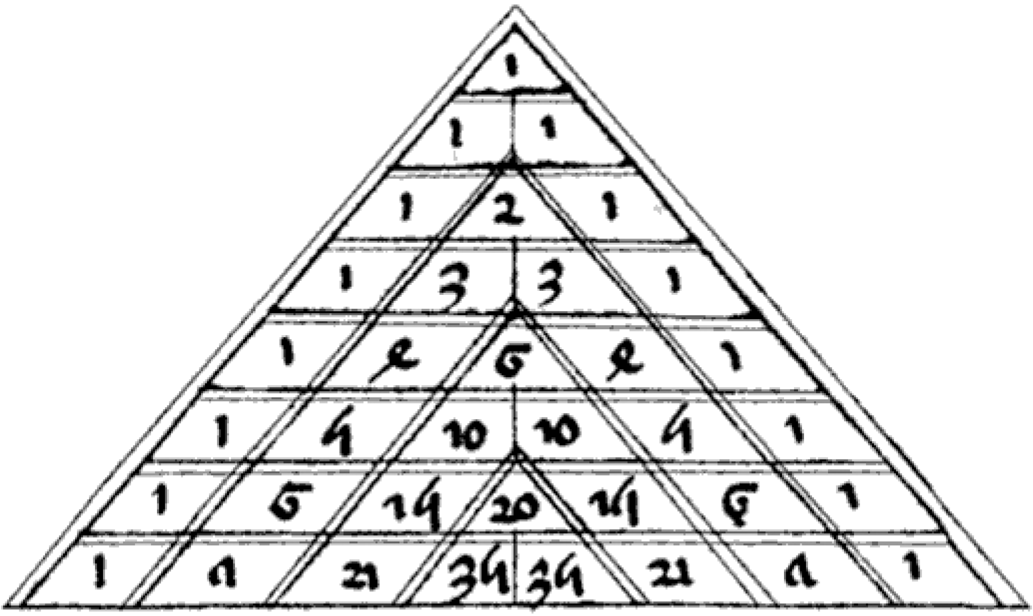
Kineserne introducerer Pascals trekant i forbindelse med *algebra* såsom uddragning af rødder og løsning af ligninger. Det er her Yang Hui i 1200-tallet gengiver de første otte rækker svarende til binomialformlen op til 8 potens. Diagrammet indeholder i øvrigt en fejl. Kan du se den?



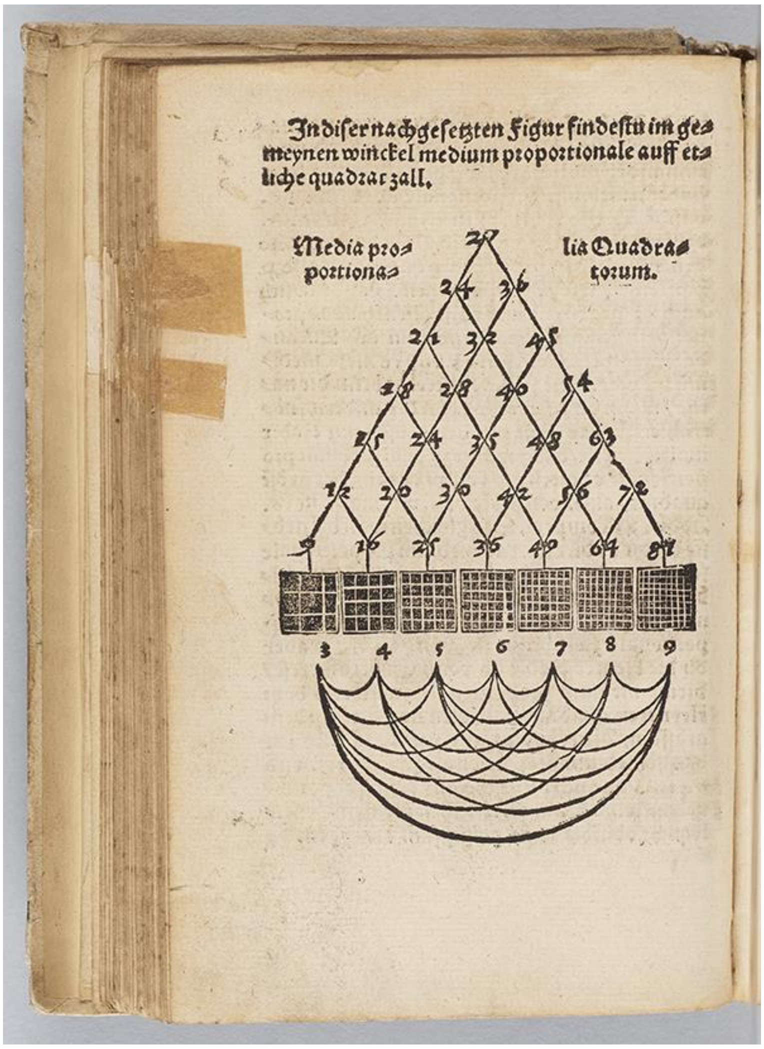
I den arabiske matematik arbejdes videre med binomialformlen og med forskellige summer af potenser, dvs. summer af kvadrater, kuber osv. Det er også her man begynder at udvikle induktionsbeviser. Omar Khayyam samler op på Pascals trekant i forbindelse med sin omfattende diskussion af tredjegradsligninger.

