ISBN 9788770668781

Projekt 7.9 Hilberts hotel når grænsen – og Kontinuumshypotesen

1. Hilberts hotel når grænsen

Fortællingen og øvelsen om Hilberts Hotel sluttede med følgende scenario:

> *Det ser ud til, at hotellet kan klare alt. Men en dag er gæsternes utilfredshed med at blive flyttet rundt, med den uendelige morgenbuffet, med den uendeligt ringe rengøring, med at der ikke er uendeligt mange fjernsynskanaler osv. vokset til, at der var uendelig mange klagepunkter. Hotellet foreslår gæsterne, at de nedsætter nogle udvalg, der kan komme med forslag til forbedringer. Men ingen af gæsterne vil overlade til andre at bestemme noget som helst, så derfor foreslår hotellet, at gæsterne nedsætter alle de udvalg de har lyst til. Da gæsterne begynder at skændes om, hvem der skal være med i hvilke udvalg foreslår receptionisten, at de nedsætter alle tænkelige udvalg. Dvs. enhver tilfældig gruppering af gæster udgør et udvalg, så den enkelte er med i uendeligt mange. Gæsterne accepterer forslaget, hvis receptionisten kan skaffe et værelse til hvert udvalg, hvor de kan holde møde. Kan han det?*

Hvor mange udvalg kan der dannes, hvis vi nedsætter alle tænkelige udvalg? Lad os stille et lignende men meget lettere spørgsmål:

Hvor mange udvalg kan der dannes ud af en gruppe på 5 personer? Vi kan prøve at tælle dem ved at se på, hvor mange udvalg, der kan dannes med 1 medlem, med to medlemmer osv. og så summere til sidst. Men vi kunne også finde en anden måde at tælle antallet på, nemlig ved at se på hvordan et vilkårligt udvalg dannes: Vi spørger – er gæst nr. 1 med? Er gæst nr. 2 med?... Er gæst nr. 5 med?

Øvelse 1
Hvor mange udvalg kan der dannes ud fra 5 gæster?

Svarene på vores spørgsmål - Er gæst nr. i med eller ikke med – er enten et ja eller nej, altså to muligheder. Det kan vi også repræsentere af tallet 1 for ja, tallet 0 for nej. På den måde kan et udvalgs sammensætning beskrives ved et 5-cifret decimaltal:

$$0{,}a_1a_2a_3a_4a_5\ ,$$

hvor a'erne er enten 0 eller 1.
Tallet 0,01101 repræsenterer det udvalg, hvor gæst nr. 2, 3 og 5 er med.

Når vi skriver et udvalgs sammensætning på den måde er det let at se, at antallet af udvalg svarer til antallet af tal på den form. Og dette må jo være 2^5, da der hver gang er to muligheder. Man kan godt diskutere om de to udvalg svarende til tallene: 0,00000 og 0,11111 er rigtige udvalg. De skulle vel egentlig holdes ude. Når vi i det følgende begynder at se på uendelige mængder er det naturligvis ligegyldigt med to udvalg fra eller til, så det vil vi ikke tage hensyn til.

Lad os nu vende tilbage til hotellet.

Øvelse 2
a) Argumenter for, at et udvalg kan beskrives ved hjælp af ét decimaltal, $0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}...$ hvor a'erne alle er 0 eller 1: $a_1 = 1$, hvis personen i værelse 1 er med, ellers 0. $a_2 = 1$, hvis personen i værelse 2 er med, ellers 0, osv. Så "antallet" af udvalg svarer til "antallet" af decimaltal skrevet udelukkende med 0 og 1.
b) Vi skriver normalt tal i ti-talsystemet, men vi kunne jo vælge at skrive i *totalsystemet* i stedet. Udnyt denne iagttagelse til at argumentere for følgende, hvor ⊔ betyder "har samme mægtighed som" (dvs "er præcis lige så stor som":

ISBN 9788770668781

Mængden af forskellige udvalg af gæster □
Mængden af decimaltal (mellem 0 og 1) dannet udelukkende ved hjælp af 0 og 1 □
Mængden af reelle tal (mellem 0 og 1) □
Mængden af reelle tal

(*Hint*: Anvend definitionen på, at to mængder har samme mægtighed: Der er en 1-1 korrespondance mellem de to mængders tal.)

I analogi med taleksemplet ovenfor skrives det kardinaltal, der angiver antallet af udvalg, dvs. antallet af forskellige delmængder af gæster således: $2^{\aleph_0}$, idet antallet af gæster jo er $\aleph_0$.

Men ud fra konstruktionen ser vi også, at størrelsen af denne mængde svarer til de reelle tals mægtighed, der betegnes med et lille c. Vi ved altså: $c = 2^{\aleph_0}$.

