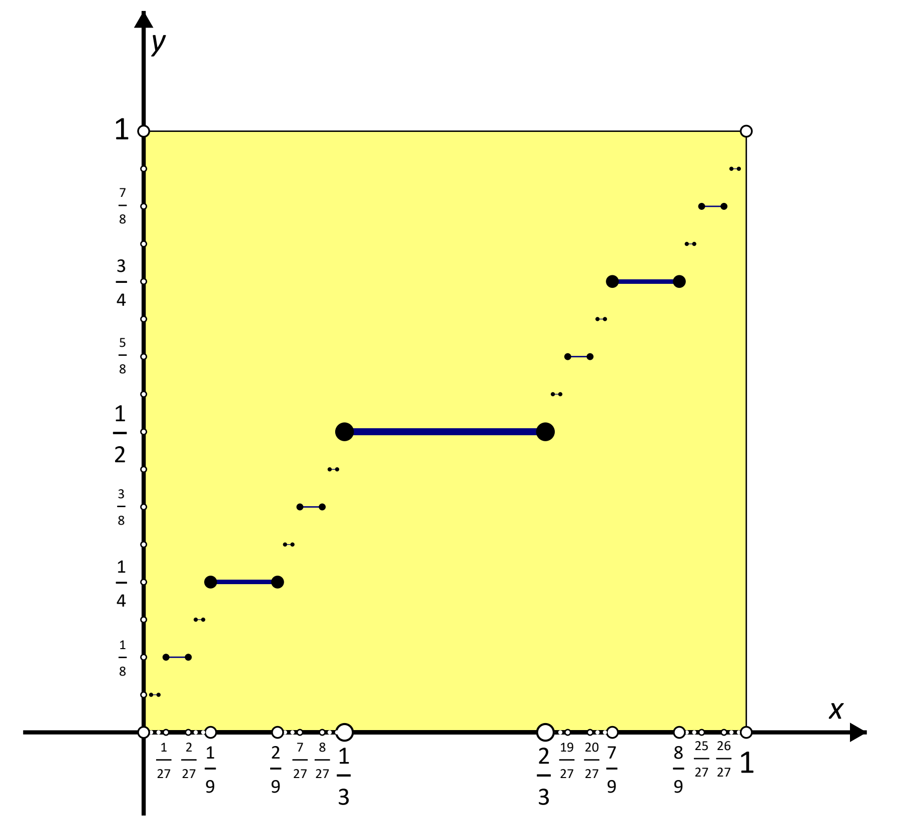
Projekt 7.5 Cantors djævletrappe

Cantors djævletrappe udspringer fra Cantors arbejde med mængdelæren i 1883. Grafen fremkommer ved, at vi deler enhedsintervallet i tre lige store dele og tildeler den midterste del, dvs. det lukkede interval $\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$ det vandrette linjestykke i højden $\frac{1}{2}$. Derefter deler vi såvel den første tredjedel som den sidste tredjedel i tre lige store dele. I den første tredeling tildeler vi det midterste stykke, dvs. det lukkede interval $\left[\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right]$ det vandrette linjestykke i højden $\frac{1}{4}$. I den anden tredeling tildeler vi det midterste stykke, dvs. det lukkede interval $\left[\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right]$ det vandrette linjestykke i højden $\frac{3}{4}$. Således fortsætter vi, idet vi hele tiden tredeler de tiloversblevne stykker på grundlinjen og tvedeler højderne.
På illustrationen ser du situationen efter det tredje step. x-værdierne er angivet. ***Hvad er y-værdierne?***



Resultatet er en trappe med uendeligt mange vandrette trappetrin, der tilsammen har længden 1. Det første trappetrin har nemlig længden $\frac{1}{3}$. De to næste trappetrin har tilsammen længden $\frac{2}{9}$. De fire næste trappetrin har tilsammen længden $\frac{4}{27}$ osv. Den samlede længde af trappetrinene er derfor

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\ldots=\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\cdot 3=1$$

hvor vi har anvendt, at summen af den geometriske række med $b=1$ og $a=\frac{2}{3}$ er $\frac{1}{b-a}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}$.

