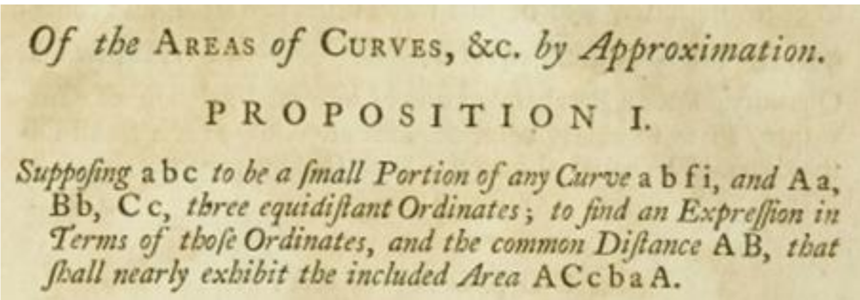
ISBN 9788770668781

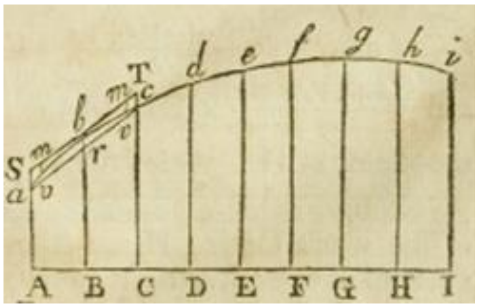
Projekt 7.17 Historisk: Simpsons formel

Simpson var søn af en selvlært væver, og skulle egentlig selv have været en væver, men en solformørkelse vakte hans interesse for matematik og naturvidenskab og mod alle odds lykkedes det ham at tilkæmpe sig en boglig uddannelse og siden hen blive udnævnt som professor i matematik. Selv om han ikke var den første til at anvende den nye integralregning til at finde rumfang blev hans metode hængende, så han i dag tilskrives æren for at have fundet den såkaldte Simpsons formel.
I 1743 udgav han *'Mathematical dissertations on a variety of physical and analytical subjects*' (blandede afhandlinger om emner fra fysik og matematik), hvor han bl.a. diskuterer den nu berømte tilnærmelsesformel for integraler:


Of the AREAS *of* CURVES, &c. *by Approximation.*

PROPOSITION I.

Suppoſing abc *to be a ſmall Portion of any Curve* abfi, *and* Aa, Bb, Cc, *three equidiſtant Ordinates; to find an Expreſſion in Terms of thoſe Ordinates, and the common Diſtance* AB, *that ſhall nearly exhibit the included Area* ACcbaA.

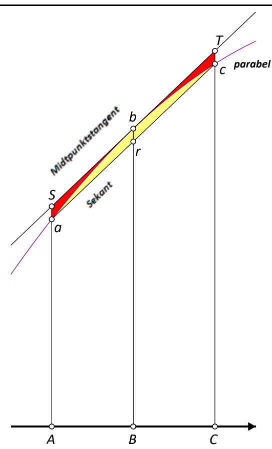


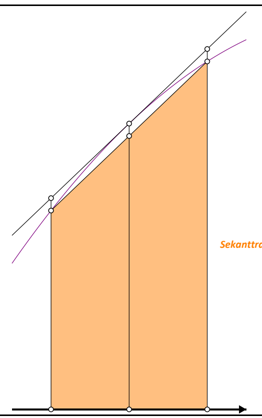
Simpsons ide er at approksimere grafen *abc* med et stykke af en parabel, der går gennem de samme tre punkter *a*, *b* og *c* og så finde arealet af denne approksimerende parabel udtrykt ved 'ordinaterne', dvs. *y*-værdierne for grafpunkterne.

Hans næste træk er elegant: Han betragter parallelogrammet udspændt af sekanten *ac*, der forbinder grafpunkterne hørende til endepunkterne *A* og *C* og midtpunktstangenten *ST* hørende til midtpunktet *B*. Han konstaterer derefter at området mellem midtpunktstangenten og parabelbuen (rødt) netop må udgøre 1/3 af parallelogrammet. Tilsvarende må området mellem parabelbuen og sekanten (gult)netop udgøre 2/3 af parallelogrammet.

