Hvad er matematik? 3
ISBN 9788770668781

website: link fra kapitel 6, afsnit 3.1

L&R Uddannelse
EGMONT

Hvorfor en hængebros bærekabel tegner en parabel.

Situationen: Vi betragter en hængebro, hvor brobanen er hængt op i det bærende kabel, og hvor vi antager at kablets vægt er ubetydelig i forhold til brobanens vægt. Vi antager endvidere, at brobanen har samme tykkelse hele vejen, og er konstrueret af et ensartet materiale, således at vægten af et stykke af brobanen er proportional med længden af stykket. Vi betragter kablet og brobanerne som ét stift system.

Kablet er lagt ind i et koordinatsystem, hvor 1. aksen fx følger vandoverfladen og 2. aksen peger opad og følger parablens symmetriakse. Kablet kan således betragtes som graf for en funktion $f(x)$. Grafen / Kablet består af små (infinitesimale) kabelstykker. Vi betragter et af disse, stykket fra $(x_0, f(x_0))$ til $(x, f(x))$. Dette kabelstykke er bundet sammen med brobanen mellem x_0 og x til ét system og vi vil nu se på, hvilke kræfter der virker på dette lille system

1. Tyngden er proportional med massen af det legeme, tyngden virker på, dvs i dette tilfælde er tyngden altså proportional med vægten af brobanen. Da brobanens vægt er proportional med dens længde, er tyngden altså proportional med længden af det stykke af brobanen, vi betragter. Længden af dette er $x - x_0$.
Kaldes tyngdekrafen på stykket fra x til x_o for F_T må der derfor findes en konstant *k*, så:

$$F_T = k \cdot (x - x_0)$$

2. Der er et træk fra kablet i hver ende af stykket. Den kraft der trækkes med, kaldes *snorkraften*. Snorkraften har samme retning som tangenten til den kurve kablet danner. Lad os først se på snorkraften S_H på det det højre punkt $(x, f(x))$. Tangentens hældning i punktet $(x, f(x))$ er $f'(x)$. Snorkraftens retning kan vi angive ved at tegne en retvinklet trekant med 1 ud af x-aksen, og $f'(x)$ lodret op af y-aksen.
Trekantens hypotenuse forlænges, så stykket svarer til snorkraftens størrelse, S_H. Vi tegner nu den retvinklede trekant færdig, der har snorkraften som hypotenuse, hvilket svarer til at opløse snorkraften i en vandret del, $S_{H,v}$, og en lodret del $S_{H,\mathrm{l}}$. Hvis kræfterne er repræsenteret som vektorer, gælder der altså:

$$\overrightarrow{S_H} = \overrightarrow{S_{H,\mathrm{v}}} + \overrightarrow{S_{H.l}}$$

Vi ser på længderne, så vi regner numerisk:
De to trekanter er ensvinklede. Derfor gælder:

$$\frac{S_{H,l}}{S_{H,v}} = \frac{f'(x)}{1} ,\qquad \text{eller:}$$

$$S_{H,l} = S_{H,v} \cdot f'(x)$$

3. Ved på samme måde at betragte den snorkraft, der virker i den anden ende af det lille kabelstykke får vi:

$$S_{V,l} = S_{V,v} \cdot f'(x_0)$$

4. Den samlede vandrette kraft, der virker på det lille udsnit af broen, fås ved sammensætning af $S_{H,v}$ og $S_{V,v}$. Da broen hænger stille må disse to gensidigt ophæve hinanden. Dvs. de er numerisk lige store:

$$S_{H,v} = S_{V,v}$$

5. Den vandrette del af snorkraften må overalt være af samme størrelse. For var der et sted, hvor den ændrede størrelse, ville vi på dette sted <u>ikke</u> have den situation, vi behandlede i punkt 4, nemlig at de

ISBN 9788770668781

vandrette dele af snorkræfterne er lige store og modsat rettede. Men argumentet i punkt 4 gjaldt jo i ethvert punkt. Derfor må de vandrette dele overalt være numerisk lige store.
Denne størrelse kan vi derfor betegne med en konstant *S*.

