ISBN 9788770668781

Projekter: Kapitel 6.

Projekt 8.2 Slaget ved Trafalgar-Nelsons og Villeneuves strategier. Matematisk modellering af et af verdenshistoriens store slag.

Om den matematiske metode

Vi vil illustrere den matematiske metode, ved at vise hvordan man kan modellere udfaldet af et berømt slag. Hertil bruges Lanchesters modeller for at analysere udfaldet af krige, i dette tilfælde Lanchesters kvadratiske model. Som ved alle matematiske modeller er der tale om en forenkling af den virkelige verden, så modellens styrke er ikke at den giver et præcist entydigt billede af hvad der foregår i virkeligheden, men forhåbentligt kan modellen give indsigt i nogle vigtige mekanismer bag den virkelige krig.

Der findes mange slags modeller i matematik, men typisk er de *kvantitative*, dvs. de beskriver sammenhængen mellem nogle numeriske variable. Matematiske modeller er noget man regner på ☺

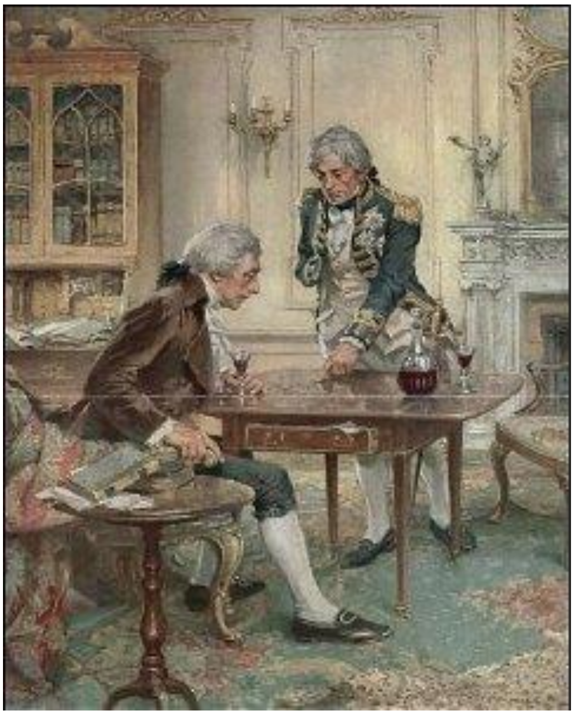
Der er to hovedtyper af kvantitative modeller: Stokastiske og deterministiske. I de stokastiske modeller inddrager man et element af tilfældighed og simulerer udfaldet af modellen mange gange, for at se om der er typiske træk, som man kan forvente dukker op i den virkelige verden med stor sandsynlighed. Vejrforudsigelser er typisk stokastiske (’der er 40% chance for regn i morgen …’). Deterministiske modeller kører man derimod kun én gang, da modellen fører til et entydigt resultat. Deterministiske modeller vil ofte være knyttet til middelopførslen eller den forventede opførsel af en stokastisk model. Da tilfældigheder klart spiller en vigtig rolle i den virkelige verdens krige, er en stokastisk model mere realistisk end en deterministisk, men for at forenkle modellen vil vi holde os til de deterministiske modeller.

Deterministiske modeller deles igen op i to hovedtyper: Diskrete modeller og kontinuerte modeller. I de diskrete modeller følger man udviklingen af et system i små skridt. De er nemme at regne på og kræver kun kendskab til de vigtigste væksttyper, såsom lineær vækst og eksponentiel vækst. Dertil kommer almindeligt kendskab til fx procentregning. De kontinuerte modeller forudsætter kendskab til differential- og integralregning og modellerer typisk systemet udvikling med en differentialligning. For at forenkle diskussionen vil vi holde os til diskrete modeller, men i indsatte bokse, som kan overspringes uden at de væsentligste pointer går tabt, viser vi hvordan modelleringen foregår i en kontinuert model.

I det følgende forudsættes altså kun et alment kendskab til procentregning, lineær, kvadratisk og eksponentiel vækst, dvs. vi er på et typisk B-niveau (og meget af modellen bruger i virkeligheden kun C-niveau). Men i de indsatte bokse, forudsættes at eleverne har valgt A-niveau og er fortrolige med differentialregningen.

For at kunne regne på modellen er det nødvendigt med et matematisk værktøjsprogram. Det er da afgørende at have adgang til et godt regneark. I teksten her har vi benyttet TI-Nspire CAS med det indbyggede regneark. Men **i et bilag illustrerer vi Lanchesters model med regninger i Excel**, da dette er det mest udbredte regneark i historie-samfundsfag.

Slaget ved Trafalgar foregik i 1805 under Napoleonskrigene. Slaget fik afgørende betydning for Englands rolle som verdens førende sømagt. Ved slaget nedkæmpede englænderne under ledelse af Lord Nelson en kombineret fransk-spansk flåde under ledelse af Villeneuve. Før slaget havde Nelson udtænkt en såvel snedig som dristig krigsplan, hvor han ville sende en mindre gruppe af hurtigt gående skibe direkte mod den fransk-spanske flåde og splitte denne i to grupper: Den ene gruppe ville han dernæst nedkæmpe med sin hovedflåde, mens den anden del blev holdt i skak. Derefter ville han vende sig mode den anden del og nedkæmpe denne. Lord Nelsons plan er bevaret i detaljer, inklusive hans skitser.



The famous incident when Nelson, visiting Lord Sidmouth five weeks before Trafalgar, dipped a finger in the port and sketched his plan for the expected battle. This is reproduced from the colour painting by A. D. McCormick.

Figure 2: 'It was like an electric shock.' Lord Nelson explaining to the Officers previous to the Battle of Trafalgar the Plan of Attack, and Position of the Combined Forces of France & Spain. In the great cabin of HMS Victory on 29 September 1805. Watercolour by Daniel Orme.