Argumentet er at parablen opfører sig på samme måde som en pyramide, hvis rumfang netop udgør 1/3 højde × grundflade og det er den samme tredjedel!

I dag ser vi på *forskellen* mellem midtpunktstangenten (grafen for en lineær funktion) og parablen (grafen for et andengradspolynomium). I moderne forstand udgør denne forskel et andengradspolynomium, der er 0 på midten og har hældningen 0 på midten, dvs. det har en forskrift på formen $y = k \cdot x^2$, men Simpson appellerer selvfølgelig blot til standardviden om parabler. For at finde arealet skal vi integrere forskellen. Stamfunktionen er da givet ved $\frac{1}{3} \cdot k \cdot x^2$ og det er præcis herfra tredjedelen kommer.





ISBN 9788770668781

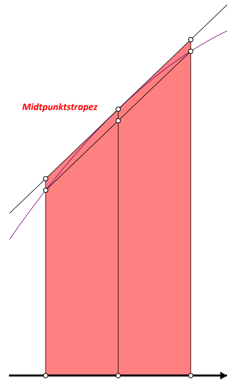
Simpson bemærker dernæst at arealet af trapezet frembragt af sekanten er for lille, mens arealet af trapezet frembragt af midtpunktstangenten er for stort, og at fejlen hørende til sekanten (dvs. det gule område = 2/3 parallelogram) netop er dobbelt så stor som fejlen hørende til midtpunktstangenten (dvs. det røde område = 1/3 parallelogram).

Altså kan vi finde det eksakte areal under parablen som et vægtet gennemsnit, hvor vi tildeler midtpunktstrapezet dobbelt så stor vægt som sekanttrapezet:

$$A_{simpson} = \tfrac{1}{3}\cdot\left(A_{sekant} + 2\cdot A_{midtpunkt}\right)$$

Indsættes arealformlen for et trapez, dvs. middelhøjde $\times$ grundlinje, fås derfor:

$$\begin{aligned} A_{simpson} &= \tfrac{2}{3}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\cdot(y_A + y_C)\cdot AC + 2\cdot y_B\cdot AC\right) \\ &= \tfrac{1}{6}\cdot(y_A + 4\cdot y_B + y_C)\cdot \Delta x \end{aligned}$$



Sætning 3: Simpsons formel
Hvis $f(x)$ er et polynomium af grad højst 2, så er integralet givet ved

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \tfrac{1}{6}\cdot\left(f(a) + 4\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)\cdot(b-a)$$

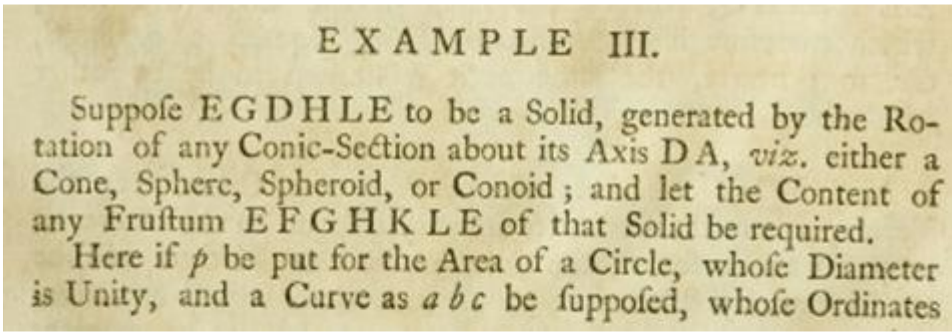
Dette er netop den formel Simpson blev berømt for! Læg mærke til at strukturen for det vægtede gennemsnit er præcist det samme som i Newtons prismatoidformel.

Simpsons formel kan nemt udvides til en opdeling af grundlinjen for et integral i n lige store delintervaller med tilhørende midtpunkter, hvor den fører til approksimationsformlen

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \approx \tfrac{1}{6}\cdot\left(f(x_0) + 4\cdot f(x_{\frac{1}{2}}) + 2\cdot f(x_1) + 4\cdot f(x_{\frac{3}{2}}) + \ldots + 2\cdot f(x_{n-\frac{1}{2}}) + f(x_n)\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$

Men pointen er altså også at hvis bare $f(x)$ er et polynomium af grad højst 2 følger det af Simpson sætning at ét interval med tilhørende midtpunkt er nok til at give den eksakte værdi af integralet!

