Projekt 7.12 Uniform kontinuitet og eksistensen af arealer

Det oftest oversete problem i arbejdet med at give differential- og integralregningen fast grund under fødderne er det som anføres i overskriften: Eksistensen af arealerne.
Før vi når frem til det, opridser vi lige hele processen frem til beviset for, at enhver kontinuert funktion har en stamfunktion. Beviset er delt op i flere skridt, og undervejs foretages forskellige antagelser om funktionerne, men det er faktisk ikke her, problemet ligger:

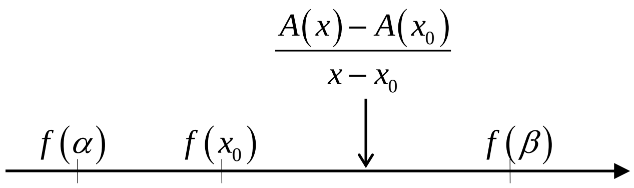
1. Først antages $f(x) \geq 0$ i hele intervallet $[a;b]$. Kan vi bevise påstanden i dette tilfælde, så gælder den generelt. For en kontinuert funktion $g(x)$ har et minimum $m \in [a;b]$: $g(x) \geq m$, eller $g(x) - m \geq 0$. Dette giver os, at den kontinuerte funktion $g(x) - m$ har en stamfunktion $G_1(x)$. Men så er $G_1(x) + mx$ en stamfunktion til $g(x)$. Altså gælder påstanden generelt.
2. Den næste antagelse er, at *f* er monoton. Men dette er udelukkende en bevis*teknisk* lettelse.

Øvelse: Arealsætningen uden antagelse om monotoni.
Find beviset for det monotone tilfælde og sammenlign med det følgende:
I beviset indføres arealfunktionen $A(x)$, og vi gennemfører en vurdering på størrelsen $A(x) - A(x_0)$. Denne størrelse er arealet af en lille strimmel under grafen for *f*. Men da *f* er kontinuert har den et maksimum, β og et minimum, α i $[x_0;x]$. Derfor gælder:

$$f(\alpha) \cdot (x - x_0) < A(x) - A(x_0) < f(\beta) \cdot (x - x_0)$$

$$f(\alpha) < \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} < f(\beta)$$ $x - x_0 > 0$, derfor bevares ulighedstegnet

Vi afsætter størrelserne på en tallinje for at få et bedre overblik:



Når nu $x \to x_0$, vil både α og β gå mod x_0, og dermed vil $f(\alpha)$ og $f(\beta)$ gå mod $f(x_0)$.
(Overvej hvorfor!).

Se på tallinjen og konkludér: $\frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} \to f(x_0)$,

hvilket betyder, at $A(x)$ er differentiabel i x_0 med differentialkvotient: $A'(x_0) = f(x_0)$.
Med andre ord: $A(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.
Vi ser således, at beviset kan gennemføres efter samme opskrift som i det tilfælde, hvor *f* er monoton.

Problemet i beviset for sætningen om, at en kontinuert funktion har en stamfunktion, ligger på et mere grundlæggende plan: *Eksistensen af A(x)*.

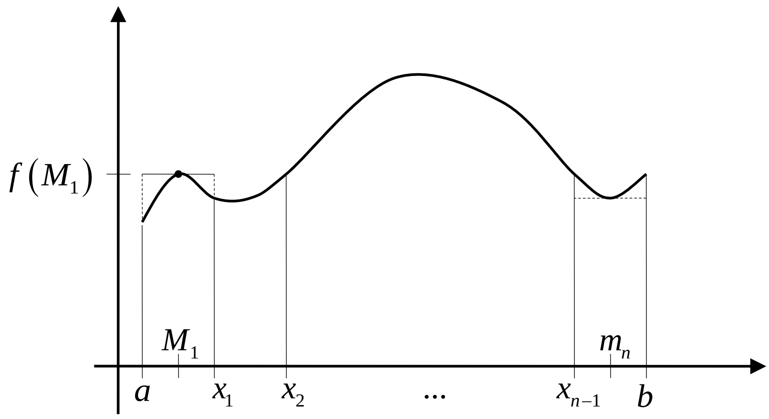
Vi postulerer, at arealet under grafen, og dermed *A*(*x*) eksisterer. For de grafer vi normalt støder på, forekommer dette indlysende. Men vi har i A-bogen set eksempler på funktioner, hvor dette ikke er helt så indlysende. De pågældende funktioner var ganske rigtigt ikke kontinuerte, men hvad er det lige ved kontinuiteten, der redder os? Vi må starte med en definition:

Definition: Arealet af et område
Et område har et areal, hvis der findes en følge af indre og ydre polygoner, henholdsvis P_n og Q_n, således at: $\text{areal}(Q_n) - \text{areal}(P_n) \to 0$, når $n \to \infty$.

Betragt punktmængden afgrænset af linjerne med ligninger $x = a$ og $x = b$, samt af *x*-aksen og grafen for den positive funktion *f*.

Lad: $a < x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ være en inddeling af $[a;b]$ i *n* lige store dele.

Intervallængden er så $l_n = \frac{b-a}{n}$.



I hvert delinterval har *f* et maksimum i et punkt M_i og et minimum i et punkt m_i. Den ydre polygon fastlægges nu af værdierne $f(M_i)$, og den indre af værdierne $f(m_i)$.

Areal af indre polygon: $\text{areal}(P_n) = f(m_1) \cdot l_n + ... + f(m_n) \cdot l_n$
Areal af ydre polygon: $\text{areal}(Q_n) = f(M_1) \cdot l_n + ... + f(M_n) \cdot l_n$
Forskellen: $\text{areal}(Q_n) - \text{areal}(P_n) = (f(M_1) - f(m_1)) \cdot l_n + ... + (f(M_n) - f(m_n)) \cdot l_n$ (*)
Herefter vil vi lade $n \to \infty$. Så vil $l_n \to 0$. Hvad kan vi da konkludere om (*)?
Umiddelbart ikke noget, for *antallet* af led vokser også mod uendeligt.
Sammenlign med: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, ..., $\frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + ... + \frac{1}{1000} = 1$ (1000 led).

Betragter vi situationen grafisk, ser det ud til, at tallene $(f(M_1) - f(m_1))$ kan gøres så små, vi ønsker det, blot intervalinddelingen bliver tilstrækkelig fin. Men vi har ikke værktøjet til at afgøre dette. Vort problem er nemlig, at vi skal styre, hvad der sker på *hele* intervallet $[a;b]$, og ikke bare i et enkelt punkt. Kontinuitetsbegrebet, som vi har indført det, taler kun om, hvad der sker i et enkelt punkt.

Den mere generelle problemstilling, der her er skitseret dækkes af begrebet *Uniform kontinuitet*. Det var faktisk dette kontinuitetsbegreb, Weierstrass først søgte at få styr på. Som tidligere omtalt blev kontinuitet dengang altid opfattet som en egenskab knyttet til et helt interval: En graf kan være sammenhængende i et interval, mens det umiddelbart forekom mere suspekt at tale om kontinuitet i et punkt.

Weierstrass' definition af det, vi i dag kalder Uniform kontinuitet (for at skelne det fra begrebet kontinuitet i et punkt) lyder:

Definition: Uniform kontinuitet
f kaldes uniform kontinuert i *I*, hvis der gælder, at for ethvert $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$, således at:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Definitionen siger altså, at hvis vi får et *ε* stukket ud, så findes et δ, så uanset hvor i intervallet *I*, vi befinder os, så gælder det, at blot forskellen $|x - y|$ er mindre end *δ*, så har vi styr på udsvinget i funktionsværdierne: Forskellen mellem disse er mindre end det givne ε.
Dette krav forekommer langt stærkere end den almindelige kontinuitetsdefinition. Skal vi gennemføre et argument vedrørende kontinuitet, der følger Weierstrass definition, så vil det *δ*, vi vælger, normalt afhænger *både* af *ε og* af det x_0, vi har som udgangspunkt. Sådan er det også i almindelighed. Men ser vi på *lukkede* intervaller gælder faktisk følgende:

ISBN 9788770668781

3. Hovedsætning om kontinuerte funktioner
Hvis *f* er kontinuert på $[a;b]$, så er *f* også uniformt kontinuert.

Bevis
Lad *ε* være givet. Vi skal vise, der findes et *δ*, så der for *alle* $x,y \in [a;b]$ gælder:

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon \qquad (**)$$

Vi giver et indirekte bevis.
Antag nemlig at der ikke findes et sådant *δ*. Det betyder, at vi kan vælge en følge af tal δ_n, f.eks. følgende:
$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$, således at $\delta_n \to 0$, når $n \to \infty$, og hvor der for ethvert δ_n findes to tal x_n og y_n, der *ikke* opfylder (**), dvs.:

$$|x_n-y_n|<\delta_n \text{, men samtidig: } |f(x_n)-f(y_n)|>\varepsilon \qquad (***)$$

Overvej nøje dette!
Nu anvendes *Bolzmann-Weierstrass' sætning*, der er vist i et appendiks nedenfor. Sætningen siger, at enhver uendelig følge af tal i et begrænset interval har et *fortætningspunkt*.

Følgen $\{x_n\}$ har således et fortætningspunkt x_0.
Dette betyder, at der findes en delfølge: $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \ldots, x_{k_i}, \ldots \to x_0$
Overvej nu, at x_0 må ligge i intervallet $[a;b]$, når dette er lukket.
Vi ved, at $|x_{k_i}-y_{k_i}| \to 0$, og derfor vil også $y_{k_1}, y_{k_2}, y_{k_3}, \ldots, y_{k_i} \to x_0$.
f er kontinuert, så derfor har vi nu *både*: $f(x_{k_i}) \to f(x_0)$ *og*: $f(y_{k_i}) \to f(x_0)$
Anvend så Weierstrass' definition på kontinuitet:
Læg et interval *J* med bredde *ε* om $f(x_0)$: $J = \left]f(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}; f(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}\right[$ og vælg hertil et *δ*,
så intervallet $I =]x_0-\delta; x_0+\delta[$ afbildes helt ind i *J*.
I er et interval om x_0, så fra et vist trin er både x_{k_i} og y_{k_i} med i *I*.
Men så er både $f(x_{k_i})$ og $f(y_{k_i})$ med i *J*, dvs. $|f(x_{k_i})-f(y_{k_i})|<\varepsilon$,
hvilket er i modstrid med valget af *x*'erne og *y*'erne, som beskrevet i (***).

Derfor er antagelsen i (***) forkert: Vi kan ikke blive ved med at vælge disse x_n og y_n.
Altså findes der et *δ*, så (**) er opfyldt:

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

Dette afslutter beviset for hovedsætning 3.

Med sætningen om uniform kontinuitet i bagagen kan vi afslutte beviset for, at områder under grafen for en positiv kontinuert funktion har et areal. Og dette vil afslutte beviset for, at enhver kontinuert funktion har en stamfunktion.

Vi vender tilbage til problemstillingen på side2, hvor vi var nået frem til at foretage en vurdering på:

$$\text{areal}(Q_n)-\text{areal}(P_n)=\left(f(M_1)-f(m_1)\right)\cdot l_n+\ldots+\left(f(M_n)-f(m_n)\right)\cdot l_n$$

Vi ønsker at vise:

$$\text{areal}(Q_n)-\text{areal}(P_n)\to 0 \text{ når } n\to\infty$$

Lad dertil et *ε* være givet. Vi skal bestemme et *N*, så der gælder, at

$$\text{areal}(Q_n)-\text{areal}(P_n)<\varepsilon \text{ når } n>N$$

Vælg nu til tallet $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ et δ *ifølge definitionen på uniform kontinuitet*.
Så gælder:

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

Lad så δ bestemme inddelingen af intervallet $[a;b]$, dvs. vi vælger tallet *N*, så der gælder:

intervallængden l_N er *mindre* end δ , dvs.: $l_N=\dfrac{b-a}{N}<\delta$

Betragt nu et tilfældigt tal *n*, der er større end *N*.
For hvert *i* ligger maksimums og minimumspunkterne M_i og m_i i et interval med intervallængden $l_n<l_N<\delta$. Så gælder åbenbart:

$|M_i-m_i|<\delta$ for alle *i*, og derfor er $|f(M_1)-f(m_1)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ for alle *i*. (****)

Indsæt nu dette i (*):

$$\text{areal}(Q_n)-\text{areal}(P_n)=\big(f(M_1)-f(m_1)\big)\cdot l_n+\ldots+\big(f(M_n)-f(m_n)\big)\cdot l_n \qquad (*)$$

$$\text{areal}(Q_n)-\text{areal}(P_n)\le|f(M_1)-f(m_1)|\cdot l_n+\ldots+|f(M_n)-f(m_n)|\cdot l_n \qquad \text{”trekantsuligheden”}$$

$$\text{areal}(Q_n)-\text{areal}(P_n)\le\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot l_n+\ldots+\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot l_n \qquad \text{Indsæt (****)}$$

$$\text{areal}(Q_n)-\text{areal}(P_n)\le\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot n\cdot l_n$$

$$\text{areal}(Q_n)-\text{areal}(P_n)\le\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot n\cdot\frac{b-a}{n} \qquad \text{Indsæt } l_n=\frac{b-a}{n}$$

$$\text{areal}(Q_n)-\text{areal}(P_n)\le\varepsilon$$

Altså netop den ønskede konklusion.
Dermed har vi vist: $\text{areal}(Q_n)-\text{areal}(P_n)\to 0$ når $n\to\infty$ dvs. området under grafen har et areal!

På grundlag af en dybere indsigt i de reelle tal – som vi har brug for i beviset for Bolzano-Weierstrass sætning - og ved hjælp af de tre kontinuitetssætninger, har vi hermed fået etableret et solidt grundlag under den matematiske analyse.

Appendiks.

Bolzano-Weierstrass sætning
Hvis $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots$ er en følge af reelle tal, der er begrænset, dvs. der findes et interval $[a;b]$, der indeholder alle x_n 'erne, så har følgen et *fortætningspunkt* i $[a;b]$, hvorved forstås et tal x_0 , hvorom der gælder, at der kan udtages en delfølge $z_1,z_2,z_3,\ldots$ af x_n 'erne, som går mod x_0 : $z_k\to x_0$ når $k\to\infty$.

Bevis
Vi anvender intervalruseteknikken.
Halvér intervallet $[a;b]$ i de to dele: $[a;m_1]$ og $[m_1;b]$ I mindst én af halvdelene, fx i $[a;m_1]$ ligger der uendeligt mange af x_n 'erne. Vælg dette interval, og udtag et af x_n 'erne som z_1 .
Halvér det nye interval $[a;m_1]$ i de to dele: $[a;m_2]$ og $[m_2;m_1]$ I mindst én af halvdelene, fx i $[m_2;m_1]$ ligger der uendeligt mange af x_n 'erne. Vælg dette interval, og udtag et af x_n 'erne som z_2 .
Gentag denne proces med halvering af intervallerne. Vi får så bestemt en intervalruse:

$$I_1\supset I_2\supset I_3\ldots\supset I_k\ldots$$

hvor længden af intervallerne går mod 0. Dvs. der ligger et tal x_0 på bunden af intervalrusen.

Overvej nøje, hvorfor vi kan være sikre på, at dette x_0 ligger i intervallet $[a;b]$. (*Hint*: Anvend, at $[a;b]$ er et *lukket* interval).

Men samtidig har vi bestemt en delfølge af tal fra den oprindelige følge:

$$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_k, \ldots$$

hvor z_k ligger i I_k for ethvert *k*.
Men så må der gælde:

$$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_k, \ldots \to x_0 \quad \text{når} \quad k \to \infty$$

Altså har vi bestemt et fortætningspunkt for talfølgen.
Bemærk, at beviset er et *eksistensbevis*. Vi har vist, at der findes et fortætningspunkt, men vi har ikke vist hvordan det findes.