Projekt 6.5 Løsning af inhomogene anden ordens differentialligning

1. løsningsmetode: Gættemetoden

Indtil nu har vi begrænset vores undersøgelser til de homogene differentialligninger, dvs. ligninger hvor *y*-funktionen indgår i alle led forskellige fra nul. Inhomogene ligninger af typen

$$y''+by'+cy=f(t) \qquad (1)$$

er i praksis lidt sværere at løse end de homogene. Den første metode, vi vil se på, kan virke lidt obskur, for denne teknik til løsningen af inhomogene ligninger indeholder en god portion »gætteri«. Metoden foretrækkes ofte af den enkle grund, at en udregning af en løsningsformel til differentialligningen kan være ret besværlig, hvilket vil fremgå ved gennemgangen af 2. metode.

Når vi taler om at »gætte« er der selvfølgelig ikke tale om vilde gæt, men kvalificerede gæt, som umiddelbart afprøves.

Men hvordan kan vi være sikre på at finde alle løsninger, når vi bare gætter? Kunne der ikke være flere, som vi bare overser?

Metodens anvendelighed bygger på følgende iagttagelser:

Øvelse 1

a) Vis, at hvis y og z er løsninger til den inhomogene ligning (1), så er funktionen $y - z$ en løsning til den tilsvarende homogene ligning (1).
b) Vis, at hvis $h(t)$ er en løsning til den inhomogene ligning (1), og y er en løsning til den tilsvarende homogene ligning, så er funktionen $y + h(t)$ også en løsning til den inhomogene.
c) Sammenfat a) og b) i følgende:

Sætning 1

Lad $h(t)$ være en vilkårlig løsning til den inhomogene ligning, så består den fuldstændige løsning hertil af samtlige funktioner $h(t) + y$, hvor y gennemløber den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning.

Så i al korthed er teknikken følgende: Gæt én løsning $h(t)$ til den inhomogene ligning, og find den fuldstændige løsning til den homogene ligning. Den fuldstændige løsning til den inhomogene består da af samtlige funktioner, der kan skrives som summen af $h(t)$ og én fra den fuldstændige løsning til den homogene.

Eksempel og øvelse 2

1. Find den fuldstændige løsning til $y''+y=t$.

Den tilsvarende homogene har den fuldstændige løsning

$$y=c_1\cdot\cos(t)+c_2\cdot\sin(t)$$

Det ses umiddelbart, at $y_0=t$ er en løsning til den inhomogene. Derfor er den fuldstændige løsning

$$y=c_1\cdot\cos(t)+c_2\cdot\sin(t)+t$$

2. Find den fuldstændige løsning til $y''+y'-y=t^2$.

Da polynomier differentieres til polynomier, gætter vi på en funktion med forskrift

$$y_0=at^2+bt+c$$

Vi differentierer og indsætter, og vi finder: $a = -1$, $b = 2$ og $c = 0$.
Opskriv nu den fuldstændige løsning.

Øvelse 3

Find den fuldstændige løsning til

$$y''-3y'+2y=(1+t)e^{3t}$$

Når du her skal gætte, så lad dig lede af din viden om, hvad der sker med e^{3t} og med polynomier ved differentiation. Ud fra dette ville det være et forsøg værd at prøve funktionen $y_0 = (a + bt)e^{3t}$.

Øvelse 4

Betragt en 2. ordens differentialligning $ay'' + by' + cy = g(t)$, hvor a, b og c er positive.

Vis at differensen mellem to vilkårlige løsninger går mod 0, når x går mod uendelig.
(Vink: Udnyt først øvelse 12 og sætning 1. For den tilsvarende inhomogene ligning: opskriv diskriminanten for det karakteristiske polynomium og opdel i forskellige tilfælde.)

2. løsningsmetode: Substitutionsmetoden

»Gættemetoden« er naturligvis en usikker og ikke nær altid farbar vej. For differentialligninger med konstante koefficienter er vi i den heldige situation, at det er muligt at opskrive en løsningsformel for den fuldstændige løsning. Den enkleste metode til at nå frem hertil er substitutionsmetoden, som vi kender fra løsningen af den homogene ligning.

Betragt differentialligningen

$$y'' + by' + cy = f(t), \tag{1}$$

og antag at det karakteristiske polynomium har rødderne x_1 og x_2. Vi omskriver på samme vis som i det homogene tilfælde og får differentialligningen omformet til

$$(y' - x_1 \cdot y)' - x_2 \cdot (y' - x_1 \cdot y) = f(t)$$

Substituér $u = y' - x_1 \cdot y$, da fås

$$u' - x_2 \cdot u = g(t)$$

Denne differentialligning løses ved hjælp af formlen for den lineære 1. ordens differentialligning.