Simpson fortsætter nu sin undersøgelse af sin sumformel med at kigge på rumfang for omdrejningslegemer, hvor han specielt interesserer sig for rumfanget af kegler, kugler, ellipsoider eller omdrejningslegemer for de øvrige keglesnit:

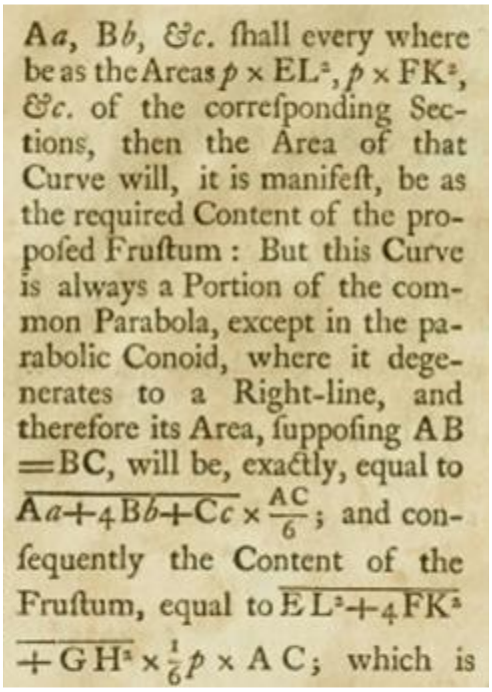


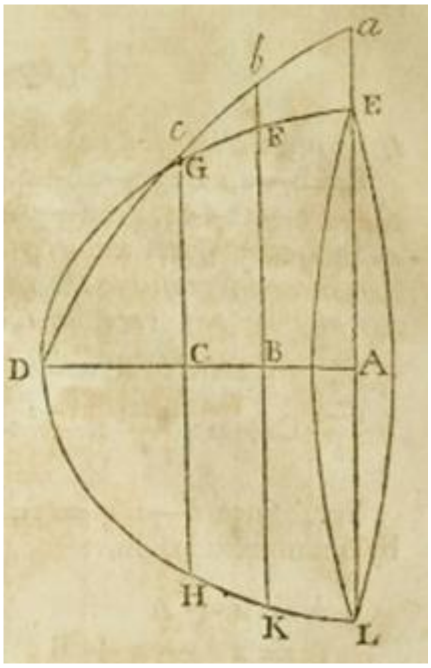
EXAMPLE III.

Suppoſe EGDHLE to be a Solid, generated by the Rotation of any Conic-Section about its Axis DA, *viz.* either a Cone, Sphere, Spheroid, or Conoid; and let the Content of any Fruſtum EFGHKLE of that Solid be required.

Here if p be put for the Area of a Circle, whoſe Diameter is Unity, and a Curve as abc be ſuppoſed, whoſe Ordinates

ISBN 9788770668781


A*a*, B*b*, &*c*. ſhall every where be as the Areas $p \times EL^2$, $p \times FK^2$, &*c*. of the correſponding Sections, then the Area of that Curve will, it is manifeſt, be as the required Content of the propoſed Fruſtum: But this Curve is always a Portion of the common Parabola, except in the parabolic Conoid, where it degenerates to a Right-line, and therefore its Area, ſuppoſing AB = BC, will be, exactly, equal to $\overline{Aa+4Bb+Cc} \times \frac{AC}{6}$; and conſequently the Content of the Fruſtum, equal to $\overline{EL^2+4FK^2+GH^2} \times \frac{1}{6}p \times AC$; which is



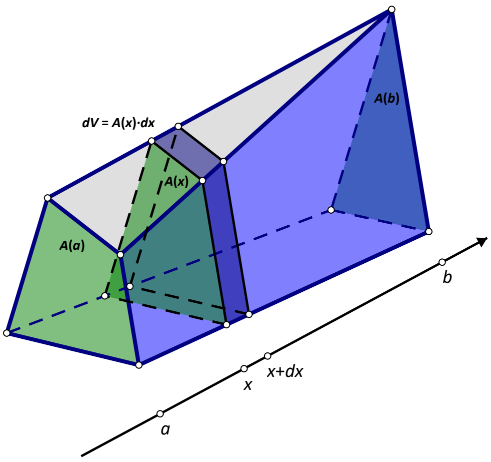
Først bemærker han at rumfanget af et legeme altid kan opskrives som et integral af tværsnitsarealet

$$V = \int_a^b A(x) \cdot dx$$

Dernæst bemærker han at tværsnitarealet for et omdrejningslegeme, hvor vi drejer grafen for *f*(*x*) omkring *x*-aksen, netop er det samme som arealet af en cirkel med radius *f*(*x*), dvs.

