ISBN 9788770668781

Projekt 5.8 Ligningen for tangentplanen – bevis for sætning 8

Linjens ligning

I den analytiske geometri i to dimensioner udledte vi en ligning for en linje gennem et bestemt punkt $A(x_0, y_0)$. Metoden var følgende: Betragt en egentlig vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, vinkelret på linjen og afsat i punktet A. Et punkt $P(x, y)$ ligger på linjen, hvis forbindelsesvektoren fra A til P er vinkelret på $\vec{n}$. Men at to egentlige vektorer er ortogonale kan udtrykkes ved, at deres skalarprodukt er 0:

$$\vec{n} \bullet \overrightarrow{AP} = 0$$

Denne ligning er også i tilfældet, hvor P ligger i A, dvs. når forbindelsesvektoren er nulvektoren. Dvs. altid. Ligningen kan så skrives ud med koordinater:

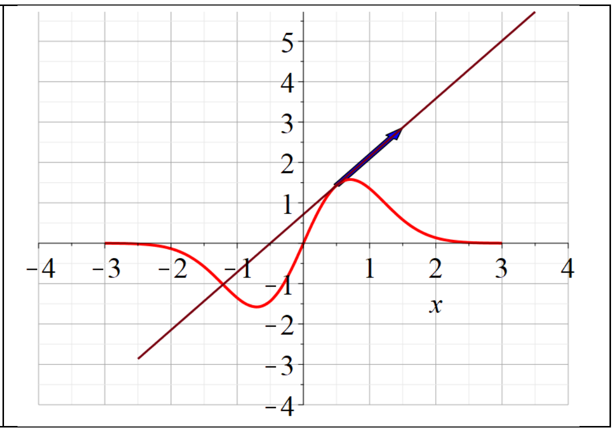
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$$

Situationen er:

Denne ligning er også i tilfældet, hvor P ligger i A, dvs. når forbindelsesvektoren er nulvektoren. Dvs. altid. Ligningen kan så skrives ud med koordinater:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$$

Situationen er:



Planens ligning

I den analytiske geometri i tre dimensioner kan man tilsvarende udlede en ligning for en plan gennem et bestemt punkt $A(x_0, y_0, z_0)$. Metoden er følgende: Betragt en egentlig vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, vinkelret på planen og afsat i punktet A. Et punkt $P(x, y, z)$ ligger i planen, hvis forbindelsesvektoren fra A til P er vinkelret på $\vec{n}$. Men at to egentlige vektorer er ortogonale kan udtrykkes ved, at deres skalarprodukt er 0:

$$\vec{n} \bullet \overrightarrow{AP} = 0$$

Denne ligning er også i tilfældet, hvor P ligger i A, dvs. når forbindelsesvektoren er nulvektoren. Dvs. altid. Ligningen kan så skrives ud med koordinater:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0$$

Dette er altså den generelle ligning for en plan i rummet. Det er let at se, hvordan dette kan generaliseres til rum af flere dimensioner.

Tangentplanens ligning

Vi tegner først situationen op:

ISBN 9788770668781

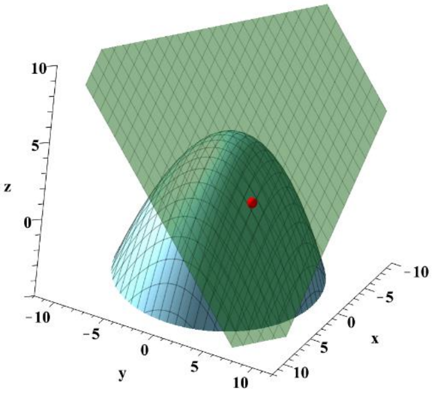
En funktion er differentiabel i et punkt, hvis den er lokalt plan – se illustrationen. Her er indtegnet et udsnit af grafen for:

$$f(x,y) = -0.1 \cdot x^2 - 0.1 \cdot y^2 + 4$$

Punktet er: $P(3,4,f(3,4)) = P(3,4,1.5)$

Ligningen for denne plan undersøges, ved at vi konstruerer vektorer i planen, afsat ud fra punktet, og i de to retninger bestemt af akserne.

Når vi snitter ned lodrette planer får vi snitgrafer, hvor tangentplanen snittes til en tangentlinje. Dette er de sorte linjer på de to illustrationer af snitgraferne nedenfor.



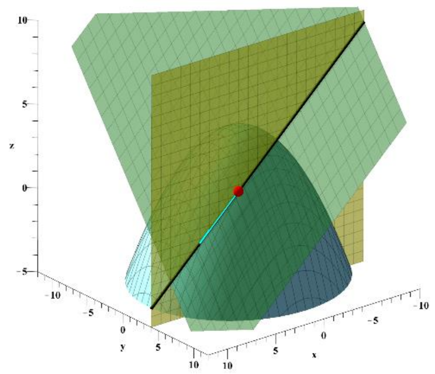
Da det er de to akse-retninger, er de afledede til snitfunktionerne netop de partielt afledede. Dvs at en vektor i tangentlinjens retning her dannes af: "1 frem, hældningen op / eller ned". Dvs i x-aksens retning:

$$\left(1,0,\frac{d}{dx}\left(f(x,y)\right)\right).$$

Kontroller det er $(1,0,-0.6)$

Vektoren indtegnes - den cyanfarvede.

