ISBN 9788770668781

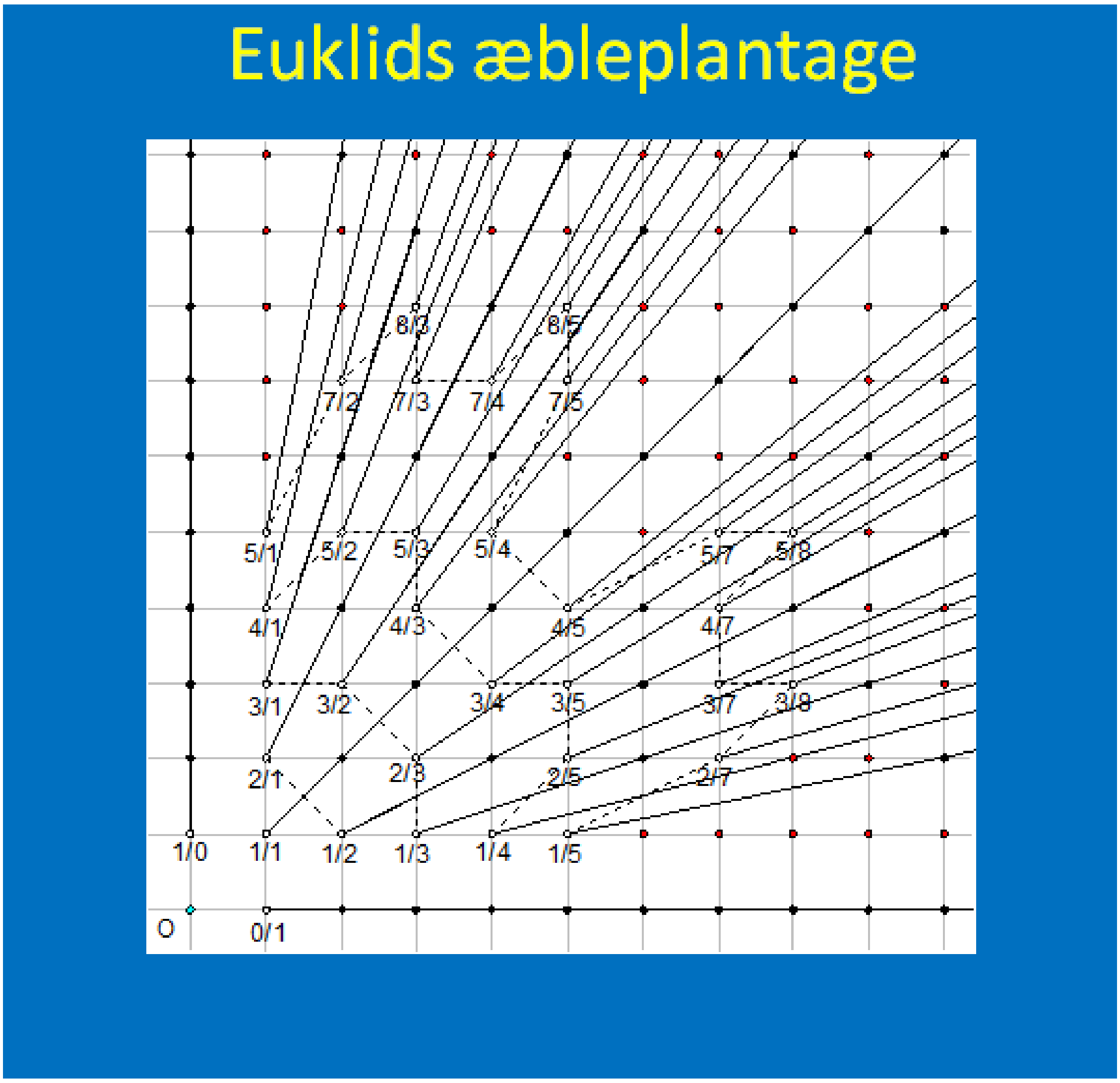
L&R Uddannelse EGMONT

Projekt 7.4 Euklids æbleplantage og Farey-træet

(*Bemærk: I dette projekt arbejder vi med værktøjsprogrammet: TI Nspire*)

Umiddelbart kan det være svært at forstå at der ikke er flere rationale tal end naturlige tal, men det er fordi vi organiserer dem efter størrelse. Der findes andre vigtige måder at organisere de rationale tal på, hvor deres tællelige struktur fremstår tydeligt. Fx kan de organiseres i det såkaldte Farey-træ. Vi starter med at se lidt på princippet bag Euklids æbleplantage (Euclids orchard) – hent det dokument, der følger opbygningen nedenfor ***her***.