ISBN 9788770668781

Nelson's Trafalgar Memorandum
Victory, off Cadiz, 9th October, 1805.
Memorandum.
Thinking it almost impossible to bring a Fleet of forty Sail of the Line into a Line of Battle in variable winds, thick weather, and other circumstances which must occur, without such a loss of time that the opportunity would probably be lost of bringing the Enemy to Battle in such a manner as to make the business decisive, I have therefore made up my mind to keep the Fleet in that position of sailing (with the exception of the First and Second in Command) that the Order of Sailing is to be the Order of Battle, placing the Fleet in two Lines of sixteen Ships each, with an Advanced Squadron of eight of the fastest sailing Two-decked Ships, which will always make, if wanted, a Line of twenty-four Sail, on whichever Line the Commander-in-Chief may direct.
The Second in Command will, after my intentions are made known to him, have the entire direction of his Line to make the attack upon the Enemy, and to follow up the blow until they are captured or destroyed.
If the Enemy's Fleet should be seen to windward in Line of Battle, and that the two Lines and the Advanced Squadron can fetch them, they will probably be so extended that their Van could not succour their friends.
I should therefore probably make the Second in Command's signal to lead through, about their twelfth Ship from their Rear, (or wherever he could fetch, if not able to get so far advanced); my Line would lead through about their Centre, and the Advanced Squadron to cut two or three or four Ships a-head of their Centre, so as to ensure getting at their Commander-in-Chief, on whom every effort must be made to capture.
The whole impression of the British Fleet must be to overpower from two or three Ships a-head of their Commander-in-Chief, supposed to be in the Centre, to the Rear of their Fleet. I will suppose twenty Sail of the Enemy's Line to be untouched, it must be some time before they could perform a manœuvre to bring their force compact to attack any part of the British Fleet engaged, or to succour their own Ships, which indeed would be impossible without mixing with the Ships engaged.
Something must be left to chance; nothing is sure in a Sea Fight beyond all others. Shot will carry away the masts and yards of friends as well as foes; but I look with confidence to a Victory before the Van of the Enemy could succour their Rear, and then that the British Fleet would most of them be ready to receive their twenty Sail of the Line, or to pursue them, should they endeavour to make off.
If the Van of the Enemy tacks, the Captured Ships must run to leeward of the British Fleet; if the Enemy wears, the British must place themselves between the Enemy and the Captured, and disabled British Ships; and should the Enemy close, I have no fears as to the result.
The Second in Command will in all possible things direct the movements of his Line, by keeping them as compact as the nature of the circumstances will admit. Captains are to look to their particular Line as their rallying point. But, in case Signals can neither be seen or perfectly understood, no Captain can do very wrong if he places his Ship alongside that of an Enemy.
Of the intended attack from to windward, the Enemy in Line of Battle ready to receive an attack,

The divisions of the British Fleet will be brought nearly within gun shot of the Enemy's Centre. The signal will most probably then be made for the Lee Line to bear up together, to set all their sails, even steering sails, in order to get as quickly as possible to the Enemy's Line, and to cut through, beginning from the 12 Ship from the Enemy's Rear. Some Ships may not get through their exact place, but they will always be at hand to assist their friends; and if any are thrown round the Rear of the Enemy, they will effectually complete the business of twelve Sail of the Enemy.
Should the Enemy wear together, or bear up and sail large, still the twelve Ships composing, in the first position, the Enemy's Rear, are to be the object of attack of the Lee Line, unless otherwise directed from the Commander-in-Chief which is scarcely to be expected as the entire management of the Lee Line, after the intentions of the Commander-in-Chief, is [are] signified, is intended to be left to the judgment of the Admiral commanding that Line.
The remainder of the Enemy's Fleet, 34 Sail, are to be left to the management of the Commander-in-Chief, who will endeavour to take care that the movements of the Second in Command are as little interrupted as is possible. NELSON AND BRONTE .

Planen er et eksempel på en kvalitativ analyse af slagets forventede gang og det er bestemt værd at gennemgå den i detaljer. Men her vil vi i stedet prøve at byge en simpel matematisk model op for slagets gang. Læg mærke til at vi bygger en model op for hvordan slaget formodes at gå, ikke for hvordan det i virkeligheden gik. Der er altså tale om en simulering af et virtuelt slag, et krigsspil, i stedet for en analyse af det faktiske slag!

Vi starter med at forenkle de to flåder til et enkelt tal: *Antallet af skibe i de to flåder*. Nelson regnede med at kunne mønstre 40 skibe, mod Villeneuves formodede 46 skibe. Den samlede fransk-spanske flåde var altså større end den engelske. Antallet af skibe er de to fundamentale variable i modellen.

Læg mærke til at vi allerede her har forenklet problemstillingen betydeligt: I virkeligheden er der stor forskel på de enkelte skibe, men vi har udjævnet forskellene ved kun at se på antallet af skibe. Man må så sidenhen diskutere betydningen af en sådan forenkling - om den i virkeligheden ødelægger modellens prediktive kraft!

ISBN 9788770668781

Vi gør nu endnu en forenkling: Vi antager at fjendens skibe er lige så slagkraftige som vores egne. I den virkelige verden regnede Nelson med at hans skibe havde større erfaring med søkrige og derfor ville være fjendens overlegen. Men for at få noget erfaring med modellen vil vi i første omgang ignorere denne forskel i slagkraft og antage *symmetri*: De to flåders krigsskibe er lige stærke i kamp. Vi vil senere udbygge modellen, så den også kan tage højde for asymmetri mellem de to stridende parter.

Man kunne nu forestille sig en meget enkel model, hvor skibene sænkes lineært, hvorfor forskellen mellem antallet af skibe bevares og at den franske flåde derfor med et overskud på 6 skibe vil ende med 6 skibe i overskud. Fx kunne man forestille sig at vi sendte skibene i krig mod hinanden ét ad gangen. Da de er lige stærke vil udfaldet af tvekampene halvdelen af gangene være i Nelsons favør, halvdelen af gangene i Villeneuves favør. De to flåder vil derfor miste skibe i samme takt, hvilket netop fører til den lineære model, hvor forskellen i antal skibe er konstant.