$$V = \int_a^b \pi \cdot f(x)^2 \cdot dx$$

hvorfor rumfanget af omdrejningslegemet er det samme som arealet under grafen for $\pi \cdot f(x)^2$.



Men hvis grafen for $f(x)$ er *en ret linje*, dvs. $f(x) = a \cdot x + b$, en *cirkel*, dvs. $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, en *ellipse*, dvs. $f(x) = b^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$, en *hyperbel* $f(x) = b^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}$ eller en *vandret parabel* $f(x) = \sqrt{a \cdot x + b}$, så er $\pi \cdot f(x)^2$ netop et andengradspolynomium og vi kan derfor anvende Simpsons sætning på kegler, kugler, ellipsoider, hyperboloider og paraboloider, hvor vi drejer keglesnittene om en akse. I alle tilfældene fås derfor

$$V = \tfrac{1}{6} \cdot \left(A_a + A_{midt} + A_b\right) \cdot L$$

hvor *L* er udstrækningen af legemet, dvs. keglestubben, kugleafsnittet, …

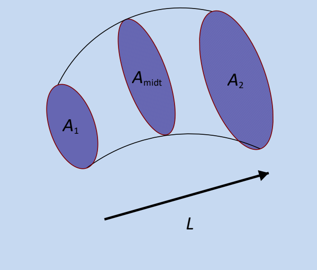
Det er præcis den samme formel som *Newtons prismatoidformel*, som vi har behandlet i projekt 2.15. Prismatoidformlen gælder altså for ethvert legeme, hvor tværsnitsarealet varierer som et polynomium af grad højst 2. Ja faktisk gælder Simpsons sætning også for tredjegradspolynomier, men det kan du læse mere om ***her***.

ISBN 9788770668781

Sætning 4: **Newton-Simpsons prismatoidformel**
Hvis tværsnitsarealet $A(x)$ af et legeme afgrænset af parallelle endeflader varierer som et polynomium af grad højst 3 som funktion af dybden x af snittet, så er rumfanget af legemet givet ved Newton-Simpsons formel:

$$V = \tfrac{1}{6} \cdot \left(A_1 + A_{midt} + A_2\right) \cdot L$$

hvor A_1 og A_2 er arealerne af endefladerne, A_{midt} er arealet af midtertværsnittet og L er dybden af legemet målt vinkelret på endefladerne.

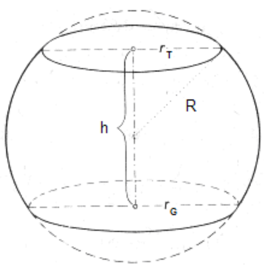


Øvelse 2
Slå op i *Projekt 2.18 Keplers bestemmelse af vintønders rumfang*, og find **Keplers tønderegel**. Gør rede for at denne formel er er et specialtilfælde af Newton-Simpsons formel

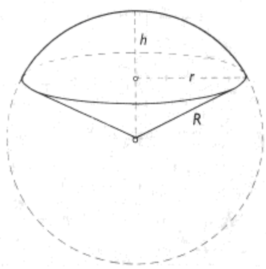
Øvelse 3
a) *Pyramiden*: Gør rede for at tværsnitsarealet for en *pyramide* varierer som kvadratet på dybden, hvorfor pyramiden opfylder forudsætningen i Newtons-Simpsons sætning. Gør også rede for at rumfanget af en pyramidestub følger af sætningen.

