ISBN 9788770668781

website: link fra kapitel 5

L&R Uddannelse EGMONT

Differentiabilitet i to dimensioner formuleret med epsilonfunktioner

I grundbogens afsnit 6 side 254 gives følgende definition på at en funktion af to variable er differentiable:

> **Definition: Differentiabilitet**
>
> En funktion $f(x,y)$ siges at være differentiabel i et punkt (x_0,y_0), hvis grafen er lokalt plan i punktet $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, dvs. hvis grafen kan tilnærmes vilkårlig tæt med en plan, blot vi zoomer tilstrækkelig langt ind.
>
> Hvis $f(x,y)$ er differentiable i alle punkter, siger vi blot, at f er differentiabel.

Da vi undersøgte differentiabilitet af funktioner af én variabel, og skulle oversætte ”lokalt lineær” til formelsprog, kunne vi trække på vores viden om linjens ligning. Vi har på dette tidspunkt ikke en tilsvarendee viden om ligningen for en plan i rummet. Men det er ikke overraskende at udtrykket for linjens ligning:

$$y = y_0 + a\cdot(x - x_0) = y_0 + a\cdot h$$

generaliseres til et udtryk for planens ligning af formen:

$$z = z_0 + a\cdot(x - x_0) + b\cdot(y - y_0) = z_0 + a\cdot h + b\cdot k$$

I afsnit 7, s 283 i grundbogen viser vi faktisk, at ligningen for en tangentplan har denne form.

Vi vil anvende detet udtryk for planens ligning til at oversætte den sproglige defi9nition g9vet6 i definitionen tiol formel-sprog:

> **Definition: Differentiabilitet med formel-sprog**
>
> En funktion $f(x,y)$ siges at være *differentiabel* i et punkt $(x_0\,,\,y_0)$, hvis der findes tal *a* og *b*, og en epsilonfunktion $E(h,k)$, så der i et område omkring $(x_0\,,\,y_0)$ gælder, at:
>
> $$f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0) + a\cdot h + b\cdot k + E(h,k)\cdot\left|(h,k)\right|,$$
>
> hvor $\left|(h,k)\right|$ angiver længden af vektoren (h,k).
>
> Hvis dette er tilfældet, så kaldes tallene *a* og *b de partielle afledede*. Vi anvender to slags notation:
>
> $$a = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \text{ og } b = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \qquad \text{og} \qquad a = f'_x(x_0,y_0) \text{ og } b = f'_y(x_0,y_0)$$

Bemærkning 1. Ved hjælp af Pythagoras får vi: $\left|(h,k)\right| = \sqrt{h^2+k^2}$, og man kan se definitionen skrevet med dette udtryk:

$$f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0) + a\cdot h + b\cdot k + E(h,k)\cdot\sqrt{h^2+k^2}$$

Bemærkning 2. En epsilonfunktion af to variable defineres som vi kemnder det. Den skal opfylde to kriterier:

- $E(0,0) = 0$
- Når $\left|(h,k)\right| = \sqrt{h^2+k^2} \to 0$ vil $E(h,k) \to 0$

Øvelse.

Vis selv, at $\sqrt{h^2+k^2} \to 0$ *netop når* $h \to 0$ *og* $k \to 0$