**ISBN 9788770668781**


# Projekt 6.3. Romeo og Julie - et projekt om koblede differentialligninger

Modeller med flere tilstandsvariable med et indbyrdes afhængighedsforhold kan ofte beskrives ved en række sammenhørende differentialligninger. Et system af fx to koblede differentialligninger vil således have to ubekendte, og problemet er her det samme som med almindelige ligninger: Vi kan ikke løse dem en af gangen, fordi der er et indbyrdes afhængighedsforhold. I lærebogssystemet findes en række af sådanne systemer fx:

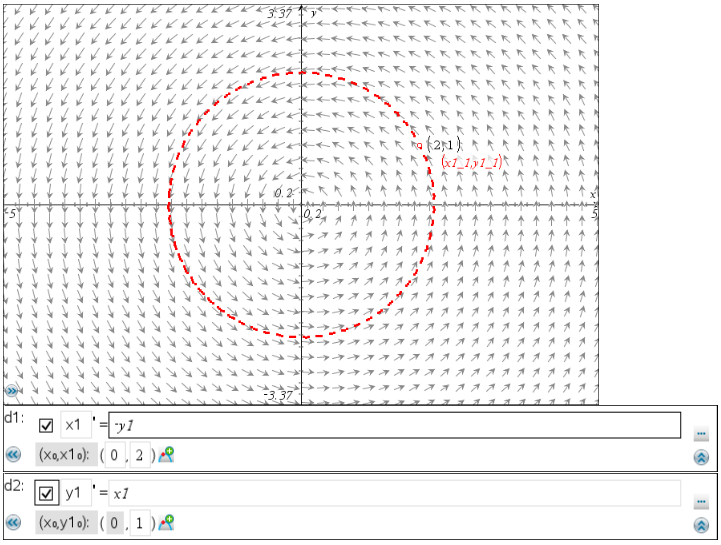
Epidemimofdeller
Forløbet af en influenzaepidemi,
Udviklingen i bestanden af rovdyr og byttedyr
Forløbet af store søslag, som slaget ved Trafalgar mellem England og Frankrig under Napoleonskrigene,
Panserslaget ved Kurskbuen mellem Tyskland og Sovjetunionen under 2. verdenskrig.

Vi vil her illustrere nogle af de grundlæggende ideer og metoder i teorien for koblede differentialligninger gennem en kendt kærlighedshistorie.

Vi starter i den rene matematik. Vi vil løse et system af de to sammenhørende differentialligninger

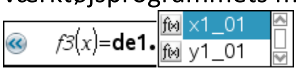
$$\frac{dx}{dt} = -y \qquad \text{og} \qquad \frac{dy}{dt} = x$$

idet vi vil tegner den løsningskurve, der går gennem punktet (2,1).
Her skifter vi hældningsfeltet ud med et retningsfelt, således at vi kan følge løsningskurvens retning med pilene.

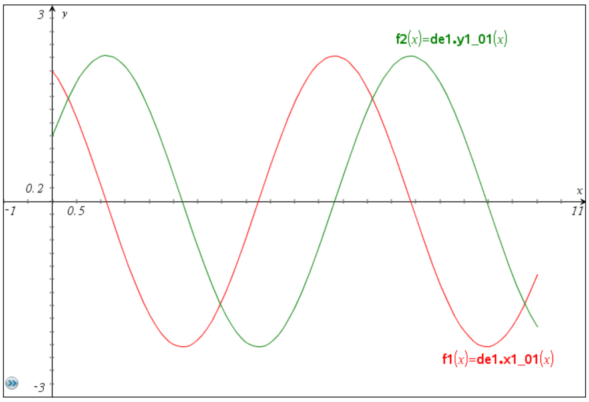



Bemærk, at højresiden i de to ligninger ikke indeholder tidsparameteren *t*, hvilket er en forudsætningen for at det giver mening at tegne retningsfeltet og faseplottet, dvs. løsningskurven til det koblede system, hvor vi plotter *y* som funktion af *x*.

Vi kan også plotte løsningskurven til hver af de to differentialligninger, som jo afhænger af tiden, idet vi udnytter værktøjsprogrammets muligheder til at få kaldt løsningskurverne frem som funktioner af *t* .