2. Kontinuumshypotesen

Men vi har ikke svaret på spørgsmålet, om dette er det næste i rækken af uendelige tal!, Det næste uendelige tal efter $\aleph_0$ betegnes $\aleph_1$, så det problem, der står tilbage, og som vi ikke har svaret på er, om der også gælder, at $c = \aleph_1$

Cantor kæmpede længe med at bevise – eller modbevise – dette, men det lykkedes aldrig. Cantor var maniodepressiv og blev med tiden mere og mere invalideret. Meget tyder på, at hans første voldsomme anfald og sammenbrud i 1884 blev udløst af hans kamp for at løse dette problem. I ugerne op til sammenbruddet sendte han næsten dagligt nye artikler til et tidsskrift, én dag med beviser, som han dagen efter trak tilbage, en anden dag med modbevis, som han så også straks trak tilbage, og så igen et nyt forsøg på et bevis. Cantor var også dybt religiøs og i kapitel 10, *Matematik og kultur* vil vi fortælle mere indgående om hans erkendelsesteori. Det meste af tiden var han overbevist om, at der gjaldt lighedstegn i $c = \aleph_1$ og formulerede dette som en formodning eller hypotese:

Kontinuumhypotesen
Der findes ingen mængder med kardinaltal mellem $\aleph_0$ og c.

Påstanden er altså at c er det næste i rækken af kardinaltal.

Konstruktionen af $2^{\aleph_0}$ som det uendelige tal, der angiver antallet af delmængder af de naturlige tal kan generaliseres, så eksempelvis $2^{\aleph_1}$ er det kardinaltal, der angiver antallet af delmængder af $\aleph_1$. Dette betegnes $2^{\aleph_1} = \aleph_2$.

Det kan hurtigt komme til at svimle for os, når vi går op af denne stige af stadigt større uendelige kardinaltal. Og vi ved ikke, om der findes kardinaltal ind imellem! Hvis vi antager, at $c = \aleph_1$, så kan vi stadig danne os et billede af uendeligheden, fordi dette kardinaltal kan repræsenteres af noget vi kender lidt til, nemlig *mængden af alle funktioner*.

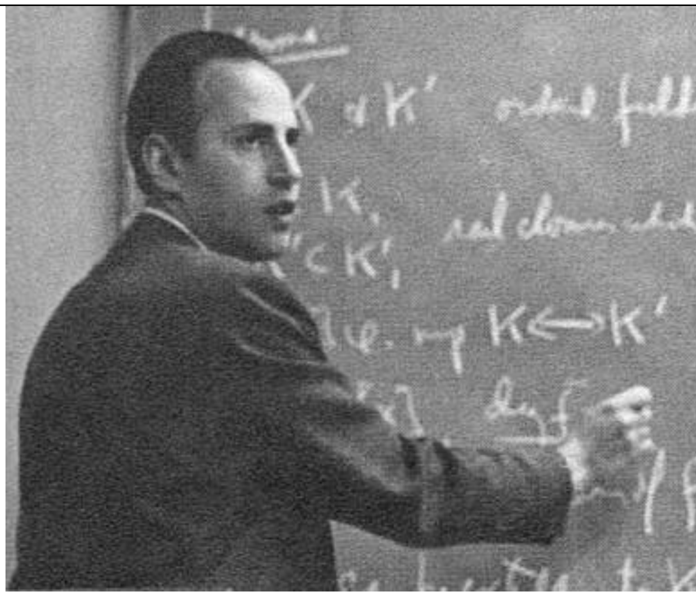
Ved en stor matematikkongres i år 1900 formulerede Hilbert en vision for hvilke store matematiske problemer, der ville blive løst i løbet af de næste hundrede år. Der var 23 problemer på hans liste, som du kan finde ***her***, og det første af dem alle er netop kontinuumhypotesen. Det var tiden før Titanics forlis og 1. verdenskrig, en optimismens tid med en nærmest ubegrænset tro på menneskets evne til at forstå, beskrive og beherske verden. Få årtier efter havde man ikke alene været igennem det totale sammenbrud i 1. verdenskrig, men også grundlæggende forestillinger i videnskaberne blev væltet omkuld. Den historie

ISBN 9788770668781

fortæller vi i kapitel 10. Også matematikken blev kastet ud i en krise, som netop kan illustreres med kontinuumhypotesen.

Dette problem fandt nemlig en løsning, men en noget anderledes end Hilbert og Cantor og andre havde forestillet sig. Løsningen er, at der ikke er noget bestemt svar på om kontinuumhypotesen holder eller ej. I 1940 offentliggør Kurt Gôdel (1906-1978) en artikel, hvor han viser, at hypotesen ikke kan modbevises. Men i 1963 beviste Paul Cohen (1934-2007) at den modsatte påstand – dvs. påstanden, at der findes mængder med et kardinaltal mellem $\aleph_0$ og c – heller ikke kan modbevises. Det er en *uafgørlig påstand*!

Kurt Gödel



Paul Cohen

Ordet ”kontinuum” beskriver den opfattelse, at tallinjen er sammenhængende overalt – uden huller. Havde vi kun de rationale tal til rådighed, ville tallinjen ikke bare være fuld af huller, men næsten kun bestå af huller. Opfattelsen i 1800-tallet var, at de irrationale tal fylder hullerne ud, men man var ikke i stand til at give en definition eller beskrivelse af, hvad irrationale tal er, som var egnet til at svare på nogle af de fundamentale spørgsmål, der var opstået indenfor læren om funktioner, bl.a. indenfor differentialregningen. Der var en udbredt fælles forståelse af, at man manglede at få styr på, hvad *kontinuitet* er. Og det var i virkeligheden for at få styr på det, at både Cantor og Dedekind havde kastet sig ud i at finde en beskrivelse af, at i hvert fald tallinjen er kontinuert!