6. Indsættes *S* i formlerne fra punkt 2 og 3 får vi:

$$S_{H,l} = S \cdot f'(x)$$

$$S_{V,l} = S \cdot f'(x_0)$$

På den del af broen, vi betragter, peger S_H opad, dvs. $S_{H,l}$ er positiv. S_V peger nedad, dvs. $S_{V,l}$ er negativ. Havde vi betragtet den venstre halvdel af broen, havde det været omvendt.
Den samlede kraft på dette brostykke er sammensat af tyngdekraften F_T og de to lodrette bidrag fra kræfterne S_H og S_V.
F_T peger nedad ligesom $S_{V,l}$. Da broen hænger stille, må disse to tilsammen være lig den kraft, der virker opad:

$$F_T + S_{V,l} = S_{H,l}$$

Indsæt heri formlerne ovenfor samt formlen for tyngdekraften F_T fra 1):

$$k \cdot (x - x_0) + S \cdot f'(x_0) = S \cdot f'(x)$$

7. Nu omskriver vi lidt på det sidste udtryk:

$$k \cdot (x - x_0) + S \cdot f'(x_0) = S \cdot f'(x)$$ Saml leddene med f' på højre side:

$$k \cdot (x - x_0) = S \cdot f'(x) - S \cdot f'(x_0)$$ Sæt S uden for parentes:

$$k \cdot (x - x_0) = S \cdot (f'(x) - f'(x_0))$$ Divider med $(x - x_0)$:

$$k = S \cdot \frac{(f'(x) - f'(x_0))}{(x - x_0)}$$ Divider med S, og roker rundt

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{k}{S}$$ Indfør betegnelsen: $a = \frac{k}{S}$

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = a$$

8. Hvis vi for et øjeblik kalder f' for g, så kan det sidste udtryk skrives:

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = a$$

Dette genkender vi som differenskvotienten, vi opskriver, når vi undersøger om en funktion $g(x)$ er differentiabel i x_0. Hvis brøken har en grænseværdi, for $x \to x_0$, er $g(x)$ differentiabel i x_0.
Men brøken er jo konstant, så den flytter sig ikke, men vedbliver at være *a* under grænseovergangen. Med andre ord:

$g(x)$ er differentiabel i x_0 med differentialkvotienten $g'(x_0) = a$.

Dette gælder for et vilkårligt x_0. Så $g'(x) = a$ for alle x

9. Bestem nu $g(x)$ som en løsning til differentialligningen:

$$g'(x) = a$$

idet du først opskriver den fuldstændige løsning.
Hvilken begyndelsesbetingelse kan vi anvende for at finde den søgte partikulære løsning?

ISBN 9788770668781

(*Hint:* Tænk på at du selv bestemmer, hvor koordinatsystemet er placeret, og at dit valg giver dig en bestemt værdi af $g(x)$ - husk nemlig, at $g(x)=f'(x)$)

10. Nu har vi et udtryk for $g(x)$. Indsæt nu den fundne $f'(x)$ i stedet for $g(x)$, så har du en ny differentialligning på formen:

$$f'(x)=\text{lineært udtryk i } x$$

Løs denne differentialligning ved at bestemme $f(x)$ som en stamfunktion til højre side.
Opskriv først den fuldstændige løsning.
Hvilken begyndelsesbetingelse kan vi anvende for at finde den søgte partikulære løsning?
(*Hint:* Tænk på at du selv har bestemt, hvor koordinatsystemet er placeret, og at dit valg giver dig en bestemt værdi af $f(x)$).

11. Du skulle nu være nået frem til, at

$$f(x)=\text{andengradspolynomium i } x$$

Grafen for $f(x)$ er den kurve, som det bærende kabel tegner. Dermed harv vi set, at denne kurve er graf for et 2.grads-polynomium, altså at kurven er en parabel.