ISBN 9788770668781

Bevis for sætning 8

Sætning 8: En vigtig grænseværdi.

Der gælder: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, eller: $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ når $x \to 0$.

Øvelse 7.17: Hjælpeformler til beviset for sætning 8

a) Bevis, at funktionen $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ er voksende. Det kan ses ved at differentiere.

b) Bevis, at funktionen $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ i intervallet $[0;x]$ har minimum 1 og maksimum $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

c) Udnyt; $\arcsin(x) = y \Leftrightarrow x = \sin(y)$, samt at både sin og arcsin er kontinuerte til at vise:

$y = \arcsin(x) \to 0 \Leftrightarrow x = \sin(y) \to 0$

Bevis for sætning 8

Vi tager udgangspunkt i definitionen af arcussinus:

$$\arcsin(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Integralet kan fortolkes som arealet under grafen for den positive funktion. Dette areal er *større* end det vi får ved at erstatte integranden med minimum, og *mindre* end det vi får vede at erstatte integranden med maksimum. Så integralets værdi ligger i intervallet:

$$x \cdot 1 < \arcsin(x) < x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Omskriv: $1 < \frac{\arcsin(x)}{x} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Når $x \to 0$ vil $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to 1$, og derfor vil også $\frac{\arcsin(x)}{x} \to 1$ *når* $x \to 0$

Sammenhængen mellem arcussinus og sinus er:

$$\arcsin(x) = y \Leftrightarrow x = \sin(y)$$

Indsættes dette får vi endelig:

$\frac{y}{\sin(y)} \to 1$ når $x \to 0$, hvilket svarer til, at:

$\frac{\sin(y)}{y} \to 1$ når $x \to 0$