ISBN 9788770668781

Projekt 6.8. Rygtespredning – en introduktion til modellering med differentialligninger

Modeller med flere tilstandsvariable med et indbyrdes afhængighedsforhold kan ofte beskrives ved en række sammenhørende differentialligninger. Et system af fx to eller flere koblede differentialligninger vil således have to eller flere ubekendte, og problemet er her det samme som med almindelige ligninger: Vi kan ikke løse dem en af gangen, fordi der er et indbyrdes afhængighedsforhold. Der findes i *Hvad er matematik?* en række projekter ned sådanne problemstillinger, feks: forløbet af en influenzaepidemi, udviklingen i bestanden af rovdyr og byttedyr eller forløbet af store søslag, som slaget ved Trafalgar mellem England og Frankrig under Napoleonskrigene, eller store landslag, som panserslaget ved Kurskbuen mellem Tyskland og Sovjetunionen under 2. verdenskrig.

Vi vil her illustrere nogle af de grundlæggende ideer og metoder i teorien for koblede differentialligninger gennem en historie om udbredelse af rygter.

En fremmed kommer til en by med 10000 indbyggere og sætter et rygte i gang. Hvordan vil rygtet spredes?
På ethvert tidspunkt under rygtespredningen vil der være tre slags personer tilstede i byen:

Ignoranterne: Dem, som endnu ikke har hørt rygtet
Sprederne: Dem, som har hørt rygtet og fortæller det videre til alle
Uinteresserede: Dem, som er tidligere spredere, men nu har mistet interessen i at sprede rygtet

Vi antager, at så snart en spreder videregiver rygtet til en, der allerede har hørt rygtet, bliver vedkommende uinteresseret i at sprede rygtet.
Vi antager også, at møder mellem alle tre persontyper finder sted helt tilfældigt.

Vi betegner nu antallet af ignoranter med i, antallet af spredere med s og antallet af uinteresserede med u.
Værdierne for de tre variable i, s og u sker ved et møde mellem en spreder og en anden person:

1. En spreder møder en ignorant og videregiver rygtet:
   Totalt kan der arrangeres $i \cdot s$ møder mellem en spreder og en ignorant.
   Hvis rygtet videregives ved et møde, vil der være en ignorant mindre og en spreder mere, dvs. udviklingen i antallet af ignoranter og antallet af spredere kan illustreres sådan:
   $i \to i-1$ og $s \to s+1$

2. En spreder møder en spreder og prøver at videregive rygtet:
   Her skal mødet altså stå mellem to indenfor samme gruppe. Men på hvor mange måder kan 2 ud af en gruppe på s medlemmer mødes? Hver af medlemmerne kan mødes med $s-1$ andre medlemmer, dvs. der så vil være $s \cdot (s-1)$ møder, men da de ikke skal mødes med den samme to gange, så vil der kun være halvt så mange møder. Dvs. der totalt kan arrangeres $\frac{1}{2} \cdot s \cdot (s-1)$ møder mellem to spredere.
   Hvis rygtet forsøges videregivet ved et møde, vil der være to spredere mindre og to uinteresserede mere, dvs. udviklingen i antallet af spredere og uinteresserede (en spreder, der allerede har hørt rygtet bliver jo uinteresseret) kan illustreres sådan:
   $s \to s-2$ og $u \to u+2$

3. En spreder møder en uinteresseret og prøver at videregive rygtet:
   Totalt kan der arrangeres $u \cdot s$ møder mellem en spreder og en uinteresseret.
   Hvis rygtet forsøges videregivet ved et møde, vil der være en spreder mindre og en uinteresseret mere, dvs. udviklingen i antallet af spredere og antallet af uinteresserede kan illustreres sådan:
   $s \to s-1$ og $u \to u+1$

Rygtet kan kun spredes når en spreder møder en ignorant. Det vil derfor være rimeligt at antage, at den hastighed, hvormed rygtet spredes, dvs. den hastighed hvormed antallet af ignoranter ændrer sig $i'(t)=\frac{di}{dt}$, vil være proportional med antallet af møder mellem spredere og ignoranter, som jo var $i\cdot s$, dvs.

