ISBN 9788770668781

Projekt 6.3 Løsning af differentialligningen $y''+b\cdot y'+c\cdot y=0$

Ved at bygge videre på de løsningsmetoder, vi havde succes med ved løsning af ligningerne uden leddet $b\cdot y'$ med den enkeltafledede, er vi nu i stand til at løse den generelle ligning

$$y''+b\cdot y'+c\cdot y=0\,. \qquad (1)$$

Vi når frem til beviserne for de forskellige typer af løsninger gennem en række øvelser, hvor en del er overladt til læserens eget arbejde.

Vi laver nu de indledende forberedelser til at bevise sætningen. Først analyseres problemet.

Øvelse 1: Det karakteristiske polynomium

a) *Antag at* $f(t)=\mathrm{e}^{k\cdot t}$ *er en løsning til (1)*. Vis ved indsættelse, at vi får ligningen:

$$k^2\cdot\mathrm{e}^{k\cdot t}+b\cdot k\cdot\mathrm{e}^{k\cdot t}+c\cdot\mathrm{e}^{k\cdot t}=0$$

b) Vis, at denne ligning kan reduceres til:

$$k^2+b\cdot k+c=0 \qquad (2)$$

Foreløbig konklusion: Hvis $\mathrm{e}^{k\cdot t}$ er en løsning til differentialligningen, så er k er rod i det andengradspolynomium $p(x)=x^2+b\cdot x+c$, der fremkommer ved at erstatte y'', y' og y med henholdsvis x^2, x^1 og x^0, dvs. med x^2, x og 1. Dette polynomium kalder vi *det karakteristiske polynomium.*

c) *Antag k er rod i det karakteristiske polynomium*, dvs (2) er opfyldt. Vis at så er $y=\mathrm{e}^{k\cdot t}$ en løsning til differentialligningen, dvs (1) er opfyldt.

Såfremt det karakteristiske polynomium har to rødder, x_1 og x_2, så ved vi altså, at

$y=\mathrm{e}^{x_1\cdot t}$ og $y=\mathrm{e}^{x_2\cdot t}$ er løsninger til (1).

Øvelse 2: Linearkombinationer er også løsninger

Vis følgende: Hvis $y=\mathrm{e}^{x_1\cdot t}$ og $y=\mathrm{e}^{x_2\cdot t}$ er løsninger til (1), så er også $y=c_1\cdot\mathrm{e}^{x_1\cdot t}+c_2\cdot\mathrm{e}^{x_2\cdot t}$ en løsning, for alle valg af konstanter c_1 og c_2.

En sådan kombination af de to løsninger, hvor vi ganger med konstanter og adderer, kaldes for en *linearkombination*.

Vi er nu allerede nået frem til, at det karakteristiske polynomium, og de evt. rødder heri må spille en betydningsfuld rolle i løsningen af anden ordens differentialligninger. Men Ikke alle polynomier har rødder, så vi kan også allerede nu indse, at den klasse af funktioner, vi så på i den foregående øvelse, ikke kan rumme hele historien om løsningen. I det følgende vil vi derfor dele op i de tre tilfælde, vi kender fra andengradspolynomier: To rødder, én rod eller ingen rødder.

I de to tilfælde med rødder får vi brug for følgende lille sætning om rødder i et andengradspolynomium:

Sætning 1: Egenskaber ved rødderne i et andengradspolynomium.
Antag, at andengradspolynomiet $p(x)=x^2+b\cdot x+c$ har rødderne x_1 og x_2. Så gælder

$$x_1+x_2=-b \qquad\qquad x_1\cdot x_2=c$$

Øvelse 3: Bevis for sætningen

Lad x_1 og x_2 være rødderne i polynomiet. Rødderne kan skrives få følgende form:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot c}}{2} \qquad\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4\cdot c}}{2}$$

1. metode. Anvend dit værktøjsprogram til at udregne x_1+x_2 og $x_1\cdot x_2$.

2. metode. I B-bogens kapitel 3 om polynomier lærte vi, at hvis x_1 og x_2 er rødder i polynomiet $p(x)=x^2+b\cdot x+c$, så kan vi *faktorisere* således:

ISBN 9788770668781

$$x^2+b\cdot x+c=(x-x_1)\cdot(x-x_2)$$

Udregn nu højre side. Det skal være lig med venstre side. Deraf får vi resultatet.