Men det er forkert ifølge Lanchester: En mere detaljeret analyse af hvordan slaget udkæmpes vil afsløre at franskmændenes talmæssige fordel er langt større end blot den lineære forskel på 6 skibe. Skibene udkæmper *ikke* tvekampe, men kæmper alle mod alle på én gang og en talmæssig overlegenhed i antal skibe vil derfor føre til en hurtigere nedkæmpning af fjendens skibe. For at indse det må vi kigge nærmere på dynamikken i slagets gang!

Hvis vi på et givet tidspunkt har N skibe, der kæmper for Nelson og V skibe, der kæmper for Villeneuve, så vil vi i løbet af en skudrunde, som vi for simpelheds skyld vil antage tager et kvarter miste skibe på begge sider. Den simpleste antagelse er da at Nelson vil miste et antal skibe, der er proportionalt med antallet af Villeneuves skibe, dvs. Villeneuves ildkraft. Tilsvarende vil Villeneuve vil miste et antal skibe, der er proportionalt med antallet af Nelsons skibe, dvs. Nelsons ildkraft. Det udmøntes i ligningerne

$$N_{n+1} = N_n - 0.03 \cdot V_n$$
$$V_{n+1} = V_n - 0.03 \cdot N_n$$

Her har vi sat proportionalitetskonstanten til 0.03. ***Denne model kan vi nu køre i regnearket***. Kontroller dit eget regneark med det, du finder ***her***. Vi indfører da tre søjler: En for antallet af runder, en for antallet af skibe i Nelsons flåde og en for antallet af skibe i Villeneuves flåde:

	A	B	C
1	Runder	Nelson	Villeneuve
2	0	40	46

Først indskriver vi startværdierne som vist. Derefter indtaster vi formlerne for hvordan tallene udvikler sig, dvs. i celle A3 skriver i =A2+1, i celle B3 skriver vi =B2-0.03*C2, og i celle C3 skriver vi =C2-0.03*B2:

C4

	A	B	C
1	Runder	Nelson	Villeneuve
2	0	40	46
3	=A2+1	=B2-0.03*C2	=C2-0.03*B2

Efter én runde ser det derfor således ud:

C4

	A	B	C
1	Runder	Nelson	Villeneuve
2	0	40	46
3	1	38.62	44.8

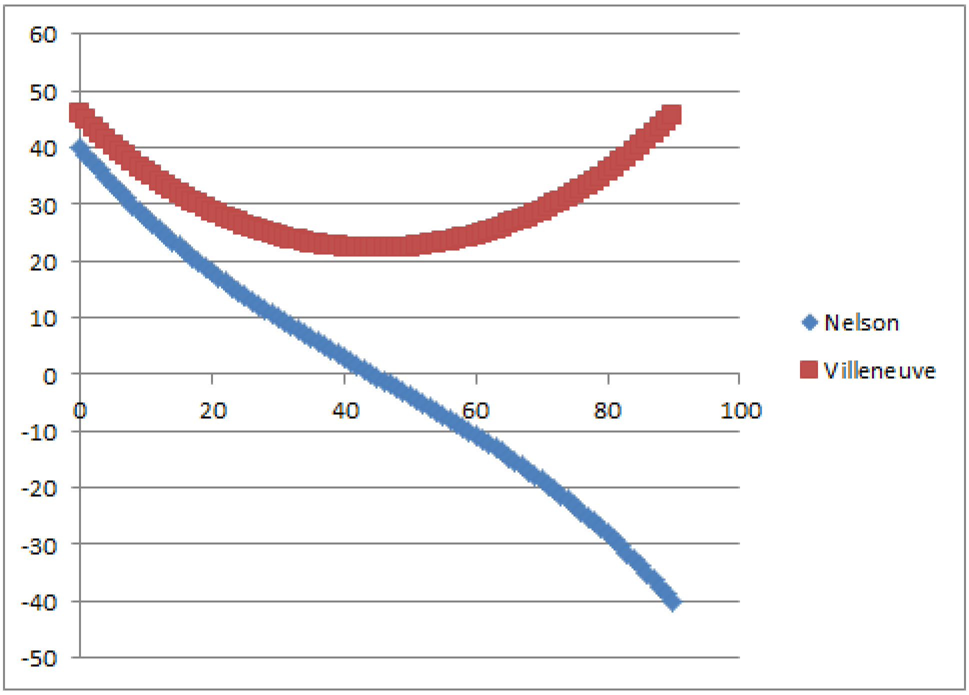
ISBN 9788770668781

Nu er dynamikken på plads og vi sværter de tre celler A3:C3 til og trækker dem ned gennem rengnearket ved at trække i ankeret i nederste højre hjørne, indtil vi har nået 90 runder:

	A	B	C
1	Runder	Nelson	Villeneuve
2	0	40	46
3	1	38.62	44.8
4	2	37.276	43.6414
5	3	35.96676	42.52312
6	4	34.69106	41.4441173
7	5	33.44774	40.4033853
8	6	32.23564	39.3999531
9	7	31.05364	38.4328839
10	8	29.90065	37.5012747
11	9	28.77562	36.6042551
12	10	27.67749	35.7409866

Her ser vi resultatet af de første ti runder! Læg mærke til at forskellen mellem Villenueves antal og Nelsons antal nu er oppe på ca. 8 skibe, dvs. forspringet øges!