$$\frac{di}{dt}=-k\cdot i\cdot s$$

hvor $k>0$ er en konstant, og minusset fremkommer ved at antallet af ignoranter jo må aftage. Ser vi derfor modsat på udviklingen i antallet af spredere, som i denne sammenhæng jo vil vokse, så vil den hastighed hvormed antallet af spredere ændrer sig kunne beskrives ved: $k\cdot i\cdot s$

Tilsvarende kan vi med rimelighed antage, at den hastighed, hvormed antallet af uinteresserede ændrer sig $u'(t)=\frac{du}{dt}$, vil være proportional med antallet af møder mellem spredere og uinteresserede, som jo var $u\cdot s$, dvs.

$$\frac{du}{dt}=k\cdot u\cdot s$$

hvor $k>0$ er en konstant, idet antallet af uinteresserede jo må vokse, fordi en spreder "omdannes" til en uinteresseret. Ser vi også her modsat på udviklingen i antallet af spredere, som i denne sammenhæng vil aftage, så vil den hastighed hvormed antallet af spredere ændrer sig kunne beskrives ved: $-k\cdot u\cdot s$.

Bemærk, at vi her vælger den samme proportionalitetskonstant for at gøre modellen simpel.

Endelig kan antallet spreder jo også ændre sig ved mødet mellem to spredere, og herved falder antallet af spredere jo med 2, fordi de begge "omdannes" til uinteresserede. Vi antager tilsvarende, at den hastighed, hvormed antallet af spredere ændrer sig i denne sammenhæng, er proportional med antallet af møder mellem spredere. Vi så før at antallet af møder mellem to spredere er $\frac{1}{2}\cdot s\cdot(s-1)$, men da antallet af spredere ved hvert møde jo falder med to, så vil ændringen i antallet af spredere i denne sammenhæng kunne beskrives ved $-k\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot s\cdot(s-1)=k\cdot s\cdot(s-1)$.
Alt i alt får vi så, at den hastighed, hvormed det totale antal spredere udvikler sig, kan beskrives ved differentialligningen

$$\frac{ds}{dt}=k\cdot i\cdot s-k\cdot s\cdot(s-1)-k\cdot s\cdot u$$

Vi ved fra start, at $i+s+u=10001$, fordi der ankommer en fremme til byen med 10000 indbyggere.
Derfor er må der gælde, at

$$u=10001-i-s$$

og dette kan vi udnytte til at eliminere en af de variable i udtrykket ovenfor

$$\frac{ds}{dt}=k\cdot i\cdot s-k\cdot s\cdot(s-1)-k\cdot s\cdot(10001-i-s)$$

$$\frac{ds}{dt}=k\cdot i\cdot s-k\cdot s\cdot(s-1)-10001\cdot k\cdot s+i\cdot k\cdot s+s\cdot k\cdot s$$

$$\frac{ds}{dt}=2\cdot k\cdot i\cdot s-k\cdot s\cdot(s-1)-10001\cdot k\cdot s+s\cdot k\cdot s$$

$$\frac{ds}{dt}=2\cdot k\cdot i\cdot s-k\cdot s^2+k\cdot s-10001\cdot k\cdot s+k\cdot s^2$$

$$\frac{ds}{dt}=2\cdot k\cdot i\cdot s-10000\cdot k\cdot s$$

$$\frac{ds}{dt}=k\cdot(2\cdot i\cdot s-10000\cdot s)$$

Således kan rygtespredningen beskrives ved følgende model bestående af to koblede differentialligninger

$$\begin{cases}\dfrac{di}{dt}=-k\cdot i\cdot s\\[2mm]\dfrac{ds}{dt}=k\cdot(2\cdot i\cdot s-10000\cdot s)\end{cases}$$

