ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse
EGMONT

Bevis for regnereglerne 1) og 2) i sætning 3

1)
Nulreglen: $f(a)$ er både undertal og overtal i intervallet $[a;a]$, så $f(a)\cdot(a-a)=0$ er både undersum og oversum. Altså er dette værdien af integralet.

Indskudsreglen:
Lad $\sum_{i=1}^{N} f(\theta_i)\cdot(x_{i+1}-x_i)=\sum_{i=1}^{N} f(\theta_i)\cdot\Delta x_i$ være en middelsum for $\int_a^c f(x)\,dx$, og
Lad $\sum_{i=1}^{M} f(\theta'_i)\cdot(x'_{i+1}-x'_i)=\sum_{i=1}^{M} f(\theta'_i)\cdot\Delta x'_i$ være en middelsum for $\int_c^b f(x)\,dx$
Slår vi de to inddelinger sammen til en inddeling af hele $[a;b]$:

$$a=x_0\le x_1\le x_2\le\ldots\le x_{N-1}\le x_N=c=x'_0\le x'_1\le x'_2\le\ldots\le x'_{M-1}\le x'_M=b$$

så vil $\sum_{i=1}^{N} f(\theta_i)\cdot\Delta x_i+\sum_{i=1}^{M} f(\theta'_i)\cdot\Delta x'_i$ være en middelsum for *f* i intervallet $[a;b]$.
Når vi lader inddelingerne af $[a;c]$ og $[c;b]$ blive stadigt finere, så intervallængderne går mod 0, så vil de to middelsummer konvergere mod henholdsvis $\int_a^c f(x)\,dx$ og $\int_c^b f(x)\,dx$, dvs summen vil konvergere mod $\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$.
Men for den samlede inddeling vil intervallængderne også gå mod 0. Og sætning 2 siger da, at enhver middelsum hørende til denne inddeling vil konvergere mod integralet $\int_a^b f(x)\,dx$
Da middelsummen konvergerer mod både $\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$ *og* $\int_a^b f(x)\,dx$ *er disse to udtryk ens, hvilket er indskudssætningen*.
2)
Reglen om konstantfaktor
Lad $a=x_0\le x_1\le x_2\le\ldots\le x_{N-1}\le x_N=b$ være en intervalinddeling med tilhørende middelsum:
$\sum_{i=1}^{N} f(\theta_i)\cdot(x_{i+1}-x_i)=\sum_{i=1}^{N} f(\theta_i)\cdot\Delta x_i$. Middelsummen konvergerer mod $\int_a^b f(x)\,dx$, når intervallængderne går mod 0.
Så vil $k\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} f(\theta_i)\cdot\Delta x_i\right)$ konvergere med $k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$, når intervallængderne går mod 0.
Ud fra parentesregler og regler om regning med funktioner gælder, at

$$k\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} f(\theta_i)\cdot\Delta x_i\right)=\sum_{i=1}^{N} k\cdot f(\theta_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{N}(k\cdot f)(\theta_i)\cdot\Delta x_i \quad (*)$$

Sidste led er en middelsum for funktionen $k\cdot f$. Derfor vil (igen ifølge sætning 2):
$\sum_{i=1}^{N}(k\cdot f)(\theta_i)\cdot\Delta x_i$ konvergere mod $\int_a^b(k\cdot f)(x)\,dx$ når intervallængderne går mod 0.
Men da de to middelsummer ifølge (*) er ens, må det, de konvergerer imod også være ens, dvs:

$$\int_a^b(k\cdot f)(x)\,dx=k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$