Vi kan se på udviklingen i antallet af skibe for de to kombattanter grafisk ved at markere søjlerne og afbilde dem som et punktdiagram:



Vi lægger da mærke til at modellen rummer et helt urealistisk træk: Antallet af skibe er ikke begrænset til at være positivt! Efter godt fyrre runder er Nelsons skibe helt udkæmpet, og slaget er sådan set overstået. Men i modellen kan man regne videre og finder et negativt antal skibe for Nelson og et voksende antal skibe for Villeneuve. Begge dele er selvfølgelig helt uacceptable i virkeligheden, men det understreger blot at modellen kun er meningsfyldt, så længe antallet af skibe på begge sider ikke bliver negativt. I dette tilfælde er modellen derfor kun gyldig i 44 runder:

ISBN 9788770668781

Projekter: Kapitel 6.

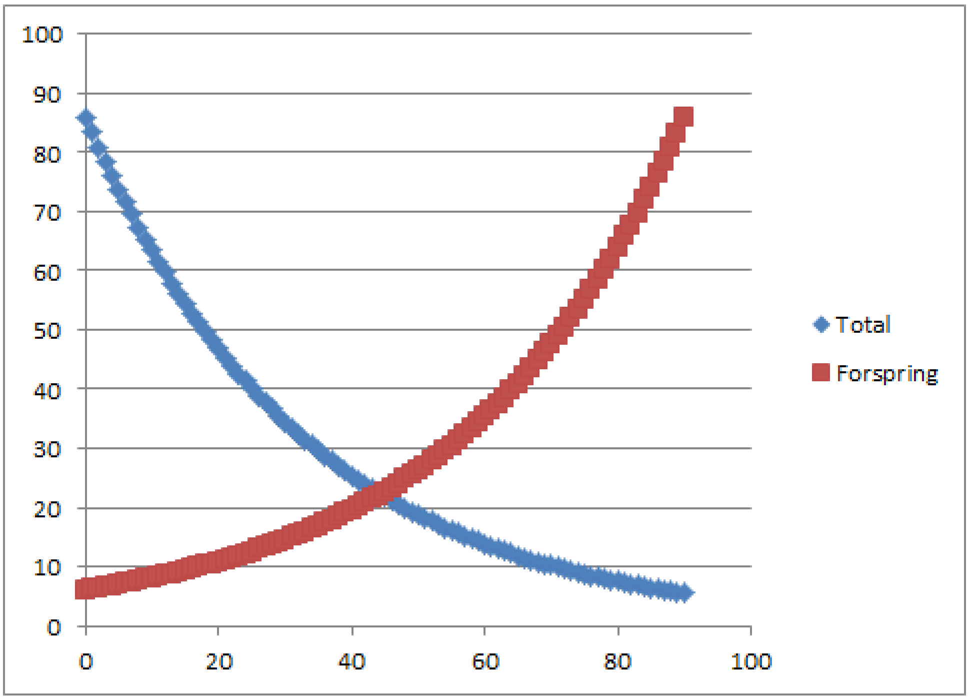
45	43	0.91166	22.298761
46	44	0.242698	22.2714112
47	45	-0.42544	22.2641303
48	46	-1.09337	22.2768936

Vi ser også at Villeneuve stort set ikke mister flere skibe i den sidste fjerdel af det virtuelle slag:

36	34	23.46109	7.069657
37	35	23.249	6.365824
38	36	23.05802	5.668354
39	37	22.88797	4.976614
40	38	22.73868	4.289975
41	39	22.60998	3.607814
42	40	22.50174	2.929515
43	41	22.41386	2.254463
44	42	22.34622	1.582047
45	43	22.29876	0.91166
46	44	22.27141	0.242698

Fra runde 34 til 44 falder antallet af skibe på Villeneuves side kun fra 23.5 skib til 22.3 skibe altså lidt over et enkelt skib, mens Nelsons side mister 7 skibe. På grund af den voksende overvægt slutter slaget altså grumt med at den tabende side hurtigt går helt til grunde. Længe før vil den tabende side derfor være stærkt motiveret til at overgive sig!

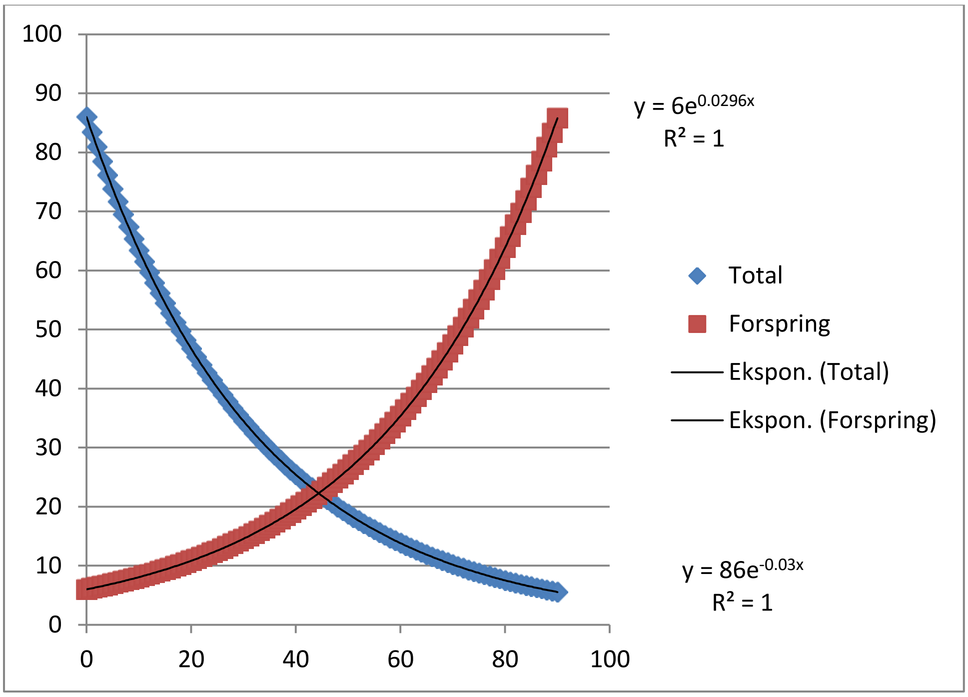
Vi kan opnå mere indsigt i modellen ved at tilføje yderligere to søjler: Èn for det samlede antal skibe, dvs. summen, og én for forspringet, dvs. differensen. VI trækker derfor celleformlerne D2=B2+C2 og E2=C2-B2 ned gennem regnearket. Ved at markere søjlerne for antal runder, totalen og forspringet (hold CTRL ned for at markere søjler, der ikke ligger lige op ad hinanden) kan vi nu afbilde Totalen og Forspringet som funktion af antallet af runder i et punktdiagram:



Igen er modellen kun gyldig indtil vi når 45 runder, for forskellen kan selvfølgelig ikke overstige totalen, men matematisk set kan vi godt fortsætte modelberegningerne som vist. Disse vækst kurver er nu meget simplere end vækstkurverne for Villeneuves og Nelsons skibe som funktion af tiden.

ISBN 9788770668781

Vi gætter derfor på at de simpelthen udvikler sig eksponentielt. Markeres grafen, kan vi højreklikke og vælge Tendenslinje, der sættes til eksponentiel. Samtidigt slår vi ligningen og forklaringsgraden til:



Der er altså tale om en eksponentiel vækst i såvel totalen, der aftager eksponentielt efter ligningen $y=86\cdot e^{-0.03\cdot x}$, som forspringet, der vokser eksponentielt efter ligningen $y=6\cdot e^{0.0286\cdot x}$. Det er især den eksponentielle vækst af forspringet, der er interessant. Det er jo noget helt andet end det konstante forspring i den naive lineære model.

Hvordan kan vi forstå denne eksponentielle vækst? Vender vi tilbage til vækstligningerne

$$N_{n+1}=N_n-0.03\cdot V_n$$
$$V_{n+1}=V_n-0.03\cdot N_n$$

kan vi finde vækstligningen for totalen S_n ved at lægge de to ligninger sammen. Vi finder da

$$S_{n+1}=N_{n+1}+V_{n+1}=(N_n+V_n)-0.03\cdot(V_n+N_n)=S_n-0.03\cdot S_n=0.97\cdot S_n$$

Men det viser jo netop at summen følger en gange-vækst, idet vi i hver runde ganger med konstanten 0.97. I hver runde aftager totalen altså med 3%, hvilket netop viser at totalen følger en eksponentiel vækst givet ved kapitalfremskrivningsformlen

$$S_n=S_0\cdot 0.97^n=86\cdot 0.97^n$$

Hvis vi bemærker at $\ln(0.97)\approx -0.030459$ fås netop Excelformlen $S_n=86\cdot e^{-0.030459\cdot n}$ der af Excel afrundes passende!

Trækker vi tilsvarende vækstligningerne fra hinanden fås vækstligningen for forspringet D_n

$$D_{n+1}=V_{n+1}-N_{n+1}=(V_n-N_n)+0.03\cdot(V_n-N_n)=D_n+0.03\cdot D_n=1.03\cdot D_n$$

ISBN 9788770668781

Men det viser jo netop at differensen også følger en gange-vækst, idet vi i hver runde ganger med konstanten 1.03. I hver runde vokser forspringet altså med 3%, hvilket netop viser at forspringet følger en eksponentiel vækst givet ved kapitalfremskrivningsformlen

$$D_n = D_0 \cdot 1.03^n = 6 \cdot 1.03^n$$

Hvis vi bemærker at $\ln(1.03) \approx 0.029559$ fås netop Excelformlen $S_n = 6 \cdot e^{0.029559 \cdot n}$ der igen af Excel afrundes passende!

Den eksponentielle vækst for totalen og forspringet er altså indbygget i Lanchesters model. Udnyttes det at vi kan finde antal skibe for de to kombattanter ved at lægge taotalen og forspringet sammen, henholdsvis trække dem fra hinanden har vi nu også fundet formlerne for hvordan antal skibe ændres med tiden:

$$N_n = \tfrac{1}{2} \cdot \left((N_n + V_n) - (V_n - N_n) \right) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(S_n - D_n \right) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(86 \cdot 0.97^n - 6 \cdot 1.03^n \right)$$
$$V_n = \tfrac{1}{2} \cdot \left((N_n + V_n) + (V_n - N_n) \right) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(S_n + D_n \right) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(86 \cdot 0.97^n + 6 \cdot 1.03^n \right)$$

Men nok så interessant er det at bemærke, at summen aftager med 3% i hver runde, mens differensen vokser med 3%. Det betyder næsten at deres produkt er konstant, fordi de 3% summen formindskes med i hver runde næsten ophæves af de 3% som differensen forøges med i hver runde. Når det kun er næsten er det på grund af rentes-rente: Starter vi med 100% vil det formindskes til 97%, som derefter vil forøges med 3%, men ikke af 100%! I stedet forøges det med 3% af 97%. Alt i alt vokser produktet derfor med faktoren

$$0.97 \cdot 1.03 = (1 - 0.03) \cdot (1 + 0.03) = 1 - 0.03^2 = 1 - 0.0009 = 0.9991$$

Produktet aftager altså ganske svagt med 0.9 promille i hver runde.

