ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

Produktionsfunktioner, der opfylder elasticitetskrav, er potenserede Cobb-Douglas funktioner

Den generelle definition på elasticitet har vi i grundbogen formuleret således:

Definition: Elasticitet af en funktion i forhold til en variabel
Lad $f(z)$ være en funktion, der afhænger af en variabel *z*. Ved elasticiteten *e* af *f* i forhold til *z* forstår vi *den relative ændring af f i forhold til den relative ændring af z*. På formel:

$$e(f;z) = \frac{\left(f(z_0+\Delta z) - f(z_0)\right)/f(z_0)}{\Delta z / z_0}$$, eller hvis funktionen er differentiabel:

$$e(f;z) = \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \cdot z_0$$, eller generelt: $$e(f;z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot z$$

Formlen i definitionen kan omskrives således:

$$e(f;z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot z \Leftrightarrow f'(z) = \frac{e(f;z)}{z} \cdot f(z) \qquad (*)$$

I grundbogen har vi vist:

Sætning 1: Tolkning af potenserne i en Cobb-Douglas funktion
For en Cobb-Douglas funktion $f(I,A) = k \cdot I^{\alpha} \cdot A^{1-\alpha}$ gælder der:

α er produktionselasticiteten mht. kapitalen (investeringen), *I*
$1-\alpha$ er produktionselasticiteten mht. arbejdskraften, *A*

Vi vil nu bevise "den omvendte" sætning:

Sætning 2: Produktionsfunktioner er Cobb-Douglas funktuioner
Hvis en funktion *f* af to eller flere variable opfylder en differentialligning af typen (*) for hver af sine variable, hvor $e(f;z)$ er en konstant for hver af de variable, så er *f* en Cobb-Douglas funktion, hvis funktionen yderligere er homogen.

Bevis:
Lad os sige, at *f* er en funktion af de to variable *x* og *y*. Vi holder nu først *y* fast og betragter ligningen (*) som en ligning i *x*

$$f'(x,y_0) = \frac{e(f;x)}{x} \cdot f(x,y_0)$$

Hvis $e(f;z)$ i (*) er en konstant, så lad os betegne den α. Ligningen har da følgende form:

$$f'(x,y_0) = \frac{\alpha}{x} \cdot f(x,y_0)$$

Dette er en lineær første ordens differentialligning, som vi har løst i kapitel 3a:

$$f(x,y_0) = c \cdot \mathrm{e}^{\int \frac{\alpha}{x} dx} \qquad (**)$$

Det ubestemte integral løses først:

$$\int \frac{\alpha}{x}\, dx = \alpha \cdot \int \frac{1}{x}\, dx = \alpha \cdot \ln(x)$$

Vi tager ikke en ubestemt konstant med i løsningejn af integralet, da denne er indeholdt i konstanten *c*.
Vi indsætter nu i (**)

$$f(x,y_0) = c \cdot \mathrm{e}^{\alpha \cdot \ln(x)} = c \cdot \left(\mathrm{e}^{\ln(x)}\right)^{\alpha} = c \cdot x^{\alpha}$$

ISBN 9788770668781

Vi kan foretage denne udregning for alle værdier af y_0. Konstanten *c* vil naturligvis afhænge af y_0, aså lad os skrive det som en funktion:

$$f(x,y_0)=c(y_0)\cdot x^{\alpha} \qquad (***)$$

På helt samme måde kan vi bestemme en løsning, hvis vi holder *x* fast. Her er ligningen:

$$f'(x_0,y)=\frac{\beta}{y}\cdot f(x_0,y)$$

og vi vil få løsningen:

$$f(x_0,y)=d(x_0)\cdot y^{\beta} \qquad (****)$$

Da vi kunne foretage udregningen for alle x_0 og y_0, har vi altså:

$$f(x,y)=c(y)\cdot x^{\alpha}\ (***) \qquad \text{og} \qquad f(x,y)=d(x)\cdot y^{\beta}\ (****)$$

Disse to udtryk er selvfølgelig ens:

$$c(y)\cdot x^{\alpha}=d(x)\cdot y^{\beta}$$

Denne ligning er opfyldt for alle *x* og *y*. Sæt $x=1$:

$$c(y)\cdot 1^{\alpha}=d(1)\cdot y^{\beta}$$

og indsæt dernæst $c(y)=d(1)\cdot y^{\beta}$ i (***):

$$f(x,y)=c(y)\cdot x^{\alpha}=d(1)\cdot y^{\beta}\cdot x^{\alpha}=k\cdot x^{\alpha}\cdot y^{\beta}$$

hvor vi har givet konstanten $d(1)$ navnet *k*.

I bogens gennemgang har vi set, at den egenskab at være homogen, giver $\beta=1-\alpha$.
Dermed er det vist, at funktionen er en Cobb Douglas funktion.