Øvelse 5

Vis at løsningen bliver $u = c \cdot e^{x_2 t} + e^{x_2 t} \cdot \int e^{-x_2 t} \cdot f(t)\, dt$.

Øvelse 6

Vis at y nu findes som løsning til $y' = x_1 \cdot y + c \cdot e^{x_2 t} + e^{x_2 t} \cdot \int e^{-x_2 t} \cdot f(t)\, dt$. (4)

Herefter må vi dele op i to tilfælde:

ISBN 9788770668781

1. Tilfælde

$x_1 \neq x_2$ (to forskellige reelle rødder)

Øvelse 7

Vis at løsningen til (4) bliver $y = c_1 \cdot e^{x_1 t} + \frac{c}{x_2 - x_1} \cdot e^{x_2 t} + e^{x_1 t} \cdot \int e^{(x_2 - x_1)t} \cdot \left(\int e^{-x_2 t} \cdot f(t)\ dt \right) dt$.

Vi har hermed formelt set løst problemet, idet vi hare angivet den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning på en færdig løsningsformel. Formlen forekommer imidlertid lidt uhåndterlig og kan reduceres noget. Vi kan specielt slippe af med »det ydre integral« og derved slippe for at have et integral i et integral. Dette kan gøres ved at lave partiel integration på dette store integral:

Øvelse 8

Vis: $\int e^{(x_2 - x_1)t} \cdot \left(\int e^{-x_2 t} \cdot f(t)\ dt \right) dt = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot e^{(x_2 - x_1)t} \cdot \int e^{-x_2 t} \cdot f(t)\ dt - \int \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot e^{(x_2 - x_1)t} \cdot e^{-x_2 t} \cdot f(t)\ dt$

Øvelse 9

Reducer ovenstående udtryk en smule, sæt ind i udtrykket, vi fandt for *y*, kald brøken $\frac{c}{x_2 - x_1}$ for c_2, og vis så følgende:

Sætning 4

Den fuldstændige løsning til den inhomogene differentialligning kan skrives på formen

$$y = c_1 \cdot e^{x_1 t} + c_2 \cdot e^{x_2 t} + \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot e^{x_2 t} \cdot \int e^{-x_2 t} \cdot f(t)\ dt + \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot e^{x_1 t} \cdot \int e^{-x_1 t} \cdot f(t)\ dt .$$

Bemærk: De to første led i løsningen til den inhomogene ligning genkendes som løsningen til den homogene ligning. Sidste led, kan man ved indsættelse eftervise, er én partikulær løsning til den inhomogene ligning. Altså ser vi, at vores beregninger bekræfter resultatet fra sætning 3: Den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning fås ved at addere den fuldstændige løsning til den homogene til én partikulær løsning til den inhomogene.

Eksempel

Bestem den fuldstændige løsning til $y'' + y' - 20y = t^2$.

Først findes rødderne i det karakteristiske polynomium:

$x^2 + x - 20 = 0$ giver $x_1 = -5$ og $x_2 = 4$.

Den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning er da

$$y = c_1 \cdot e^{-5t} + c_2 \cdot e^{4t}$$

Dernæst udregnes (ved partiel integration) den partikulære løsning til den inhomogene ligning:

$$y = \frac{1}{4-(-5)} \cdot e^{4t} \cdot \int e^{-4t} \cdot t^2\ dt + \frac{1}{-5-4} \cdot e^{-5t} \cdot \int e^{5t} \cdot t^2\ dt \quad \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{1}{9} \cdot e^{4t} \cdot \left(-\frac{1}{4} t^2 \cdot e^{-4t} - \frac{1}{8} t \cdot e^{-4t} - \frac{1}{16} \cdot e^{-4t} \right) - \frac{1}{9} \cdot e^{-5t} \cdot \left(\frac{1}{5} t^2 \cdot e^{5t} - \frac{2}{25} t \cdot e^{5t} + \frac{4}{125} \cdot e^{5t} \right) \quad \Leftrightarrow$$

$$y = -\frac{1}{36} t^2 - \frac{1}{72} t - \frac{1}{144} - \frac{1}{45} t^2 + \frac{2}{225} t - \frac{4}{1125} \quad \Leftrightarrow$$

$$y = -\frac{1}{20} t^2 - \frac{9}{200} t - \frac{21}{2000}$$

Konklusion: Den fuldstændige løsning er $y = c_1 \cdot e^{-5t} + c_2 \cdot e^{4t} - \frac{1}{20}t^2 - \frac{9}{200}t - \frac{21}{2000}$.

