Hvad er matematik? 3
ISBN 9788770668781

website: link fra kapitel 5

Bevis for, at gradienterne står vinkelret på niveaukurverne

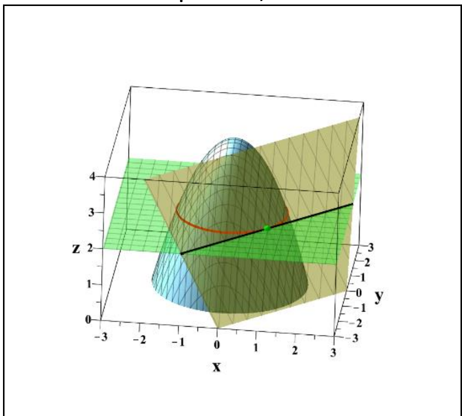
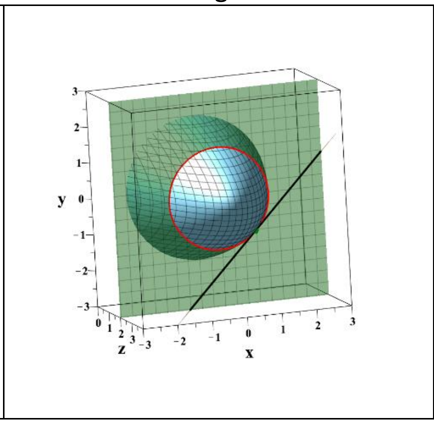
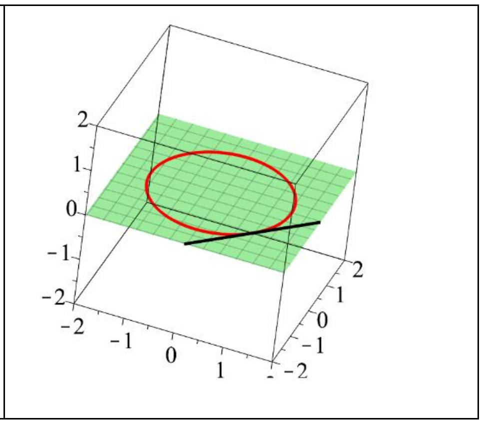
Sætningen lyder i grundbogens formulering på s. 262:

Sætning 7: Gradienterne står vinkelret på niveaukurverne
Lad $f(x,y)$ være en differentiabel funktion, og lad $P(x_0,y_0)$ være et indre punkt i definitionsmængden. Gradienten $\nabla f(x_0,y_0)$ står vinkelret på niveaukurven gennem P.

Der er ingen fast regel, om *nulvektoren* er ortogonal på alle vektorer, eller om den skal behandles som en undtagelse. I dette tilfælde kan vi se, at det er ligegyldigt: Hvis nulvektoren er ortogonal på alle, så er sætningen opfyldt, når gradienten er nulvektoren. Og herefter antager vi gradienten er forskellig fra nulvektoren.

Vi giver to beviser. Det første appellerer til din geometriske sans, og har det problem, at det bygger meget på de tegninger vi kan give. Men detr grundlæggende i beviset er ok.

1. bevis: Tangentlinjen til niveaukurven fremkommer som skæring mellem tangentplan og højdeplan
(*følg med på tegningerne nedenfor*)
Lad $f(x,y)$ være en differentiabel funktion. $P(x_0,y_0)$ er et punkt i det indre af definitionsmængden. $Q(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ er det tilsvarende punkt på grafen. VI tegner grafen, og lægger to planer ind: en *højdeplan* i niveauet $z=f(x_0,y_0)$, og en *tangentplan* i punktet Q. Vi lægger også højdekurven ind, som er skæringen mellem højdeplanen og grafen (den røde kurve).
To planer skærer hinanden i en ret linje – den sorte linje på tegningen.Da linjen ligger i tangentplanen er linjen en tangentlinje til grafen. Da linjen ligger i højdeplanen er linjen en tangentlinje til den røde højdekurve. Det er illustrete på de to første tegninger, set fra siden og set fra oven. På den tredje tegning er det først ned i planen, hvor vi ser niveaukurven med tangenten.

