ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse
EGMONT

Løsning til kapitel 6, øvelse 6.5

Vi antager de to funktioner *v* og *z* begge er løsninger til den homogene 2. ordens differentialligning:

$$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0 \qquad (*)$$

Dvs. vi ved:

$$a \cdot v'' + b \cdot v' + c \cdot v = 0 \qquad (**)$$
$$a \cdot z'' + b \cdot z' + c \cdot z = 0 \qquad (***)$$

Vi har givet to konstanter c_1 og c_2, og betragter den nye funktion, *w* der er fremkommet som en linearkombination af *v* og *z*:

$$w = c_1 \cdot v + c_2 \cdot z$$

Vi undersøger nu om *w* er en løsning til (*) ved at indsætte og gøre prøve

$a \cdot w'' + b \cdot w' + c \cdot w = 0$	Indsæt *w*
$a \cdot \left(c_1 \cdot v + c_2 \cdot z\right)'' + b \cdot \left(c_1 \cdot v + c_2 \cdot z\right)' + c \cdot \left(c_1 \cdot v + c_2 \cdot z\right) = 0$	Indsæt udtrykket for *w*
$a \cdot \left(c_1 \cdot v'' + c_2 \cdot z''\right) + b \cdot \left(c_1 \cdot v' + c_2 \cdot z'\right) + c \cdot \left(c_1 \cdot v + c_2 \cdot z\right) = 0$	Anvend regneregler for differentiation
$a \cdot c_1 \cdot v'' + a \cdot c_2 \cdot z'' + b \cdot c_1 \cdot v' + b \cdot c_2 \cdot z' + c \cdot c_1 \cdot v + c \cdot c_2 \cdot z = 0$	Anvend parentesregel
$a \cdot c_1 \cdot v'' + b \cdot c_1 \cdot v' + c \cdot c_1 \cdot v + a \cdot c_2 \cdot z'' + b \cdot c_2 \cdot z' + c \cdot c_2 \cdot z = 0$	Roker rundt så *v*- og *z*-leddene samles
$\left(a \cdot c_1 \cdot v'' + b \cdot c_1 \cdot v' + c \cdot c_1 \cdot v\right) + \left(a \cdot c_2 \cdot z'' + b \cdot c_2 \cdot z' + c \cdot c_2 \cdot z\right) = 0$	Sæt +-parenteser
$c_1 \cdot \left(a \cdot v'' + b \cdot v' + c \cdot v\right) + c_2 \cdot \left(a \cdot z'' + b \cdot z' + c \cdot z\right) = 0$	Sæt c_1 og c_2 uden for parentes
$c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$	Udnyt (**) og (***)
$0 = 0$	

Da den sidste identitet er trivielt sand er funktionen $w = c_1 \cdot v + c_2 \cdot z$ altså en løsning til (*).

Konklusion: Enhver linearkombination af løsninger er selv en løsning.

I videregående matematik udtrykker man dette ved at sige, at løsningsrummet til en lineær 2. ordens differentialligning er et *vektorrum*, idet funktioner her betragtes som vektorer. Ved at generalisere til dette vektorsprog viser det sig, at man kan trække på hele teorien for vektorer og vektorrum, det som også kaldes *lineær algebra.*
Beskrevet i denne verden vil hovedresultatet i dette kapitel, nemlig sætning 3 kunne udtrykkes ved at sige, at løsningsrummet til den lineære 2. ordens differentialligning (med konstante koefficienter) er et todiumensionelt vektorrum.