Æbleplantagen ligger i første kvadrant og der skal plantes træer i gitterpunkterne med heltallige koordinater - men ikke i dem alle, kun dem der svarer til de rationale tal. Ethvert gitterpunkt (q,p) har en sigteretning fra Origo, dvs. (0,0). Hældningen af sigteretningen er en brøk $\frac{p}{q}$. De rationale tal svarer nu til gitterpunkter, hvor brøken er uforkortelig, dvs. hvor gitterpunktet kan ses fra Origo. De øvrige gitterpunkter, svarende til forkortelige brøker, ligger derimod i skygge af et rationalt gitterpunkt. Der findes også sigteretninger, der slet ikke rammer gitterpunkter. De svarer netop til de irrationale tal.

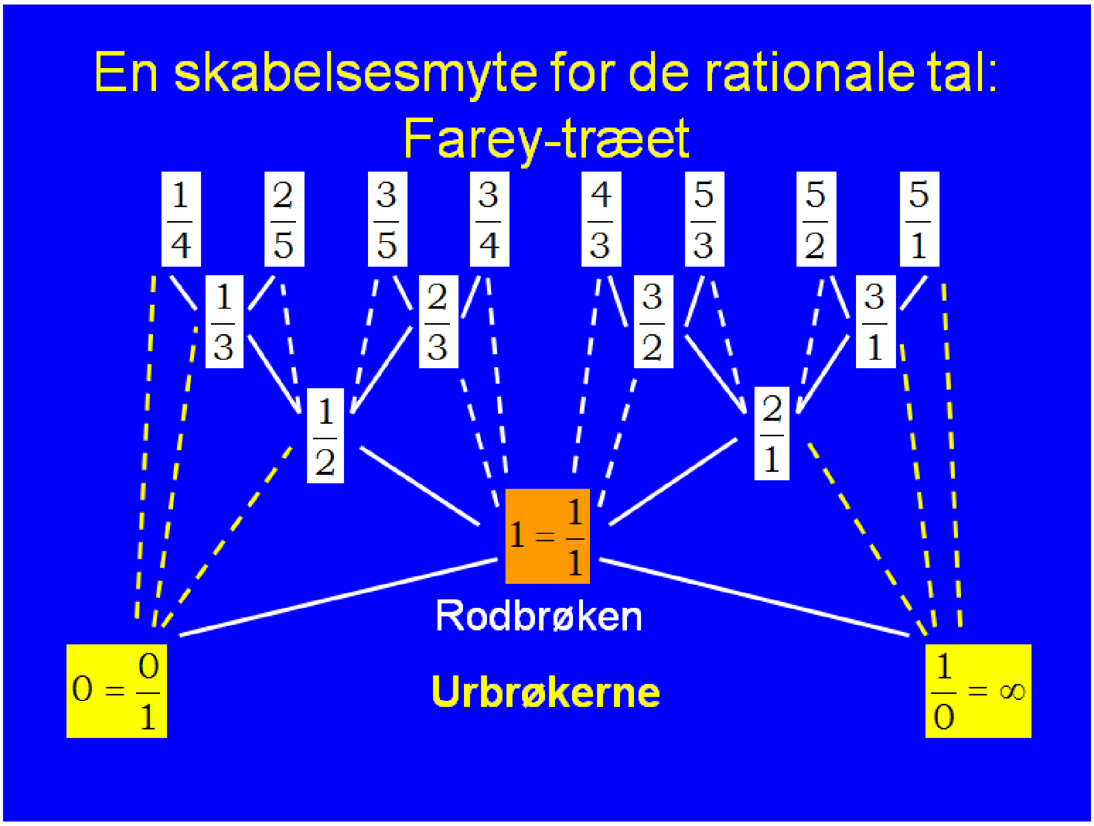


Når man nu skal plante rationale æbletræer i Euklids plantage, er det nærliggende at starte med det gitterpunkt, der ligger tættest på (0,0). Det drejer sig om gitterpunktet (1,1), altså det rationale tal $\frac{1}{1}=1$. Vi stryger nu alle de gitterpunkter, der ligger i ly af (1,1), dvs. (2,2), (3,3), (4,4) osv. Derefter planter vi rationale æbletræer i de to tiloversblevne nu gitterpunkter, der nu ligger tættest set fra (0,0). Det drejer sig altså om gitterpunkterne (2,1) og

ISBN 9788770668781

(1,2) svarende til de rationale tal $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{1}=2$. Vi stryger nu alle de gitterpunkter, der ligger i ly af (2,1) og (1,2). Således fortsættes som illustreret i animationen.

På denne måde frembringer vi alle de rationale tal, idet vi den første dag planter et rationalt tal, den anden dag to rationale tal, den tredje dag fire rationale tal, den fjerde dag otte rationale tal osv. Det er nu klart, at de rationale tal har en tællelig struktur. Faktisk minder den så meget om strukturen for de naturlige tal, at vi kan indføre forgængere og efterfølgere for de rationale tal.



Fareytræet er det fagreste træ i skoven!

Måden at frembringe de rationale tal i rækkefølge én efter én kan også organiseres i en graf, der kaldes *Fareytræet*. Vi hæfter os da ved, at man kan kombinere to rationale tal

$$\frac{p_1}{q_1} \text{ og } \frac{p_2}{q_2}$$