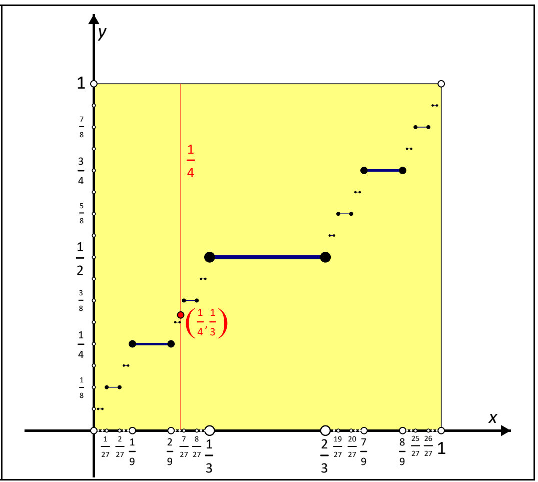
Find beviset for dette i Hvad er matematik? 2, kap. 3, og redegør for det.
Vi dækker derfor i en vis forstand hele enhedsintervallet med vores vandrette trappetrin, der stille og roligt løfter sig fra 0 til 1, idet de gennemløber alle højder, der kan skrives som en brøk, hvor nævneren er en potens af 2.
Argumenter for, at i ethvert lille interval om et tal i det lodrette enhedsinterval vil der ligge sådanne højder!

Men overraskende nok er vi slet ikke færdige med at konstruere grafen for djævletrappen – der findes nemlig uendeligt mange tal, som ikke tildeles plads på trappetrinene. Det er fx tilfældet med tallet $x=\frac{1}{4}$, idet der gælder

$\frac{1}{4}<\frac{1}{3}$: Tallet ligger til venstre for det første trappetrin,

$\frac{1}{4}>\frac{2}{9}$: Tallet ligger til højre for det næste trappetrin,

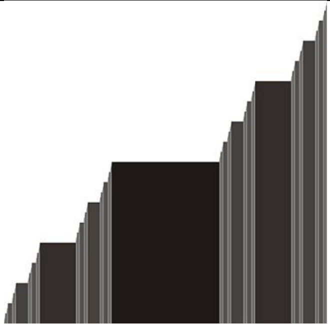
$\frac{1}{4}<\frac{7}{27}$: Tallet ligger til venstre for det næste trappetrin. Og sådan fortsætter tallet $x=\frac{1}{4}$ med hver anden gang at ligge til højre for og hver anden gang til venstre for. Højderne i de tilhørende trappetrin kommer da til at danne en intervalruse, der viser sig at lukke sammen om $\frac{1}{3}$, hvorfor højden af djævletrappen i $x=\frac{1}{4}$ netop er $y=\frac{1}{3}$.



ISBN 9788770668781

Når man på denne måde lukker hullerne ved at tilføje de manglende punkter til grafen fremkommer den fulde sammenhængende djævletrappe, der vokser kontinuert fra 0 til 1, men som undervejs næsten overalt er konstant, idet vi ”med sandsynlighed 1” befinder os på et vandret trappetrin, da de tilsammen dækker hele enhedsintervallet.

Vi kan nu spørge efter integralet $\int_0^1 h(x)dx$. Vi kan enten appellere til symmetri (grafen er symmetrisk omkring $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$) eller vi kan summere alle rektanglerne under trappetrinene.



Den færdige djævletrappe

Arealet under det første trappetrin er $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

Arealerne under de to næste trappetrin er

$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{4}=\frac{1}{9}$.

Arealet under de næste fire trappetrin er

$\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{27}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{27}\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{27}\cdot\frac{7}{8}=\frac{1}{27}\cdot\frac{16}{8}=\frac{2}{27}$.

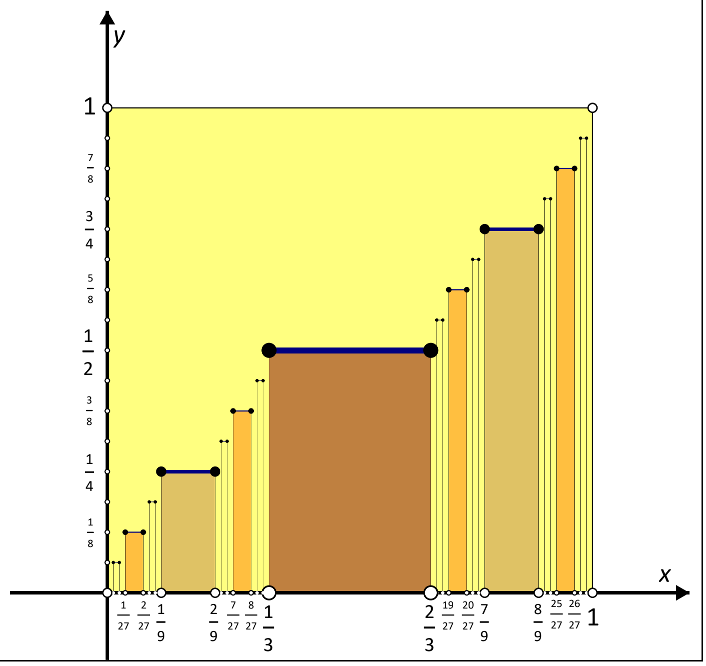
Bidragene fra trappetrinene bliver altså hele tiden to tredjedele gange mindre.

