ISBN 9788770668781
website: link fra kapitel 7 , afsnit 1

L&R Uddannelse
EGMONT

Cantors brevveksling med Dedekind

I november 1873 havde Cantor skrevet til sin gode ven Richard Dedekind, at han ikke kunne løse problemet med at vise, at der er flere reelle tal end der er naturlige tal. Cantor led hele livet af depressioner og psykiske lidelser og endte ulykkeligt sit liv på en sindsygeanstalt, som det hed dengang. Og han er her som ofte bekymret for, at det er ham, der er noget galt med:

"Mit spørgsmål er ganske enkelt, om man kan parre mængden af naturlige tal sammen med mængden af reelle tal, så alle får præcis én makker? Ved et første blik kunne man sige nej, det er umuligt, for de naturlige tal er en samling tal, der står hver for sig, mens de reelle tal udgør et kontinuum på tallinjen. Men der er ikke noget vundet ved et sådant argument, og selv om jeg er overbevist om, at man ikke kan parre dem sammen, kan jeg ikke finde en begrundelse, og selv om jeg bruger mange kræfter på det, så kan forklaringen være meget simpel"

(Cantor, brev til Dedekind 29. november 1873, citeret fra Joseph Daubens Cantor biografi)

Det citerede afsnit finder du nedenfor på originalsproget og i en lidt større sammenhæng.


Richard Dedekind (1831 - 1916),

Cantor havde mødt Dedekind året før – i øvrigt på Cantors bryllupsrejse – og de to opbyggede gennem årene et nært venskab. Når han spørger Dedekind om dette, er det bl.a. fordi, Dedekind året før havde udgivet en artikel om, hvordan man kan opbygge en teori for tallene, hvor de irrationale tal bliver konstrueret ud fra de rationale. Og når han selv afviser det argument "ved første blik", var det fordi han på dette tidspunkt vidste, at både de rationale og de algebraiske tal er tællelige, dvs. de er af samme mægtighed som de naturlige tal.

Dedekind svarede straks, at han heller ikke kunne løse det, og 2. december skriver Cantor tilbage, at han var glad for at modtage svaret, da han havde beskæftiget sig med det i årevis og længe havde tvivlet på, om problemet med den manglende løsning lå hos ham selv - eller lå i selve problemet. Og da han fik Dedekinds bekræftelse på, at det ikke ham selv, der var noget galt med, så lykkedes det pludselig. Inden for en uge har han løst det og sender allerede 7. december Dedekind en skitse til sit bevis for, at de reelle tal ikke er en tællelig mængde, men er uendeligt meget større. Han videreudvikler og forenkler sine argumenter i senere artikler frem til sit berømte *diagonalbevis*.

Man kan få adgang til en stor del af kildematerialet fra Cantors og Dedekinds brevveksling, hvor de nærmer sig en indsigt i uendelighedernes hierark, i den bog, man finder her:

https://books.google.dk/books?id=9dPJBgAAQBAJ&pg=PA28&lpg=PA28&dq=Die+Periode+des+Briefwechsels+mit+Dedekind+—+die+Entstehung+der+Mengenlehre&source=bl&ots=bo0vDpYv-R&sig=BAFU3-VKJQN3GdUGj04XHcmjcXQ&hl=da&sa=X&ei=vClJVc7wB8iNsgHw7oGgDw&ved=0CCgQ6AEwAw#v=onepage&q=Die%20Periode%20des%20Briefwechsels%20mit%20Dedekind%20—%20die%20Entstehung%20der%20Mengenlehre&f=false

Du kan finde supplerende materialer i form af en artikel af Cantor selv ***her***.

Du kan finde citatet og deres bestræbelser beskrevet i en oversigtsartikel af Dauben, der regnes for den matematiker, der har størst indsigt i Cantors liv og tankeverden ***her***.

Hvad er matematik? 3
ISBN 9788770668781
website: link fra kapitel 7 , afsnit 1

6 Dedekind – Halle, 29.11.1873 – II, XVIII

Hochgeehrter Herr College!

Gestatten Sie mir, Ihnen eine Frage vorzulegen, die für mich ein gewisses theoretisches Interesse hat, die ich mir aber nicht beantworten kann; vielleicht können Sie es, und sind so gut, mir darüber zu schreiben, es handelt sich um folgendes.

Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen n und bezeichne ihn mit (n); ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlgrössen x und bezeichne ihn mit (x); so ist die Frage einfach die, ob sich (n) dem (x) so zuordnen lasse, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des andern gehört? Auf den ersten Anblick sagt man sich, nein es ist nicht möglich, denn (n) besteht aus discreten Theilen, (x) aber bildet ein Continuum; nur ist mit diesem Einwande nichts gewonnen und so sehr ich mich auch zu der Ansicht neige, dass (n) und (x) keine eindeutige Zuordnung gestatten, so kann ich doch den Grund nicht finden und um den ist es mir zu thun, vielleicht ist er ein sehr einfacher. –

Wäre man nicht auch auf den ersten Anblick geneigt zu behaupten, dass sich (n) nicht eindeutig zuordnen lasse dem Inbegriffe $\left(\frac{p}{q}\right)$ aller positiven rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$? und dennoch ist es nicht schwer zu zeigen, dass sich (n) nicht nur diesem Inbegriffe, sondern noch dem allgemeineren

$$(a_{n_1, n_2, \ldots n_\nu})$$

eindeutig zuordnen läßt, wo $n_1, n_2, \ldots n_\nu$ unbeschränkte positive ganzzahlige Indices in beliebiger Zahl ν sind.

Mit bestem Gruße
Ihr ergebenster
G. Cantor.

Mit diesem Brief beginnt eine Phase intensiven Gedankenaustausches über Probleme der „Äquivalenz von Mengen". Im Mittelpunkt steht die Frage, ob die Menge der reellen Zahlen „abzählbar" ist oder nicht[1]. Beide Forscher scheinen ihr zu-

[1] Cantor verwendet die Bezeichnungen „Äquivalenz" und „Abzählbarkeit" erst später (s. [15] bzw. *17*). Das ist nur natürlich, da beide Begriffe ihren Sinn gerade erst durch den Beweis in *7* entfalten. Die Bezeichnung „Menge" wird von Cantor schon 1871 (in [8] und [9]) benutzt; regelmäßig dann etwa ab 1879 (s. [17]), zunächst sagt er auch „Inbegriff" oder „Gesamtheit", dann „Mannigfaltigkeit". Man beachte ferner, daß Cantor den Terminus „eindeutige Zuordnung" im Sinne von „umkehrbar eindeutige Zuordnung" gebraucht.