

## Beviser med cirkelslutninger

De beviser, der gives for differentiation af sinus, er altid behæftet med fejl af en art, der ikke kan rettes. Lad os først se på en af de hjælpeformler, man næsten altid møder i dette bevis:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \text{ eller: } \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1 \text{ når } x \rightarrow 0.$$

### Eksempel: Et bevis med problemer

Leder man på nettet efter et bevis for denne formel, vil man med stor sandsynlighed få et geometrisk bevis som følger:

Af figuren ovenfor **ser vi**:

$$\text{Arealet af trekant } OBP < \text{Arealet af cirkeludsnittet } OBP < \text{Arealet af trekant } OBT$$

Anvend nu vores viden om trekantsarealer og om **arealer af et cirkeludsnit** med radialantal  $x$ :

$$\frac{1}{2} \cdot \sin(x) \cdot 1 < \frac{x}{2 \cdot \pi} \cdot \pi \cdot 1^2 < \frac{1}{2} \cdot \tan(x) \cdot 1$$

$$\sin(x) < x < \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Reducer og gange igennem med 2

$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

Divider med  $\sin(x)$

$$1 > \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x)$$

Anvend brøkregel

Denne udregning gælder for alle  $x$ . Lader vi nu  $x \rightarrow 0$ , så vil  $\cos(x) \rightarrow 1$ , fordi det er **en kontinuert funktion**, og da  $\frac{\sin(x)}{x}$  hele tiden er klemt inde mellem 1 og  $\cos(x)$ , vil også denne brøk gå mod 1.

Hvad er der galt? Der er tre problemer, vi har markeret med rødt.

**Det første** er at vi argumenterer ud fra, hvad vi kan se. Det er ofte en god start på at finde et præcist argument. Men hvis man fx vil argumentere for, at buens længde ligger mellem tallene  $\sin(x)$  og  $\tan(x)$ , og det eneste argument er, at det kan man se, så er det ikke godt nok.

**Det andet** er, at vi siger, vi kender cirkelns areal, og dermed arealet af et cirkeludsnit. Hvor kender vi cirkelns areal fra? Det kender vi fra integralregning. Beviset, som du kan finde på bogens [website](#) bygger

på formelen  $\frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$  når  $x \rightarrow 0$ ! Dvs. vi har bevist formelen, ved at tage udgangspunkt i den. Det kaldes et cirkelargument.

**Det tredje** er, at vi anvender  $\cos(x)$  er kontinuert. Hvor ved vi det fra? Igen er det noget vi "kan se", men nok ikke kan bevise.