**ISBN 9788770668781**


Hvis vi vil undersøge løsningen nøjere kan vi oversætte systemet af de to koblede differentialligninger til en førsteordens differentialligning ved at foretage omskrivningen:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{x}{-y}=-\frac{x}{y}$$

Denne ligning kan vi så løse med begyndelsesbetingelsen $(2,1)$:

$$\boxed{\text{deSolve}\left(y'=\frac{-x}{y} \text{ and } y(2)=1,x,y\right) \blacktriangleright y^2=5-x^2}$$

Vi ser, at løsningen fremkommer på implicit form, dvs. at udtrykket indeholder de to variable, og det er ikke omskrevet så *y* fremkommer som en funktion af x. Løsningskurven er nemlig en cirkel med centrum i (0,0) og radius $\sqrt{5}$).

**Eksempel: Romeo og Julie – et studie i ulykkelig kærlighed (koblede differetnialligninger)**

**Første akt:** *De elskende plages af en manglende tilpasning af deres gensidige følelser overfor hinanden.*
Romeo (kølig): "Min kærlighed til Julie falder i takt med hendes følelser for mig!"
Juliet (varmblodet): "Min kærlighed til Romeo vokser i takt med hans følelser for mig!"

Vi lader *R* repræsentere Romeo's følelser for Julie og *J* repræsentere Julies følelser for Romeo. Tiden måles i dage (0-60), og deres følelser måles på en skala fra -5 til 5, hvor 0 er ligegyldighed:

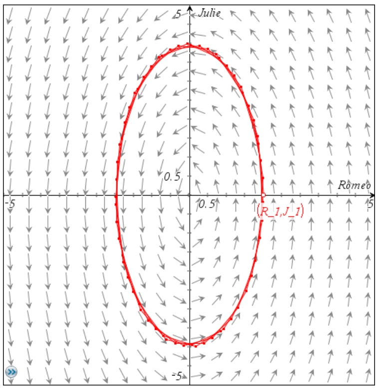
| Følelse | Hysterisk had | Begyndende afsky | Ligegyldighed | Spirende forelskelse | Ekstatisk kærlighed |
|---|---|---|---|---|---|
| Værdi | -5 | -2.5 | 0 | 2.5 | 5 |

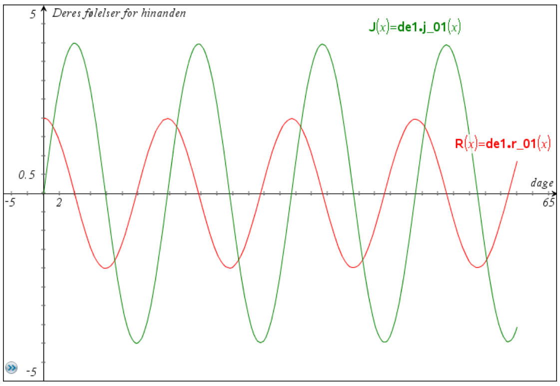
Ligningerne til modellen for deres kærlighedsaffære ser således ud

$$\frac{dR}{dt}=-0{,}2\cdot J \qquad \text{og} \qquad \frac{dJ}{dt}=0{,}8\cdot R$$

Vi antager nu, at Romeo ser Julie for første gang til tidspunktet $t=0$, og at han straks bliver tiltrukket af hende, dvs. $R(0)=2$. Julie derimod er naturligvis i første omgang ligeglad, dvs. $J(0)=0$, men situationen er selvfølgelig ustabil!

