ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse
EGMONT

Projekt 6.12 Rovdyr-byttedyr - et miniprojekt om koblede differentialligninger

På en ø, hvor der er gulerødder nok, udsættes k kaniner og r ræve. Hvis der ingen ræve var på øen, ville ændringen i kaninbestanden kunne beskrives ved en eksponentiel vækst over tid, dvs. ved differentialligningen

$$\frac{dk}{dt} = c_k \cdot k$$

hvor c_k er en positiv konstant.
Hvis der ikke var nogen kaniner på øen, så ville rævene ikke kunne finde føde, og de ville derfor med tiden uddø. Ændringen i rævebestanden ville derfor kunne beskrives ved en aftagende eksponentiel vækst over tid, dvs. ved differentialligningen

$$\frac{dr}{dt} = -c_r \cdot r$$

hvor c_r er en positiv konstant.

Men da der er både kaniner og ræve tilstede betyder det, at rævene vil begrænse kaninbestandens vækst og kaninerne vil sikre, at rævene ikke dør af sult.

Som model til beskrivelse af denne vekselvirkning opstillede Lotka og Volterra i 1925 følgende model:

$$\begin{cases} \dfrac{dk}{dt} = c_k \cdot k - c_1 \cdot k \cdot r \\ \dfrac{dr}{dt} = -c_r \cdot r + c_2 \cdot k \cdot r \end{cases}$$

hvor c_k , c_r c_1 og c_2 er positive konstanter, og hvor k og r er funktioner af tiden t målt i døgn.

a) Forklar de enkelte led i differentialligningerne, idet $k \cdot r$ i analogi med rygtespredningsmodellen tolkes som det totale antal møder mellem ræve og kaniner.

Vi antager nu, at der fra starten er 50 kaniner, dvs. $k_0 = k(0) = 50$, og 10 ræve, dvs. $r_0 = r(0) = 10$. Vi foretager nu nogle antagelser vedrørende de parametre, der indgår i modellen:

c_k	Vi antager, at $c_k = 0,5$, svarende til at vi antager, at antallet af kaniner ville vokse med ca. 65% pr tidsenhed, hvis de fik lov at vokse frit (positiv eksponentiel vækst).
c_r	Vi antager, at $c_r = 0,2$ svarende til at vi antager, at antallet af ræve ville aftage med ca. 18% pr tidsenhed, hvis der ingen føde var i form af kaniner (negativ eksponentiel vækst).
c_1	Vi antager, at $c_1 = 0,02$ svarende til at vi antager, at rævene vil æde 10 kaniner den første dag, fordi den hastighed, hvormed antallet af kaniner vil ændre sig den første dag så kan beskrives ved: $-c_1 \cdot k_0 \cdot r_0 = -10$, og indsætter vi begyndelsesbetingelserne får vi netop $c_1 = 0,02$.
c_2	Vi antager, at $c_2 = 0,01$ svarende til at vi antager, at 5 ræve vil kunne leve af de 10 kaniner, der dræbes den første dag, idet den hastighed, hvormed antallet af ræve ændrer sig den første dag, kan beskrives ved: $c_2 \cdot k_0 \cdot r_0 = 5$, og indsætter vi begyndelsesbetingelserne får vi netop $c_2 = 0,01$.

b) Opskriv nu de koblede differentialligninger, idet du sætter $c_k = 0,5$, $c_1 = 0,02$, $c_r = 0,2$ og $c_2 = 0,01$.

ISBN 9788770668781

c) Plot retningsfeltet samt den numeriske løsning til de koblede differentialligninger med de to begyndelsesbetingelser, hvor du har antallet af kaniner ud af førsteaksen og antallet af ræve ud af andenaksen. Plot løsningskurverne for antallet af kaniner som funktion af tiden og antallet af ræve som funktion af tiden.

Løsningskurverne viser en vis cyklisk sammenhæng over tid (sæt evt. antallet af beregningstrin op, hvis du ikke ser denne sammenhæng i dine plot) – både i fasediagrammet, hvor vi ser sammenhængen mellem antallet af ræve og antallet af kaniner, og i funktionsplottet, hvor vi ser antallet af kaniner som funktion af tiden og antallet af ræve som funktion af tiden.

d) Hvor lang er perioden for den cykliske udvikling? Aflæs fx afstanden mellem to maksimumspunkter.

e) Hvad sker der med kaninbestanden og rævebestanden over tid?

f) Besvar følgende spørgsmål, idet vi udelukkende ser på den første cyklus.
Hvor mange ræve er der maksimalt føde til? Til hvilket tidspunkt finder vi det maksimale antal ræve?

g) Hvor mange kaniner er der på øen på det tidspunkt, hvor antallet af ræve når sit maksimum i første cyklus? Benyt de koblede differentialligninger til at beregne dette.

Et par af konstanter k^* og r^* kaldes en ligevægt, hvis parret af konstante funktioner $k(t) = k^*$ og $r(t) = r^*$ er løsning til differentialligningerne. Men hvis parret af konstante funktioner skal være løsninger til differentialligningerne, så må det jo betyde, at de afledede skal være nul samtidigt, dvs. der skal gælde, at

$$\begin{cases} \dfrac{dk}{dt} = 0{,}5 \cdot k - 0{,}02 \cdot k \cdot r = 0 \\ \dfrac{dr}{dt} = -0{,}2 \cdot r + 0{,}01 \cdot k \cdot r = 0 \end{cases}$$

og løser vi to ligninger med to ubekendte får vi:

$\text{solve}(0.5 \cdot k - 0.02 \cdot k \cdot r = 0 \text{ and } -0.2 \cdot r + 0.01 \cdot r \cdot k = 0, r, k)$ ▸ $r=0 \text{ and } k=0 \text{ or } r=25. \text{ and } k=20.$

dvs. den trivielle løsning $(k^*, r^*) = (0,0)$ er en ligevægt – dog ikke særlig interessant, men også $(k^*, r^*) = (20,25)$ er en ligevægt, dvs. når der er 20 kaniner og 25 ræve, så er de to populationer i ligevægt.

Plot den fundne løsning med ligevægtspunktet.

Opret nu afslutningsvis *skydere* for parametrene c_k, c_r, c_1 og c_2 samt for *begyndelsesværdierne* k_0 og r_0, og eksperimentér med forskellige sammensætninger af disse.
Bemærk, at parametrene ikke påvirker ligevægten!