Fra start er der 10000 ignoranter, svarende til at ingen i byen kender rygtet, før den fremmede ankommer, dvs. den fremmede er den eneste spreder, der er fra start! Dvs. til tidspunktet $t=0$ er $i_0=i(0)=10000$ og $s_0=s(0)=1$. Hvis vi antager, at der i løbet af den første dag "omdannes" 10 ignoranter til spredere, så kan vi bestemme proportionalitetskonstanten der ud fra. Den hastighed, hvormed antallet af ignoranter udvikler sig er jo beskrevet ved $\frac{di}{dt}=-k\cdot i\cdot s$, og da vi antog, at antallet af ignoranter falder med 10 den første dag, kan vi bestemme *k* ved at løse ligningen:

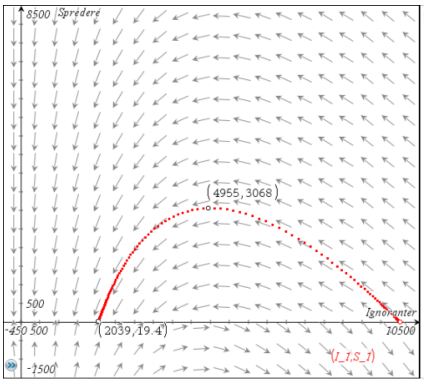
$$-k\cdot i_0\cdot s_0=-10$$

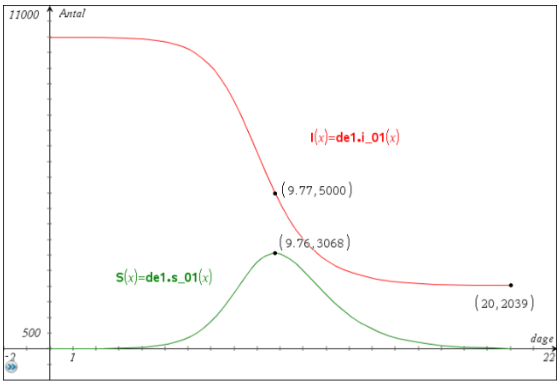
$$-k\cdot 10000\cdot 1=-10$$

$$k=\frac{10}{10000}=0{,}0001$$

Løser vi nu de to koblede differentialligninger numerisk med $k=0{,}0001$, så får vi:

$$\begin{cases}\dfrac{di}{dt}=-k\cdot i\cdot s\\[2mm]\dfrac{ds}{dt}=k\cdot(2\cdot i\cdot s-10000\cdot s)\end{cases}$$





Løsningskurven til det koblede system, hvor vi plotter antal spredere som funktion af antal ignoranter, viser, hvordan vi fra nederste venstre hjørne bevæger os op mod et toppunkt for antallet af spredere, hvorefter rygtespredningen dør ud omkring de 20000 ignoranter. Når vi plotter løsningskurven svarende til antal spredere som funktion af tiden, så ser vi at antallet af spredere topper efter ca. 10 dage, hvor der er ca. 3000 spredere i følge modellen. Ser vi på antal ignoranter som funktion af tiden, så viser det sig, at ca. 2000 personer aldrig hører rygtet, fordi grafen har et asymptotisk forløb ned mod 2000. Bemærk også, at antallet af spredere topper, omtrent samtidigt med at antallet af ignoranter halveres. Dette følger også af modellen, idet vi omskriver de koblede differentialligninger til en differentialligning:

$$\frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{di}{dt}}=\frac{k\cdot(2\cdot i\cdot s-10000\cdot s)}{-k\cdot i\cdot s}$$

$$\frac{ds}{di}=\frac{2\cdot i-10000}{-i}$$

$$\frac{ds}{di}=-2+10000\cdot\frac{1}{i}$$

og sætter $\frac{ds}{di}=0$, fordi det er maksimum for antal af spredere som funktion af antal ignoranter vi er interesserede i:

ISBN 9788770668781

$$-2+10000\cdot\frac{1}{i}=0$$
$$10000\cdot\frac{1}{i}=2$$
$$10000=2\cdot i$$
$$\frac{10000}{2}=i$$
$$5000=i$$

altså finder vi det maksimale antal spredere, når antallet af ignoranter er 5000.

Ændrer man på værdien af k, så ændres faseplottet ikke, men hvis man ser på det tidslige forløb af rygtespredningen, så vil denne ændre sig – det kan man også forklare ud fra de koblede differentialligninger.