**ISBN 9788770668781**

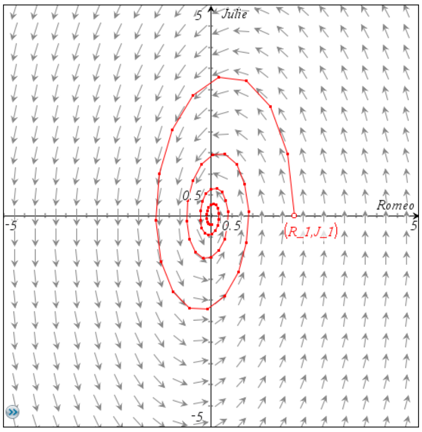


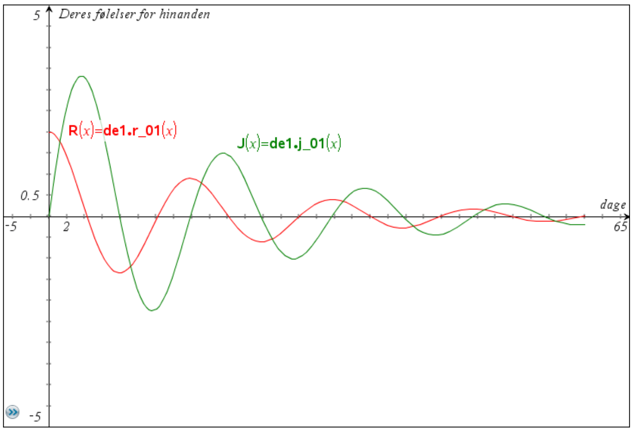

Vi ser, at Julie oplever langt større følelsesmæssige udsving end Romeo – og tilmed er de ude af fase!
Julie begynder at blive svimmel på grund af sine følelsesmæssige rutsjeture og beslutter sig for at søge hjælp fra en psykolog.

**Anden akt:** *Julie er dybt påvirket af hendes kærlighedsaffære, hun distraheres nemt, begynder at ligge søvnløs om natten, og hun glemmer alt om sine lektier. psykologen foreslår derfor, at hun tager noget beroligende, der dæmper hendes følelsesmæssige reaktioner.*

Den beroligende effekt inddrages i modellen ved at tilføje et nyt led i differentialligningen for Julies følelser for Romeo, nemlig $-0{,}1 \cdot J$ .
Startværdierne og ligningen for Romeo's følelser antages at være de samme. De nye ligninger ser derfor således ud

$$\frac{dR}{dt} = -0{,}2 \cdot J \quad \text{og} \quad \frac{dJ}{dt} = 0{,}8 \cdot R - 0{,}1 \cdot J$$






Vi ser, at deberoligende midler har en dæmpende virkning på hele kærlighedsaffæren. Både Romeo og Julie er rystet over deres forsvindende forhold. De beslutter sig derfor for at søge en anden rådgivning.

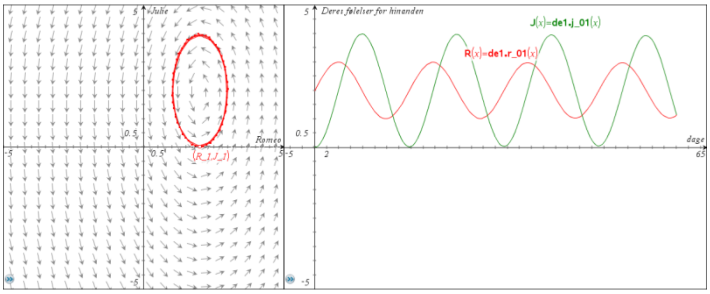
**Tredje akt:** *Julie stopper med de beroligende midler og sammen går hun og Romeo i parterapi. De bliver begge sendt til behandling for at lære at ændre deres reaktionsmønstre overfor hinanden.*

Romeo lærer at acceptere Julies kærlighed, og nu begynder hans følelser derfor først at falde, hvis hun bliver alt for kærlig, dvs. hvis $J > 2$ .
Julie lærer tilsvarende at styre sine reaktioner, så hendes kærlighed nu kun vokser når Romeo bliver meget kærlig, dvs. hvis $R > 2$ .
Modellen kan derfor nu beskrives således

$$\frac{dR}{dt} = -0{,}2 \cdot (J-2) \quad \text{og} \quad \frac{dJ}{dt} = 0{,}8 \cdot (R-2)$$

**ISBN 9788770668781**






Har de nu endelig fundet lykken? Der er selvfølgelig mange muligheder for variationer!

Tilsvarende er der mulighed for at omskrive differentialligningssystemerne i de tre akter til førsteordens differentialligninger i R og J, henholdsvis anden ordens differentialligninger i t og R eller t og J. Det giver mulighed for at undersøge de analytiske løsninger for kærlighedsdramaet.