Projekt 5.9 Funktioner med partielle afledede behøver ikke være differentiable

Differentiabilitet for funktioner af to variable defineres *sprogligt* på samme vis som for funktioner af én variable: Funktionerne er *lokalt lineære*, henholdsvis *lokalt plane*. Når vi giver dette et formeludtryk med epsilonfunktioner er der stadig tale om en simpel generalisering fra én til to dimensioner:

Definition: Differentiabilitet med formel-sprog
En funktion $f(x,y)$ siges at være *differentiabel* i et punkt (x_0, y_0), hvis der findes tal *a* og *b*, og en epsilonfunktion $E(h,k)$, så der i et område omkring (x_0, y_0) gælder, at:

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + a\cdot h + b\cdot k + E(h,k)\cdot\left|(h,k)\right|,$$

hvor $\left|(h,k)\right|$ angiver længden af vektoren (h,k).
Hvis dette er tilfældet, så kaldes tallene *a* og *b de partielle afledede*. Vi anvender to slags notation:

$$a = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \text{ og } b = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \qquad \text{og} \qquad a = f'_x(x_0,y_0) \text{ og } b = f'_y(x_0,y_0)$$

Det er straks en helt anden sag, hvis man kun arbejder med at indføre differentiabilitet og differentialkvotienter via differenskvotienter og med brug af tretrinsreglen. Man kan definere retningsafledet og specielt de partielt afledede vha differenskvotienter. Men en funktion kan have retningsafledede i alle retninger uden at være differentiabel!

Problemet med denne tilgang er, at den er én-dimensional. Der findes uendeligt mange forskellige måder hvorpå man kan nærme sig et punkt i planen – rette linjer, parabelbuer, spiraler og en masse vi ikke har ord for. Men uanset hvilket kurve, så vil de aldrig fange det todimensionale.

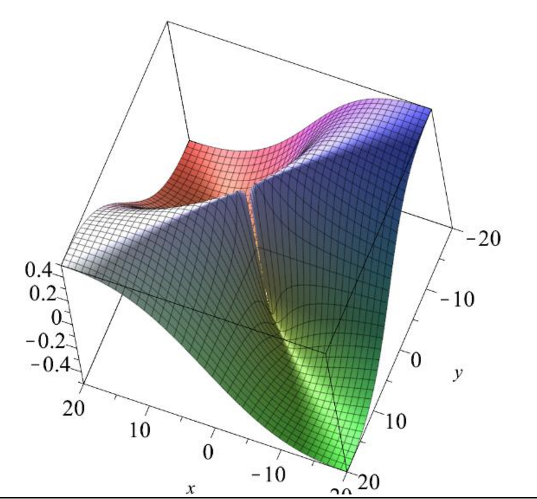
Som det fremgår af definitionen er begrebet partielle afledede uhyre vigtigt – de to udgør fx koordinaterne i gradienten. Men det er vigtigt at huske, at de partielle afledede kan eksistere uden det gør funktionen differentiabel. Deltag selv i undersøgelsen af nedenstående eksempler:

Eksempel 1.

Betragt funktionen:

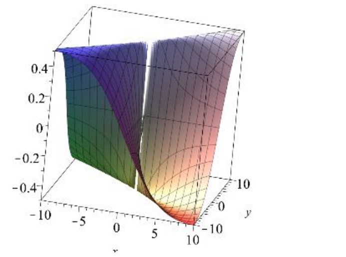
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2}, \text{ når } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ når } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

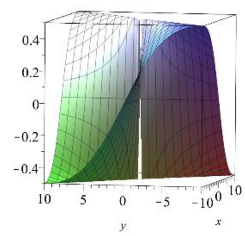
Når vi er på *x*-aksen er $f(x,0) = \dfrac{x\cdot 0}{x^2+0^2}$, når $x \neq 0$.
Men dette udtryk er jo 0. Og i $(0,0)$ er funktionsværdien også 0.
Så funktionen er på *x*-aksen reduceret til at være nul-funktionen
Denne funktion har naturligvis en afledet: $f'_x(x,0) = 0$ for alle *x*,
og specielt: $f'_x(0,0) = 0$
Argumenter selv for, at $f'_y(0,y) = 0$ for alle *y*, og specielt:
$f'_y(0,0) = 0$



Men funktionen er ikke differentiabel i $(0,0)$, den er faktisk slet ikke kontinuert:

Grænseværdien af f, når vi bevæger os ind mod 0 ad x-aksen er 0
Grænseværdien af f, når vi bevæger os ind mod 0 ad y-aksen er 0
Men prøv nu at se på en bevægelse ind mod 0 , hvor vi følger linjen $y = x$.
Vis at grænseværdien her bliver $\frac{1}{2}$.