	A	B	C	D	E	F
1	Runder	Nelson	Villeneuve	Total	Forspring	Produkt
2	0	40	46	86	6	516
3	1	38.62	44.8	83.42	6.18	515.5356
4	2	37.276	43.6414	80.9174	6.3654	515.0716
5	3	35.96676	42.52312	78.48988	6.556362	514.6081
			...			
44	42	1.582047	22.3462224	23.92827	20.76418	496.8508
45	43	0.91166	22.298761	23.21042	21.3871	496.4036
46	44	0.242698	22.2714112	22.51411	22.02871	495.9569
47	45	-0.42544	22.2641303	21.83869	22.68958	495.5105
48	46	-1.09337	22.2768936	21.18352	23.37026	495.0645

Tilføjer vi en søjle med produktet ser vi da også at det kun falder fra 516 til 496 i løbet af de 44 runder, som det samlede søslag varer, dvs. det samlede fald er 4%, som vi vil tillade os at ignorere. Lanchester bemærkede altså at

$$(V + N) \cdot (V - N) = V^2 - N^2$$

med god tilnærmelse er konstant. Dette er Lanchesters berømte kvadratlov:

Lanchesters kvadratlov:
De to flåders kampstyrke er proportional med kvadratet på antal skibe.
Forskellen på kampstyrken mellem de to flåder er med god tilnærmelse konstant under slaget, dvs.

$$V^2 - N^2 \approx {V_0}^2 - {N_0}^2$$

ISBN 9788770668781

Da Villeneuve disponerer over 46 skibe og Nelson over 40 skibe er forskellen i kampstyrke givet ved

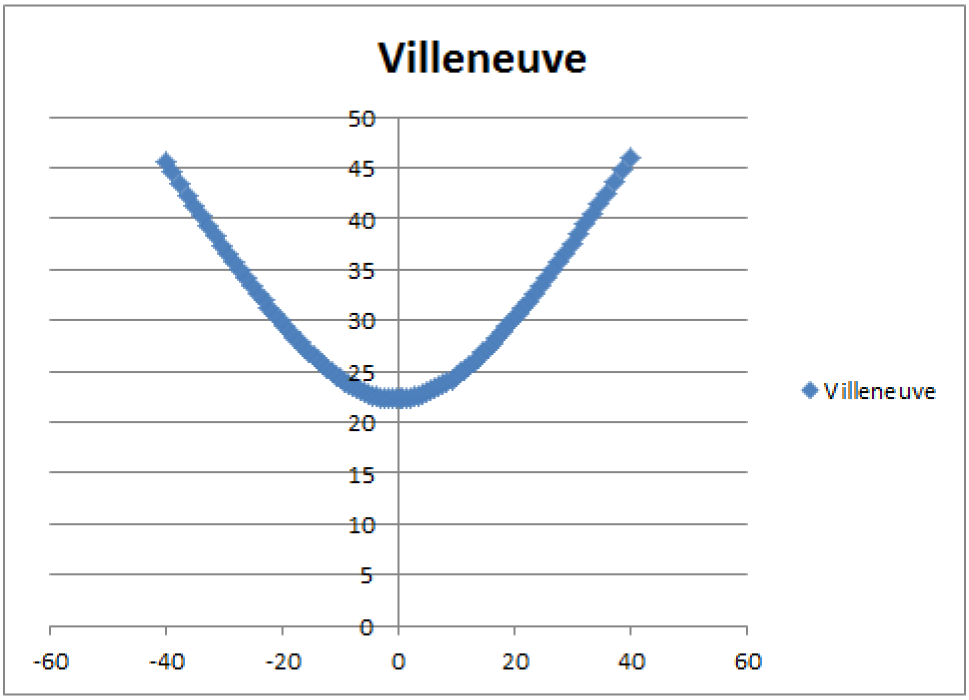
$$46^2 - 40^2 = 86 \cdot 6 = 516$$

Når Nelsons flåde er nedkæmpet har Villeneuve derfor stadigvæk et antal skibe tilbage givet ved

$$\sqrt{516} \approx 22.7$$

I den mere præcise gennemregning i regnearket fandt vi 22.3 skibe tilovers, så kvadratloven er god nok i praksis. Villeneuve beholder altså ca. halvdelen af sine skibe i den virtuelle model.

Bemærkning: Kvadratloven kan også illustreres geometrisk, hvis vi afbilder søslaget i et såkaldt faseplot, hvor vi afsætter Nelsons skibe ud af førsteaksen og Villeneuves skibe op ad andenaksen. Vi markerer altså de to søjler og opretter et punktdiagram:



Slaget starter i øverste højre hjørne i punkt (40,46) og bevæger sig ned mod *y*-aksen. Det er kun den ene halvdel af hyperblen, $V^2 - N^2 = 516$, der er meningsfyldt. Når vi rammer *y*-aksen, dvs. Nelson ikke flere skibe har tilbage, er slaget slut.

Dermed slutter vores diskussion af den diskrete model for det virtuelle slag mellem Nelson og Villeneuve, hvor Nelson altså tabte, fordi vi ikke har fulgt hans brillante strategi! Inden vi kommer tilbage til den er der et kort indspark om den kontinuerte model, som roligt kan springes over i første gennemlæsning!

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

Fra den diskrete model til den kontinuerte model:

Bevægelsesligningerne i Lanchesters model kan omskrives til differensligninger

$$N_{n+1} = N_n - 0.03 \cdot V_n \quad \Leftrightarrow \quad N_{n+1} - N_n = -0.03 \cdot V_n \quad \Leftrightarrow \quad \Delta N = -0.03 \cdot V \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta N}{\Delta n} = -0.03 \cdot V \quad \text{med} \quad \Delta n = 1$$

$$V_{n+1} = V_n - 0.03 \cdot N_n \quad \Leftrightarrow \quad V_{n+1} - V_n = -0.03 \cdot N_n \quad \Leftrightarrow \quad \Delta N = -0.03 \cdot N \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta V}{\Delta n} = -0.03 \cdot N \quad \text{med} \quad \Delta n = 1$$

I den kontinueret model erstattes differensligningen med en differentialligning. VI opfatter da antallet af skibe som en funktion af tiden *t*, der nu varierer kontinuert :

$$\frac{dN}{dt} = -0.03 \cdot V$$
$$\frac{dV}{dt} = -0.03 \cdot N$$

De løses på samme måde som i den diskrete model. Lægges ligningerne sammen fås differentialligningen for summen *S*:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dN}{dt} + \frac{dV}{dt} = -0.03 \cdot (N+V) = -0.03 \cdot S$$