ved hjælp af *Farey-midling*

$$\frac{p_1}{q_1} \oplus \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}$$

der altid ligger imellem de to rationale tal. Bemærk, at symbolet $\oplus$ her blot repræsenterer en ny regningsart for brøker, hvor vi lægger tæller til tæller og nævner til nævner.

I Euklids æbleplantage svarer det til, at vi lægger gitterpunkterne sammen som vektorer. Udgangspunktet er da *urbrøkerne* $\frac{0}{1}=0$ og $\frac{1}{0}=\infty$; herfra stammer alle rationale tal!

Når vi Fareymidler dem, får vi rodbrøken $\frac{0}{1}\oplus\frac{1}{0}=\frac{1}{1}=1$. Derefter Fareymidler vi $\frac{0}{1}$ med $\frac{1}{1}$ og får $\frac{1}{2}$, ligesom vi Fareymidler $\frac{1}{0}$ med $\frac{1}{1}$ og får $\frac{2}{1}=2$ osv. osv. Fortsætter vi på denne måde, får vi en uendelig tvedelt graf, der netop indeholder alle de positive rationale tal!
Vi kan endda indlejre de irrationale tal i Fareytræet: De ligger i spidserne for de uendeligt lange grene, altså i løvet! De rationale tal ligger jo i knudepunkterne for Fareytræet, men de genfindes også som spidser i Fareytræet, nemlig de spidser, hvor vi fra et vist trin, udelukkende vælger grene, der fører mod højre (eller tilsvarende udelukkende vælger grene, der fører mod venstre).

ISBN 9788770668781

Fareytræets løv rummer altså alle de reelle tal!

Et endeligt Fareytræ med *n* lag har 2^n spidser. Det uendelige Fareytræ har derfor 2^∞ mange spidser. I en vis forstand (man kan argumentere helt præcist), indeholder Fareytræet altså ∞ mange rationale tal, og samtidigt også 2^∞ mange reelle tal. Du kan finde en perspektivisk gengivelse af det ***her*.**

Cantors store bedrift var at bevise, at der altid gælder $2^n > n$, uanset om *n* er et endeligt eller et uendeligt tal. Der er altså flere spidser i Fareytræet end, der er grene, fordi $2^\infty > \infty$.

Kontinuummets, dvs. de reelle tals, mægtighed er større end de rationale tals mægtighed: Vi siger, at de reelle tal er *over*tællelige. På samme vis er der flere reelle funktioner, end der er reelle tal.