Vi er nu parat til at vise:

Sætning 2: Løsning af den homogene lineære anden ordens differentialligning.
Den fuldstændige løsning af ligningen $y''+b\cdot y'+c\cdot y=0$ afhænger af diskriminanten $d=b^2-4ac$ i *det karakteristiske polynomium* $x^2+bx+c=0$.
1) Hvis $d>0$, og x_1 og x_2 er de to forskellige reelle rødder i det karakteristiske polynomium, så er den fuldstændige løsning lig med mængden af alle funktioner, der kan skrives på formen

$$y=c_1\cdot e^{x_1\cdot t}+c_2\cdot e^{x_2\cdot t},$$

hvor c_1 og c_2 er konstanter.
2) Hvis $d=0$, og x_0 er dobbeltroden i det karakteristiske polynomium, så er den fuldstændige løsning lig med mængden af alle funktioner, der kan skrives på formen

$$y=c_1\cdot e^{x_0\cdot t}+c_2\cdot t\cdot e^{x_0\cdot t},$$

hvor c_1 og c_2 er konstanter.
3) Hvis $d<0$, og q sættes lig med tallet $q=\sqrt{c-\left(\frac{b}{2}\right)^2}$, så er den fuldstændige løsning lig med mængden af alle funktioner, der kan skrives på formen

$$y=e^{-\frac{b}{2}\cdot t}\cdot\left(c_1\cdot\cos(q\cdot t)+c_2\cdot\sin(q\cdot t)\right),$$

hvor c_1 og c_2 er konstanter.

*Bemærk*ning. Hvis vi regner inden for den større talmængde af komplekse tal, er punkt 3 overflødig, idet andengradspolynomier altid har komplekse rødder og dermed altid kan faktoriseres inden for de komplekse tal. I de komplekse tals verden er tilfælde 1 og 3 derfor i virkeligheden (matematisk set) den samme situation. Men modellerne bagved kan være meget forskellige. Det er meget underligt, for det fortæller, at når vi går ud i en større verden af 2-dimensionelle tal og betragter henholdsvis den naturlige eksponentialfunktion og sinus og cosinus, så vil vi pludselig se, at det blot er forskellige projektioner af samme funktion.

Før vi går i gang med at bevise sætningen, vil vi sammenligne med de to tidligere undersøgte tilfælde.

Øvelse 4
I tilfældet $y''=k^2\cdot y$ er differentialligningen (1):

$$y''-k^2\cdot y=0$$

Opskriv det karakteristiske polynomium og find rødderne heri. Opskriv dernæst løsningsformlen ifølge sætningen ovenfor, og sammenlign med den, der omtales i sætning 1 i kapitel 8.

Øvelse 5
I tilfældet $y''=-k^2\cdot y$ er differentialligningen (1):

$$y''+k^2\cdot y=0$$

Følg punkt 3 i sætningen og sammenlign den løsning du finder, med den der omtales i sætning 2 i kapitel 8-

Bevis for sætning 2 punkt 1 og 2. (substitutionsmetoden)
Beviset for de første to punkter, hvor der findes reelle rødder i det karakteristiske polynomium, kan gennemføres som de tidligere beviser, ved at anvende en *integrationskonstant*. Et sådant bevis kan du finde i appendiks nedenfor. Men vi vil her demonstrere en ny teknik, den såkaldte substitutionsmetode. Den har flere fordele, dels kan den generaliseres til højere ordens differentialligninger med konstante koefficienter, og dels kan teknikken anvendes ved løsning af inhomogene ligningssystemer, hvilket vi viser senere.

Antag y er en løsning til differentialligningen:

$$y''+b\cdot y'+c\cdot y=0$$

ISBN 9788770668781

Udnyt sætning 1 om andengradspolynomiers rødder og indsæt $x_1+x_2=-b$ og $x_1\cdot x_2=c$:

$$y''-(x_1+x_2)\cdot y'+(x_1\cdot x_2)\cdot y=0$$

Øvelse 6

a) Vis, at denne ligning kan omskrives til:

$$(y'-x_1\cdot y)'-x_2\cdot(y'-x_1\cdot y)=0$$

b) Substituér $u=y'-x_1\cdot y$, så ligningen reduceres til

$$u'-x_2\cdot u=0\ .$$

og vis, at denne har løsningen:

$$u=c\cdot e^{x_2\cdot t}$$

c) Substituér tilbage så vi får ligningen:

$$y'=x_1\cdot y+c\cdot e^{x_2\cdot t}\ ,$$

der er en lineær første ordens differentialligning. Anvend løsningsformlen i kapitel 4 sætning 4 til at opskrive:

$$y=c_1\cdot e^{x_1\cdot t}+e^{x_1\cdot t}\cdot\int e^{-x_1\cdot t}\cdot c\cdot e^{x_2\cdot t}\ dt$$

$$y=c_1\cdot e^{x_1\cdot t}+e^{x_1\cdot t}\cdot\int c\cdot e^{(x_2-x_1)\cdot t}\ dt \qquad (3) \qquad \text{Anvend potensregel}$$