Men det er netop differentialligningen for en aftagende eksponentiel vækst med vækstraten -0.03. Den har som bekendt løsningen

$$S = S_0 \cdot e^{-0.03 \cdot t} = 86 \cdot e^{-0.03 \cdot t}$$

Trækker vi tilsvarende de to differentialligninger fra hinanden fås differentialligningen for differensen *D*:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dV}{dt} - \frac{dN}{dt} = 0.03 \cdot (V-N) = 0.03 \cdot D$$

Men det er netop differentialligningen for en voksende eksponentiel vækst med vækstraten 0.03. Den har som bekendt løsningen

$$D = D_0 \cdot e^{0.03 \cdot t} = 6 \cdot e^{0.03 \cdot t}$$

Da summen og differensen har modsatte vækstrater, ophæver de hinanden når vi ganger dem sammen!

$$S \cdot D = S_0 \cdot e^{-0.03 \cdot t} \cdot D_0 \cdot e^{0.03 \cdot t} = S_0 \cdot D_0$$

I den kontinueret model er Lanchesters kvadratlov altså eksakt:

$$V^2 - N^2 = V_0^2 - N_0^2 = 516$$

Endelig kan vi føre løsningerne for summen og differensen tilbage til løsningerne for de oprindelige koblede differentialligninger:

$$N = \tfrac{1}{2} \cdot (S-D) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(86 \cdot e^{-0.03 \cdot t} - 6 \cdot e^{0.03 \cdot t}\right) \quad , \quad V = \tfrac{1}{2} \cdot (S+D) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(86 \cdot e^{-0.03 \cdot t} + 6 \cdot e^{0.03 \cdot t}\right)$$

ISBN 9788770668781

Nelsons strategi:

Men i virkeligheden vandt Nelson som bekendt slaget! Vi vil nu forsøge at belyse hans strategi i lyset af Lanchesters kvadratlov.

Nelson ønskede ikke at indgå i et direkte stort søslag linje for linje med Villeneuves skibe. Det kan han have mange grunde til. Selv skriver han:

Thinking it almost impossible to bring a Fleet of forty Sail of the Line into a Line of Battle in variable winds, thick weather, and other circumstances which must occur, without such a loss of time that the opportunity would probably be lost of bringing the Enemy to Battle in such a manner as to make the business decisive …

I stedet besluttede han at dele sin styrke i 2 gange 16 skibe samt 8 hurtigt sejlende skibe, der skulle sendes direkte mod fjendens flåde:

I have therefore made up my mind to keep the Fleet in that position of sailing (with the exception of the First and Second in Command) that the Order of Sailing is to be the Order of Battle, placing the Fleet in two Lines of sixteen Ships each, with an Advanced Squadron of eight of the fastest sailing Two-decked Ships, which will always make, if wanted, a Line of twenty-four Sail, on whichever Line the Commander-in-Chief may direct.

Skematisk ser Nelsons plan således ud:

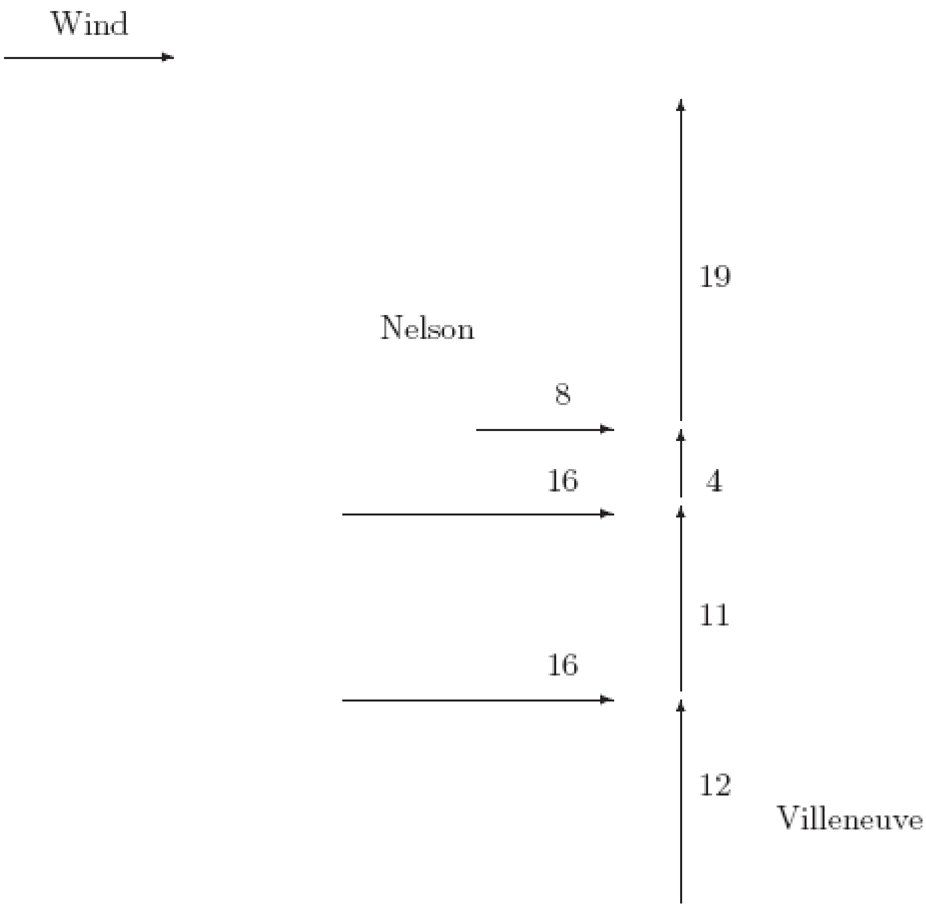


Figure 1: The Nelson Touch

De 8 hurtigt sejlende skibe skal splitte Villeneuves flåde i to dele her angivet som 23 skibe, der holdes hen og 23 skibe, der indgår i et direkte søslag med Nelsons resterende 32 skibe. De 8 skibe sejler direkte mod

ISBN 9788770668781

fjendens flåde og kan derfor til at begynde med ikke skyde på fjendens skibe (kanonerne på krigsskibene peger vinkelret på skibet). Til gengæld fremstår de også med lille tværsnitsareal og er derfor svære at ramme. Og når de gennembryder fjendes rækker er det dem, der har fordelen af at kunne beskyde fjendens skibe mens disse enten må vende eller forsøge at sejle væk.