ISBN 9788770668781

I 1523 udgiver den italienske matematiker Tartaglia en figur, der angiver antallet af enheder i de såkaldte figurtal, dvs. trekanttal mm., der har rødder tilbage i den pythagoræiske tradition. Her dukker Pascals trekant altså for første gang op i forbindelse med en græsk problemstilling.



I 1527 dukker den op på forsiden af Peter Apianus bog om købmandsregning:



ISBN 9788770668781

I 1544 tager Stiefel den under kærlig behandling

Der Ander theyl

1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	156	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870

Es kan aber ein fleissiger Leser/diser tafel brauch leichtlich sehen/aus den gesetzten satzungen der puncten/ Item auch wie sich die zalen der tafel aus einander finden / wer sich aber selbs nicht kan drauß verrichten/mag jm solliche zeygen lassen/ wie ich denn gnugsam dauon geschriben hab in meiner Latinischen Arithmetica.

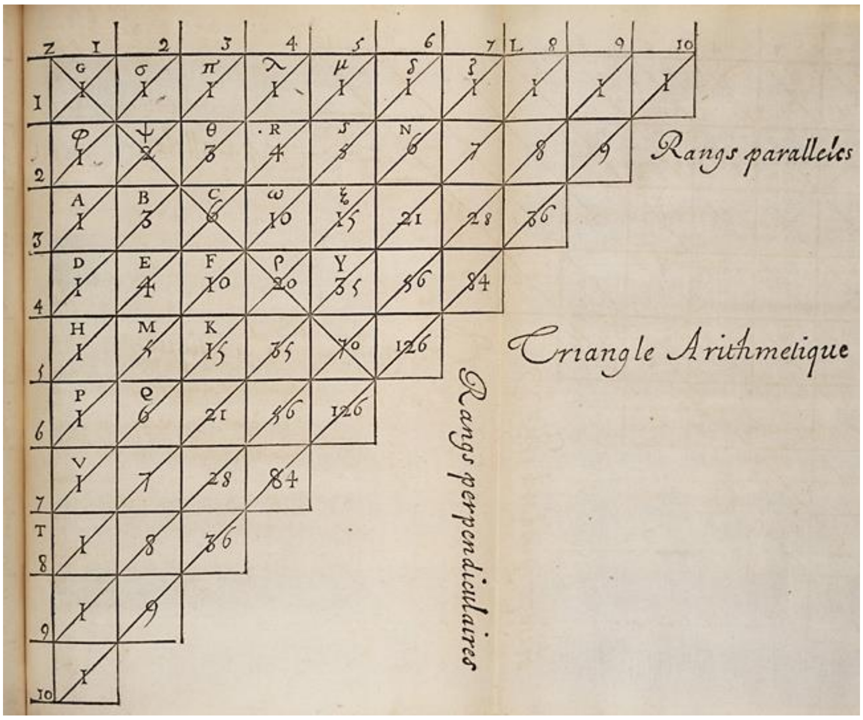
I 1636 er det Mersennes tur til at fortælle om trekanten og dens rolle i kombinatorik