Hertil har udregningerne dækket tilfældene 1 og 2. Men her skilles vandene, fordi situationen med dobbeltrod medfører, at $e^{(x_2-x_1)\cdot t}=e^0=1$.

Øvelse 7. Afslutning af bevis for punkt 1

Her er $x_1\neq x_2$. Bestem en stamfunktion til ovenstående integral (3) og vis:

$$y=c_1\cdot e^{x_1\cdot t}+\frac{c}{x_2-x_1}\cdot e^{x_1\cdot t}\cdot e^{(x_2-x_1)\cdot t}$$

$$y=c_1\cdot e^{x_1\cdot t}+\frac{c}{x_2-x_1}\cdot e^{x_2\cdot t} \qquad \text{Anvend potensregel}$$

Indfører vi nu betegnelsen $c_2=\frac{c}{x_2-x_1}$, får løsningen den ønskede form:

$$y=c_1\cdot e^{x_1\cdot t}+c_2\cdot e^{x_2\cdot t}$$

Øvelse 8. Afslutning af bevis for punkt 2

a) $x_1=x_2=x_0$ (dobbeltrod). Indsæt i ligningen (3) ovenfor og vis vi får følgende:

$$y=c_1\cdot e^{x_0\cdot t}+e^{x_0\cdot t}\cdot\int c\ dt$$

b) Bestem integralet og vis:

$$y=c_1\cdot e^{x_0\cdot t}+c\cdot t\cdot e^{x_0\cdot t}$$

Kalder vi nu c for c_2, får løsningen den ønskede form:

$$y=c_1\cdot e^{x_0\cdot t}+c_2\cdot t\cdot e^{x_0\cdot t}$$

Bevis for sætning 2 punkt 3. (Anvendelse af integrationskonstant)

Tilfælde 3 har $d<0$, dvs. $b^2-4c<0$.

Vi vil føre dette tilfælde tilbage til differentialligningen $y''=-k^2\cdot y$, som vi allerede har løst.

Vi starter med at splitte leddet med y' op i to, idet vi håber at kunne samle disse fire led to og to og anvende produktreglen. Differentialligningen (1) bliver så skrevet således:

$$y''+\frac{b}{2}\cdot y'+\frac{b}{2}\cdot y'+c\cdot y=0$$

Øvelse 9

Vis at denne ligning kan omskrives på følgende måde:

$$y''\cdot e^{\frac{b}{2}\cdot t}+\frac{b}{2}\cdot y'\cdot e^{\frac{b}{2}\cdot t}+\frac{b}{2}\cdot y'\cdot e^{\frac{b}{2}\cdot t}+c\cdot y\cdot e^{\frac{b}{2}\cdot t}=0$$

$$\left(y'\cdot e^{\frac{b}{2}\cdot t}\right)'+\frac{b}{2}\cdot y'\cdot e^{\frac{b}{2}\cdot t}+c\cdot y\cdot e^{\frac{b}{2}\cdot t}=0$$

ISBN 9788770668781

Vi kan ikke umiddelbart anvende produktreglen på de sidste to led. Men vi lægger så i stedet det led til på venstre side, de giver os mulighed for at bruge produktreglen.

Øvelse 10
a) Vis at ligningen kan omskrives videre på følgende måde:

$$\left(y'\cdot e^{\frac{b}{2}\cdot t}\right)'+\tfrac{b}{2}\cdot y'\cdot e^{\frac{b}{2}\cdot t}+y\cdot\left(\tfrac{b}{2}\right)^2\cdot e^{\frac{b}{2}\cdot t}=y\cdot\left(\tfrac{b}{2}\right)^2\cdot e^{\frac{b}{2}\cdot t}-c\cdot y\cdot e^{\frac{b}{2}\cdot t}$$