Ifølge Lanchesters kvadratlov vinder Nelson nu første runde og har efter denne runde 22 skibe tilbage eftersom

$$\sqrt{32^2-23^2}\approx 22.2$$

Skulle de 8 skibe være gået tabt i kampen om at holde de 23 skibe ude af hovedslaget, så ville Villeneuve nu ifølge kvadratloven også have 21 skibe tilbage

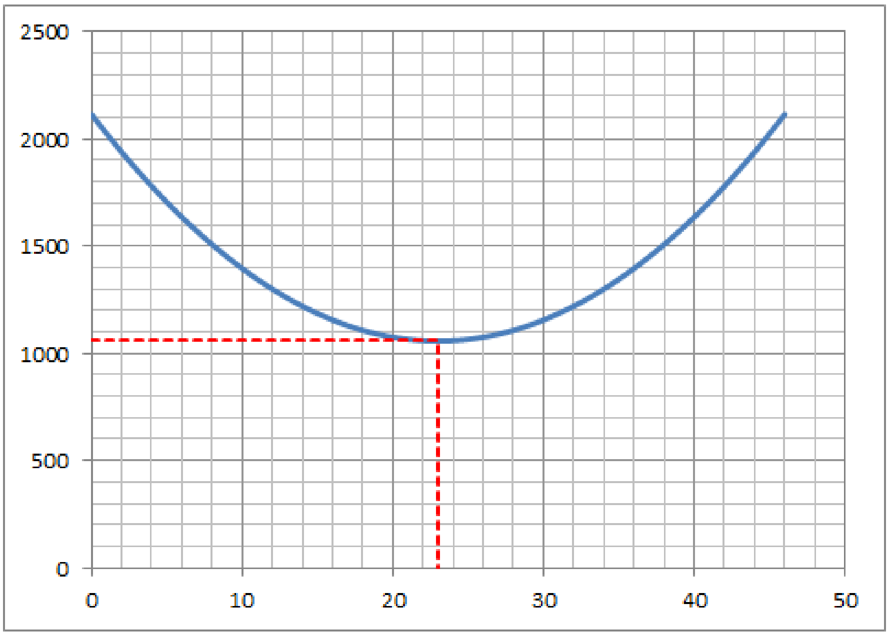
$$\sqrt{23^2-8^2}\approx 21.6$$

Nelson har altså udlignet Villeneuves talmæssige overlegenhed.

Vi kan endda også se matematisk på hvordan Nelson bør splitte den franske flåde. Hvis Nelson splitter x skibe fra, så Villeneuve i stedet har to flåder med henholdsvis x skibe og $46-x$ skibe er den samlede kampstyrke reduceret til

$$x^2+(46-x^2)=2x^2-92x+2116$$

Tegner vi grafen for dette andengradspolynomium ser vi at det har et minimum for $x=23$ hvor kampstyrken er halveret til 1058.



Ideelt set bør Nelson derfor splitte Villeneuves flåde i to lige store dele. Selv bruger han 8 skibe til at splitte flåden med, dvs. hans kampstyrke reduceres til

$$8^2+32^2=1088$$

Det ligger over Villeneuves kampstyrke og Nelson vinder derfor alt andet lige det samlede søslag.

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse
EGMONT

Bemærkning: I det foregående er vi gået ud fra en symmetrisk model. Men modellen kan sagtens udvides til en *asymmetrisk* model af formen:

$$x_{n+1} = x_n - k_1 \cdot y_n$$
$$y_{n+1} = y_n - k_2 \cdot x_n$$

Tricket består i at omdanne denne til en symmetrisk model ved en simpel skalatransformation, idet vi ganger den øverste ligning med $\sqrt{k_2}$ og den nederste ligning med $\sqrt{k_1}$:

$$\sqrt{k_2} \cdot x_{n+1} = \sqrt{k_2} \cdot x_n - k_1 \cdot \sqrt{k_2} \cdot y_n = \sqrt{k_2} \cdot x_n - \sqrt{k_1 \cdot k_2} \cdot \sqrt{k_1} \cdot y_n$$
$$\sqrt{k_1} \cdot y_{n+1} = \sqrt{k_1} \cdot y_n - \sqrt{k_1} \cdot k_2 \cdot x_n = \sqrt{k_1} \cdot y_n - \sqrt{k_1 \cdot k_2} \cdot \sqrt{k_2} \cdot x_n$$

Sætter vi $k = \sqrt{k_1 \cdot k_2}$, $X_n = \sqrt{k_2} \cdot x_n$ og $Y_n = \sqrt{k_1} \cdot y_n$ fås altså den symmetriske model

$$X_{n+1} = X_n - k \cdot Y_n$$
$$Y_{n+1} = Y_n - k \cdot X_n$$

Men så kan vi jo overføre resultaterne fra den symmetriske model og ser at kampstyrken for de to flåder denne gang er givet ved:

$$X^2 = k_2 \cdot x^2$$
$$Y^2 = k_1 \cdot y^2$$

Kvadratloven siger da at forskellen mellem kampstyrkerne med god tilnærmelse er konstant:

$$X^2 - Y^2 = k_2 \cdot x^2 - k_1 \cdot y^2 = k_2 \cdot x_0{}^2 - k_1 \cdot y_0{}^2$$