Prøv selv at undersøge den retningsafledede langs linjen $y = x$ ud fra differenskvotienten, og vis, at denne går mod uendelig, når vi nærmer os $(0,0)$.
Illustrationerne viser, hvor svært det kan være af en tegning alene at afgøre spørgsmål om kontinuitet og differentiabilitet. Bortset fra problemet i $(0,0)$, ser funktionsudtrykket jo ikke specielt "sær" ud.

Eksempel 2.

Betragt funktionen

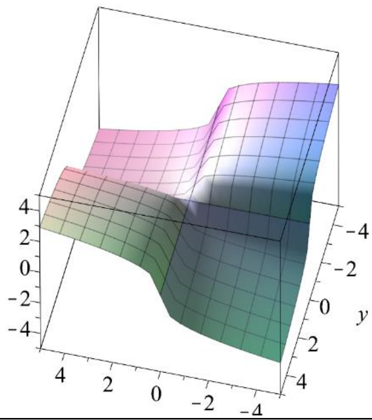
$$g(x,y) = (x \cdot y)^{1/3}$$

Dm er hele planen, idet vi definerer den tredje rod af negative tal som negative tal:

$$(-27)^{1/3} = -3 \text{ , fordi } (-3)^3 = -27$$

(dvs vi opfatter *ikke* funktionen som en potensfunktion, der har begrænset Dm til positive tal).
Grafen for g vil se nogenlunde således ud

Funktionen er oplagt kontinuert overalt, også i $(0,0)$.



Hvad med de partielle afledede?
Omskriv funktionen til: $g(x,y) = x^{1/3} \cdot y^{1/3}$, og vis, at for x og y forskellige fra 0 har vi:

$$g'_x(x,y) = \tfrac{1}{3} x^{-2/3} \cdot y^{1/3} \qquad \text{og} \qquad g'_y(x,y) = \tfrac{1}{3} x^{1/3} \cdot y^{-2/3}$$

For ethvert punkt på x-aksen bortset fra i Origo har vi: $g'_x(x,0) = \frac{1}{3} x^{-2/3} \cdot 0^{1/3} = 0$
Men i ingen punkter på x-aksen findes $g'_y(x,0)$! Hvorfor? Prøv at zoome ind og forklar resultatet ud fra dit grafiske billede,

For ethvert punkt på y-aksen bortset fra i Origo har vi: $g'_y(0,y) = \frac{1}{3} 0^{1/3} \cdot y^{-2/3} = 0$
Men i ingen punkter på y-aksen findes $g'_x(0,y)$! Hvorfor? ? Prøv at zoome ind og forklar resultatet ud fra dit grafiske billede.

På hele x-aksen har vi $g(x,0) = (x \cdot 0)^{1/3} = 0$. Derfor har vi også, at $g'_x(0,0) = 0$
På hele y-aksen har vi $g(0,y) = (0 \cdot y)^{1/3} = 0$. Derfor har vi også, at $g'_y(0,0) = 0$
Men g er ikke differentiabel i $(0,0)$. Betragt fx retningen bestemt af linjen $y = x$. På denne linje er funktionen reduceret til:

$$g(x,y) = (x \cdot y)^{1/3} = (x \cdot x)^{1/3} = x^{2/3}$$

Den retningsafledede, (uden hensyn tiol om retningsvektoren er en enhedsvektor), er her:

$$g'_{y=x}(x,y) = \tfrac{2}{3} \cdot x^{-1/3}$$

Når vi bevæger os ind mod $(0,0)$, vil værdien af den retningsafledede gå mod uendelig.

Prøv nu selv at definere funktioner med regneforskrifter i slægt med de ovennævnte, undersøg de partielle afledede, og afgør om funktionerne er kontinuerte og om de er differentiable