b) *Prismatoiden*: Vi lægger et 3d-koordinatsystem, så de parallelle endeflader er parallelle med *y*-*z*-planen og dybden måles langs x-aksen. Betragt et tværsnit af prismatoiden. Gør rede for at hjørnernes *y*,*z*-koordinater i tværsnitspolygonen er lineære funktioner af dybden *x*. Gør rede for at arealet af tværsnitsarealet må være et andengradspolynomium i *x*. (*Vink*: Find først en formel for arealet af en trekant udtrykt ved hjørnernes koordinater)

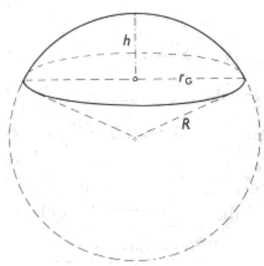
Øvelse 4
Gøre rede for at rumfangsformlerne for kuglezoner, kugleudsnit og kugleafsnit alle følger af prismatoidformlen. Den sidste formel blev benyttet i B-bogens kapitel 3 (polynomier), afsnit 2, Eksempel: Archimedes' undersøgelse af kugleafsnit, da den viser at rumfanget af et kugleafsnit som funktion af dybden *h* netop er et tredjegradspolynomium.



Kuglezone:
$V = \tfrac{1}{6} \cdot \pi \cdot \left(3r_G{}^2 + 3r_T{}^2 + h^2\right) \cdot h$



Kugleudsnit:
$V = \tfrac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$

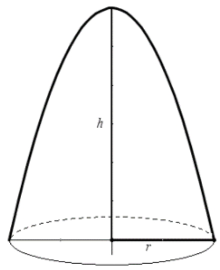


Kugleafsnit (kuglekalot):
$V = \tfrac{1}{6} \cdot \pi \cdot \left(3r_G{}^2 + h^2\right) \cdot h = \pi \cdot h^2 \cdot \left(R - \tfrac{1}{3} \cdot h\right)$

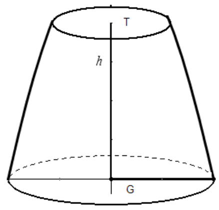
Øvelse 5
Gøre rede for at rumfangsformlerne for omdrejningsparaboloiden og paraboloidestubben begge følger af prismatoidformlen (og endda af den forenklede formel $V = \tfrac{1}{2} \cdot \left(A_1 + A_2\right) \cdot h$!)

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT



Omdrejningsparaboloide:
$V = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$



Paraboloidestub:
$V = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(r_G{}^2 + r_T{}^2\right) \cdot h$

Øvelse 6

I Hvad er matematik? 2, Opgavebogen, findes en opgave 2.72 om tønders rumfang:
Figuren viser en tønde, der har højden *h* og endefladediameter *d*, og hvis diameter på det bredeste sted er *D*. Tøndens rumfang *V* er bestemt ved: $V = \frac{\pi h}{15}\left(2D^2 + dD + \frac{3}{4}d^2\right)$.

a) Find tøndens rumfang ud fra Keplers tønderegel.

b) Antag at tønden er frembragt ved at dreje en ellipse omkring dens storeakse. Find konstanterne *a* og *b* i forskriften for ellipsen:

$f(x) = b^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$, udtrykt ved *d*, *D* og *h*.

c) Gør rede for at tønden frembragt ved at dreje en ellipsoide opfylder forudsætningen i Newton-Simpsons sætning og find den tilhørende rumfangsformel for en ellipsetønde.

d) Antag i stedet at tønden er frembragt ved at dreje en parabel omkring en linje vinkelret på dens akse. Find konstanterne *a* og *c* i forskriften for parablen $g(x) = c - a \cdot x^2$ udtrykt ved *d*, *D* og *h*.

e) Gør rede for at den frembragte tønde *ikke* opfylder forudsætningen i Newton-Simpsons sætning. Benyt i stedet integralformlen $V = \int_a^b A(x) \cdot dx$, hvor $A(x)$ er tværsnitsarealet, til at finde den tilhørende rumfangsformlen for en parabeltønde.

f) Udtryk tøndens rumfang på formen $V_{tønde} = V_{\text{indskreven cylinder}} \cdot p(x)$, hvor *x* er forholdet mellem diamenteren i bugen og diameteren i enden, dvs. $x = \frac{D}{d}$. Bestem herved polynomiet $p(x)$ hørende til såvel ellipsetønden og parabeltønden. Sammenlign de to polynomier.