Lad os nu se på ligningerne:
På side 263 udledes ligningen for tangentplanen til grafen for *f* i punktet $Q(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$:

$$z=z_0+p\cdot(x-x_0)+q\cdot(y-y_0)$$, hvor *p* og *q* er de partielle afledede i $P(x_0,y_0)$.

Ligningen for højdeplanen er

$$z=z_0$$, hvor $z_0=f(x_0,y_0)$

Skæringslinjen må så opfylde:

$$z_0=z_0+p\cdot(x-x_0)+q\cdot(y-y_0)$$, der reduceres til:

$$0=p\cdot(x-x_0)+q\cdot(y-y_0)$$

Dette kan omskrives til et skalarprodukt:

ISBN 9788770668781

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0$$

Dette er altså ligningen for tangenten til niveaukurven, hvor vi har ført situationen ned i planen. Men det er også ligningen for en ret linje gennem $P(x_0, y_0)$ og med normalvektoren: $\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x'(x_0, y_0) \\ f_y'(x_0, y_0) \end{pmatrix}$

Konklusion: **Gradienten er ortogonal på niveaukurvens tangent og dermed på niveaukurven**.

2. bevis. Niveaukurven er lokalt graf for en reel funktion, og den afledede findes ved sammensat differentiation

Vi har antaget, at gradienten er forskellig fra nulvektoren. Så er mindst en af koordinaterne forskellig fra 0. Lad os antage:

$$f_y'(x_0, y_0) \neq 0$$

De funktioner, vi betragter, har alle kontinuerte afledede (de er det man i matematik kalder C^1 -funktioner)
Hvis en funktion er forskellig fra 0 i et punkt, for eksempel er den positiv, så kan vi pga kontinuiteten afgrænse et område omkring punktet, hvor funktionen er positiv i hele dette område.

Hvis niveaukurven havde lodret tangent i $P(x_0, y_0)$, så betød det, at i *y*- aksens retning ville der i punktet $Q(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ikke være nogen tilvækst eller fald på grafen. Men så ville $f_y'(x_0, y_0) = 0$, hvad vi netop har antaget den ikke er. Så der er ikke lodret tangent på niveaukurven i det punkt. Og det er der heller ikke noget sted i det område, vi har afgrænset.
Det betyder bl.a., at vælger vi et *x* i det område og går lodret op, så er der ét skæringspunkt *y* med niveaukurven. Dette *y* kan vi altså opfatte som en funktion af *x*: $y = r(x)$.

I det område vi har afgrænset er niveaukurven derfor beskrevet ved punkterne $\left(x, r(x)\right)$.
Da det er en niveaukurve, er funktionsværdien af *f* på kurven konstant:

$$f(x, r(x)) = c$$

En konstant funktion har differentialkvotient = 0:

$$\left(f(x, r(x))\right)' = 0$$

Vi differentierer sammensat:

$$\nabla f(x, r(x)) \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ r'(x) \end{pmatrix} = 0 \text{ , og specielt:} \qquad \nabla f(x_0, r(x_0)) \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ r'(x_0) \end{pmatrix} = 0$$

$r(x_0) = y_0$, så her står:

Gradienten $\nabla f(x_0, y_0)$ er ortogonal på vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ r'(x_0) \end{pmatrix}$

Men denne vektor er jo tangentvektor til grafen for $y = r(x)$, dvs til niveaukurven.

Konklusion: Gradienten $\nabla f(x_0, y_0)$ er ortogonal på niveaukurven

Bemærkning til bevis nr 2. Beviset er en variant af et af de mest berømte – og vigtige – resultater i videregående analyse, det som hedder *Implicit Function Theorem*. Det er et vigtigt og berømt resultat, fordi hovedparten af de ligninger, vi kan opstille, og som udtrykker variabelsammenhænge, har en sådan karakter, at vi ikke kan omskrive til traditionelle funktionsudtryk. Men vha Implicit Function Theorem kan vi argumentere for, at i teorien findes der (lokalt) funktionsudtryk, og vi kan ovenikøbet differentiere sådanne funktioner - ud fra de givne ligninger - selv om vi ikke har et funktionsudtryk