Det samlede areal bliver derfor:

$\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{2}{27}+\ldots=\frac{1}{6}\cdot\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{6}\cdot3=\frac{1}{2}$

hvor vi igen udnytter, at vi kender den geometriske rækkes sum.

Redegør i detaljer for udregningen



Når man ser et sådant eksempel på en funktion, tænker man måske, at nu er matematikken altså for langt ude, og at den slags mærkelige funktioner i hvert fald ikke optræder i den ”virkelige verden”. Intet kunne være mere forkert:

Djævletrappen er et værktøj, den moderne fysik anvender til at beskrive nogle af de mærkelige fænomener og tilstande nede i kvanteverden. I 1986 publicerede den danske fysiker Per Bak en oversigtsartikel i *Physics Today* om hvorledes elektronernes spin afhænger af et ydre magnetfelt (se illustrationen). Denne sammenhæng trak Per Pak frem i artiklens titel, der netop var *The Devils Staircase*. Nobelprisen i fysik blev i 1998 givet for et beslægtet studium af den såkaldte kvantemekaniske Hall-effekt. Hall-effekten har været kendt i godt 100 år og går i korthed ud på, at påtrykkes en elektrisk strøm et ydre magnetfelt, vil effekten være, at der opstår et elektrisk felt vinkelret på strømmen. Effekten er en pæn kontinuert og differentiabel funktion af magnetfeltets styrke. Nede i atomernes verden er Hall-effekten også en funktion af magnetfeltets styrke, men variabelsammenhængen synes her at følge en djævletrappe! Den ”virkelige verden” er virkelig mærkelig.

Den visionære og rapkæftede danske fysiker Per Bak, der døde kun 54 år gammel i 2002. Per Bak arbejdede på at forstå de ændringer i Universet, der fører til opbygningen af stadigt mere komplekse strukturer.

Her kan du læse mere om Per Baks arbejde og høre ham i et engelsk radiointerview:

https://www.paulagordon.com/shows/bak/

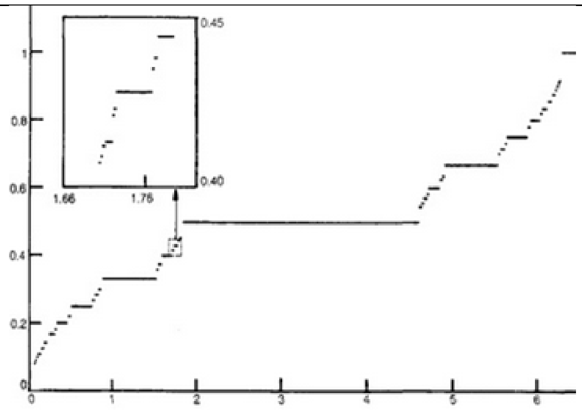
Her kan du læse hans nekrolog bragt i New York Times:

Per Bak, Physicist of Sudden Change, Dies at 54:

http://www.cns.gatech.edu/~predrag/friends/Bak/index.html

ISBN 9788770668781

Faselåsning: Når et system kombinerer to svingninger med forskellige frekvenser, her symboliseret ved den gyngende pige, der trækkes af manden i Nicolas Lancet's berømte maleri: Gyngen, fra 1735, vil det kunne stabilisere sig ved simple rationale frekvensforhold.



Djævletrappe fra Per Baks oversigtsartikel om djævletrapper i Physics Today 1986. I et et-dimensionalt gitter kan elektronerne enten have spin op eller spin ned. Grafen viser den teoretiske brøkdel af elektronspin, der peger opad, som funktion af et ydre magnetfelt

Du kan arbejde videre med Cantors djævletrappe med udgangspunkt i følgende to artikler:

An Exploration of the Cantor Set, *af* Christopher Shaver, hvor fokus er at arbejde i **tretalssystemet.**

The Cantor function af et forfatterkollektiv, hvor fokus er at studere den funktion, hvis graf er djævletrappen, og fx vise, at denne er kontinuert.