$$\left(y'\cdot e^{\frac{b}{2}\cdot t}\right)'+\left(y\cdot\tfrac{b}{2}\cdot e^{\frac{b}{2}\cdot t}\right)'=\left(\left(\tfrac{b}{2}\right)^2-c\right)\cdot y\cdot e^{\frac{b}{2}\cdot t}$$

$$\left(y'\cdot e^{\frac{b}{2}\cdot t}+y\cdot\tfrac{b}{2}\cdot e^{\frac{b}{2}\cdot t}\right)'=\left(\left(\tfrac{b}{2}\right)^2-c\right)\cdot y\cdot e^{\frac{b}{2}\cdot t}$$

$$\left(\left(y\cdot e^{\frac{b}{2}\cdot t}\right)'\right)'=\left(\left(\tfrac{b}{2}\right)^2-c\right)\cdot y\cdot e^{\frac{b}{2}\cdot t}$$

b) Vis, at ved at anvende substitutionen $z=y\cdot e^{\frac{b}{2}\cdot t}$ kan dette omskrives til:

$$z''=\left(\left(\tfrac{b}{2}\right)^2-c\right)\cdot z$$

b) Vis $c-\left(\tfrac{b}{2}\right)^2>0$, når diskriminanten er negativ.

c) sæt $q^2=c-\left(\tfrac{b}{2}\right)^2$ og vis at ligningen kan omskrives til:

$$z''=-q^2\cdot z$$

d) Vi har nu ført ligningen tilbage til den type, som kapitel 8, sætning 2 giver os løsningen til:

$$z=c_1\cdot\cos(q\cdot t)+c_2\cdot\sin(q\cdot t)$$

Substituér tilbage og vis:

$$y=e^{-\frac{b}{2}\cdot t}\cdot\left(c_1\cdot\cos(q\cdot t)+c_2\cdot\sin(q\cdot t)\right)$$, hvor $q^2=c-\left(\tfrac{b}{2}\right)^2$, eller $q=\sqrt{c-\left(\tfrac{b}{2}\right)^2}$

hvilket netop var løsningen på den ønskede form.
Hermed har vi afsluttet beviset for sætning 2

Øvelse 11
Anvend løsningsformlerne til at bestemme den fuldstændige løsning til følgende:
a) $y''+5y'+4y=0$
b) $y''-6y'+9y=0$
c) $y''+2y'+5y=0$

Øvelse 12
Anvend både løsningsformlerne og et værktøjsprogram til løsning af følgende begyndelsesværdiproblemer, og tegn graferne for løsningskurverne.
a) $y''-3y'-4y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$
b) $y''+4y'+4y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$
c) $y''+2y'+4y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$

ISBN 9788770668781

Appendiks: Udledning af løsningsformlen til sætning 2 punkt 1 og 2 ved hjælp af en integrationskontant.

Vi skal løse:

$$y''+b\cdot y'+c\cdot y=0\,. \qquad (1)$$

Indsæt i (1) udtrykkene for *b* og *c* fra sætning 1:

$$y''-x_1\cdot y'-x_2\cdot y'+x_1\cdot x_2\cdot y=0$$

Inspireret af tidligere løsningsmetoder regner vi nu videre således (gør selv rede for, hvad der sker i hvert enkelt skridt):

$$y''\cdot e^{-x_1t}-x_1\cdot y'\cdot e^{-x_1t}-x_2\cdot y'\cdot e^{-x_1t}+x_1\cdot x_2\cdot y\cdot e^{-x_1t}=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\left(y'\cdot e^{-x_1t}\right)'-x_2\cdot\left(y'\cdot e^{-x_1t}-x_1\cdot y\cdot e^{-x_1t}\right)=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\left(y'\cdot e^{-x_1t}\right)'-x_2\cdot\left(y\cdot e^{-x_1t}\right)'=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\left(y'\cdot e^{-x_1t}-x_2\cdot y\cdot e^{-x_1t}\right)'=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$y'\cdot e^{-x_1t}-x_2\cdot y\cdot e^{-x_1t}=c \quad \Leftrightarrow \quad (c \text{ er konstant})$$
$$y'-x_2\cdot y=c\cdot e^{x_1t} \quad \Leftrightarrow$$
$$y'=x_2\cdot y+c\cdot e^{x_1t}$$

Dette genkendes som en lineær 1. ordens differentialligning med

$$f(t)=x_2 \text{ og } g(t)=c\cdot e^{x_1t}$$

Den kan enten løses ved brug af formlen, eller ved at foretage de sædvanlige omskrivninger.