Bemærk: Ved gættemetoden ville vi naturligt have gættet på et andengradspolynomium, indsætte og bestemme konstanterne. Det ville helt sikkert være betydeligt hurtigere.

Men er man i tvivl, kan det være nyttigt at prøve med løsningsformlen. Og under alle omstændigheder vil formlen altid give løsningen, også uanset om man kan udregne de konkrete integraler.

2. Tilfælde
$x_1 = x_2$ (dobbeltrod); kald dobbeltroden for x_0.

Øvelse 10

a) Vis at løsningen til differentialligningen (4) i dette tilfælde bliver

$$y = c_1 \cdot e^{x_0 t} + e^{x_0 t} \cdot \int \left(c + \int e^{-x_0 t} \cdot f(t)\, dt \right) dt$$
.

b) Vis dernæst at $\iint e^{-x_0 t}\, dt^2 = t \cdot \int e^{-x_0 t} \cdot f(t)\, dt - \int t \cdot e^{-x_0 t} \cdot f(t)\, dt$.

c) Vis endelig, ved at kombinere ovenstående, at løsningen til differentialligningen i 2. tilfælde bliver
$$y = c \cdot e^{x_0 t} + c \cdot t \cdot e^{x_0 t} + t \cdot e^{x_0 t} \cdot \int e^{-x_0 t} \cdot f(t)\, dt - e^{x_0 t} \cdot \int t \cdot e^{-x_0 t} \cdot f(t)\, dt$$
.

For integraler, som vi *kan* løse, vil det i almindelighed være mere fremkommeligt og hurtigere at gætte end at beregne. Kvalificerede gæt bygger naturligvis på erfaringen; men man behøver ikke vente på at få opbygget en årelang erfaring, før man kaster sig ud i det. Til specielle inhomogene ligninger med polynomier, eksponentielle funktioner, sin og cos mv. er der standardiserede gættemetoder.
Løsningsformlen er imidlertid meget nyttig at have, både til teoretiske formål og med henblik på praktisk brug. For med formlen i hånden kan vi altid opskrive løsningen, uanset om vi kan udregne de konkrete integraler.

Øvelse 11
Bestem ved beregning løsningen til følgende inhomogene differentialligninger, og lav evt. en sammenligning med, hvorledes løsning ved gættemetoden ville forløbe:

1. $y'' - 3y' + 2y = (1+t)e^{3t}$
2. $2y'' - 3y' + y = (t^2 + 1)e^t$
3. $y'' + 4y' + 4y = t^{\frac{5}{2}} e^{-2}$
   Løs endvidere begyndelsesværdiproblemet $y(0) = y'(0) = 0$.

ISBN 9788770668781

Appendiks om gættemetoden

Vi opsummerer erfaringerne fra øvelserne i det foregående i følgende:

Praxis. Om at gætte løsninger til differentialligninger
Skal vi løse en inhomogen differentialligning af typen:

$$y''+by'+cy=f(t)$$

så gør vi følgende:
1. Bestem den fuldstændige løsning til den homogene ligning.
2. Gæt en løsning $h(t)$ til den inhomogene ved at lade dig lede af følgende:
- er $f(t)$ et polynomium fx af grad 2, så gæt på et polynomium af samme grad, i dette tilfælde $h(t)=a\cdot t^2+b\cdot t+c$, indsæt og se om man kan bestemme koefficienterne så ligningen stemmer.
- er $f(t)$ en trigonometrisk funktion, så gæt på en funktion af typen $h(t)=a\cdot\sin(k\cdot t)+b\cdot\cos(k\cdot t)$, indsæt og se om man kan bestemme koefficienterne så ligningen stemmer. Lykkes det ikke, så gæt på en funktion, der indeholder $t\cdot\sin(k\cdot t)$
- rummer $f(t)$ en eksponentialfunktion, så gæt på en funktion af typen $h(t)=c\cdot e^{k\cdot t}$, eller hvis det ikke rækker $h(t)=a\cdot e^{k\cdot t}+b\cdot t\cdot e^{k\cdot t}$, indsæt og se om man kan bestemme koefficienterne så ligningen stemmer.
3. Den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning består da af samtlige funktioner, der kan skrives som summen af $h(t)$ og én fra den fuldstændige løsning til den homogene.

Bemærkning. Ovenstående fremgangsmåde vil normalt lykkes i tilfælde, hvor $f(t)$ er en konstant eller en meget enkel funktion. I andre tilfælde kan vi ofte støde på uoverstigelige hindringer. Man kan naturligvis altid forsøge at anvende sit værktøjsprogram. Men ovenstående metode kan give en vis indsigt i, hvorfor værktøjet svarer som det gør.