Tabella pulcherrima & vtilissima Combinationis duodecim Cantilenarum.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91
4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455
5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820
6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188
7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564
8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388
9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582	125970
10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960	293930
11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756	352716	646646
12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960	352716	705432	1352078
13	91	455	1820	6188	18564	50388	125970	293930	646646	1352078	2704156
14	105	560	2380	8568	27132	77520	203490	497420	1144066	2496144	5200300
15	120	680	3060	11628	38760	116280	319770	817190	1961256	4457400	9657700
16	136	816	3876	15504	54264	170544	490314	1307504	3268760	7726160	17383860
17	153	969	4845	20349	74613	245157	735471	2042975	5311735	13037895	30421755
18	171	1140	5985	26334	100947	346104	1081575	3124550	8436285	21474180	51895935
19	190	1330	7315	33649	134596	480700	1562275	4686825	13123110	34597290	86493225
20	210	1540	8855	42504	177100	657800	2220075	6906900	20030010	54627300	141120525
21	231	1771	10626	53130	230230	888030	3108105	10015005	30045015	84672315	225792840
22	253	2024	12650	65780	296010	1184040	4292145	14307150	44352165	129024480	354817320
23	276	2300	14950	80730	376740	1560780	5852925	20160075	64512290	193536720	548354040
24	300	2600	17550	98280	475020	2035800	7888725	28048800	92561040	186097760	834451800
25	325	2925	2047	8755	593775	2629575	10518300	38567100	131128140	417225900	1251677700

ISBN 9788770668781

Jorden var altså gødet godt for Pascal, da han i 1665 med kendskab til bl.a. Mersennes arbejde underkaster trekanten en grundig undersøgelse, hvor han bl.a. introducerer det matematiske induktionsbevis, ligesom han gør den til en hjørnesten i den nyligt udviklede sandsynlighedsregning:



Her stopper historien selvfølgelig ikke: Wallis opdager sin berømte integral formel for tallene i Pascals trekant allerede i 1656, der gør det muligt at udvide Pascals trekant og fx finde ud af hvilke værdier der svarer til halvtallige indices i Pascals trekant, fx ligger tallet $4/\pi$ (markeret som en firkant, idet symbolet for pi endnu ikke var indført) mellem de to første 1-taller i anden række. Newton arbejder videre på Wallis resultater og opdager 1665 den generelle binomialformel, hvilket udvider Pascals trekant til hele planen:

	$m=-4$	$m=-3$	$m=-2$	$m=-1$	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	...
$n=-4$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
$n=-3$	−3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	...
$n=-2$	3	−2	1	0	0	0	0	0	0	0	...
$n=-1$	−1	1	−1	1	0	0	0	0	0	0	..
$n=0$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	...
$n=1$	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	...
$n=2$	0	0	0	0	1	2	1	0	0	0	...
$n=3$	0	0	0	0	1	3	3	1	0	0	...
$n=4$	0	0	0	0	1	4	6	4	1	0	...

ISBN 9788770668781

Numbers	Units	Sides	Triangulars	Pyramidals	Triangulo-triangulars	Triangulo-pyramidals
Units	1	1	1	1	1	1
Sides	1	2	3	4	5	6
Triangulars	1	3	6	10	15	21
Pyramidals	1	4	10	20	35	56
Triangulo-triangulars	1	5	15	35	70	126
Triangulo-pyramidals	1	6	21	56	126	252

And so on

And so on

Walllis berømte udvidede udgave af Pascals trekant!

De Moivre fandt i 1733 sin berømte approksimationsformel for tallene i Pascals trekant udtrykt ved normalfordelingsintegralet. Herefter var Pascal trekant uløseligt forbundet med såvel Random Walk fordelingen som normalfordelingen.

Pascals trekant har altså forgreninger ud til rigtigt mange grene i matematikken: Kombinatorik, elementær sandsynlighedsregning, binomial- og normalfordelingen, elementær algebra, binomialformlen, ligningsløsning, analyse, differentiation og integration af potensfunktioner, cirklens kvadratur osv. osv.

Pascals trekant indgår mange steder i lærebogssystemet – anvend bøgernes stikordsregistre.

Kildetekst:
Uddrag af Pascals afhandling (efter D. J. Struik: A Source Book in Mathematics 1200-1800) kan du finde ***her***.