Vi har skaleret lidt op og afsat: $(4,0,-2.4)$



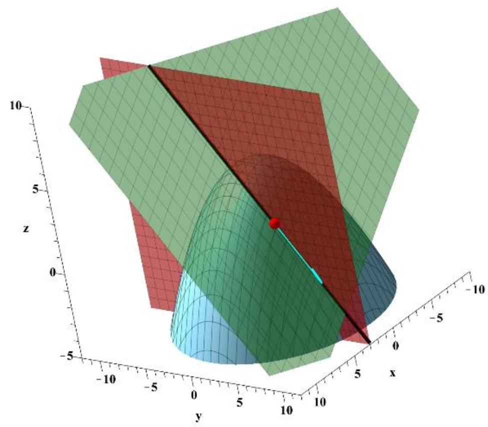
og i y-aksens retning:

$$\left(0,1,\frac{d}{dy}\left(f(x,y)\right)\right)$$

Kontroller det er $(0,1,-0.8)$

Vektoren indtegnes - den cyanfarvede.

Vi har skaleret lidt op og afsat: $(0,4,-3.2)$



De to vektorer, vi nu har fundet i planen, tegner vi ind i samme tegning, og sammen med dem indtegnes en vektor, der står vinkelret på de to, dvs vinkelret på planen.

Vi justerer samtidig tegningen så skaleringen i de forskellige retninger er den samme (*scaling= constrained*). Derved sikrer vi, at hvad der er ortogonalt også fremtræder sådan

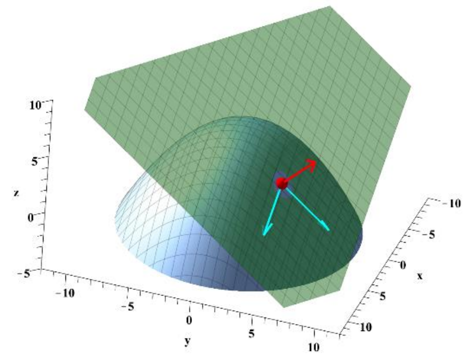
ISBN 9788770668781

I analytisk geometri i 3d udleder man formlen for en vektor der er vinkelret på to andre. – det indgår i projekt 7.17 i *Hvad er matematik*? 2 – og man lærer at konstruere denne vektor, der kaldes *krydsproduktet* af de to givne.

Det er den røde vektor på tegningen.
Vi udregner med et værktøjsprogram:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -0.6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kontroller, at den fundne vektor er ortogonal til de to vektorer i planen.
Da den er ortogonal til de to er den ortogonal til alle linearkombinationer af de to, og dermed til planen.



Planen kan beskrives som de punkter, hvor *forbindelsesvektoren* fra punktet $P(3,4,1.5)$ til et frit punkt $Q(x,y,z)$, står vinkelret på "den røde vektor". Den røde vektor kaldes for en normalvektor som vi kender det fra 2d.

Planens ligning kan altså opskrives som : $\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \\ z-1.5 \end{pmatrix} = 0$

Udregnes og reduceres dette med et værktøj, får vi

$$0.6\cdot(x-3)+0.8\cdot(y-4)+(z-1.5)=0 \quad \text{eller:}$$
$$0.6x+0.8y+z-6.5=0$$

Den generelle tangentligning
Ovenstående udregninger havde ikke noget specielt med punktet eller vektorerne at gøre. Funktionen $f(x,y)$ er differentiabel i omegnen af et indre punkt (x_0,y_0), og har derfor en tangentplan i punktet (x_0,y_0,z_0), hvor vi har sat $z_0=f(x_0,y_0)$.
Når vi skærer tangentplanen med lodrette snitplaner i henh. *x*-aksens og *y*-aksens retninger, får vi tangentlinjer til snitkurverne.
Disse tangentlinjer har retningsvektorer bestemt som i planen: $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$, hvor α er hældningskoefficienten,

dvs: "1 frem, hældningen op eller ned". Og hældningskoefficienterne er jo de partielt afledede.

På snitplanen er enten *x* eller *y* en fast værdi, så vektorens udstrækning i den retning er 0. Dvs de to vektorer er:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x'(x_0,y_0) \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y'(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

I analytisk rumgeometri (3d) lærer man at bestemme en normalvektor $\vec{n}$ til en plan, ud fra to ikke-parallelle vektorer i planen, $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
Denne vektor kaldes for *krydsproduktet*, og det skrives: $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$.

ISBN 9788770668781

Et værktøjsprogram kan også regne symbolsk og vi får

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\f_x'(x_0,y_0)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\f_y'(x_0,y_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-f_x'(x_0,y_0)\\-f_y'(x_0,y_0)\\1\end{pmatrix}$$

Tangentens ligning kan derfor opskrives som et prikprodukt, der sættes lig med 0:

$$\vec{n}\bullet\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}=0$$, jfr første side.

Indsæt nu formlen for $\vec{n}$:

$$\begin{pmatrix}-f_x'(x_0,y_0)\\-f_y'(x_0,y_0)\\1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}=0$$

Udregn det:

$$-f_x'(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)-f_y'(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)+z-z_0=0$$

Isoler *z*: $$z=z_0+f_x'(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Ofte skriver vi formlen lidt enklere:

Ligning for tangentplanen i punktet (x_0,y_0,z_0), hvor $z_0=f(x_0,y_0)$:

$$z=z_0+p\cdot(x-x_0)+q\cdot(y-y_0)$$

hvor $p=f_x'(x_0,y_0)$ og $q=f_y'(x_0,y_0)$