ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse
EGMONT

Projekt 5.6 Kvadratisk programmering i to variable

I lineær programmering ser vi på lineære kriteriefunktioner i to variable. I virkelighedens verden vil kriteriefunktionen dog også ofte være ikke-lineær, fx kvadratisk. Den kvadratiske programmering er særlig vigtig, fordi man i mange tilfælde vil kunne erstatte en ikke-lineær kriteriefunktion med *et approksimerende andengradspolynomium* og stadigvæk bibeholde væsentlige træk ved modellen. *Det approksimerende andengradspolynomium* findes som et Taylorpolynomium, fx hva et værktøjsprogram.

Eksempel: Eksamensopgave hhx , A-niveau
En virksomhed producerer og afsætter bl.a. varerne A og B.
Prisen pr. enhed $p(x)$ af vare A er givet ved

$$p(x) = -0{,}4x + 20 \;,\; 0 < x < 50$$

hvor *x* angiver afsætningen pr. dag af vare A.
Prisen $q(y)$ pr. enhed af vare B er givet ved

$$q(y) = -0{,}1y + 10 \;\;, 0 < y < 100$$

hvor *y* angiver afsætningen pr. dag af vare B.
Omsætningen for en vare kan bestemmes ved

omsætning = afsætning · pris pr. enhed

a) Gør rede for, at den samlede omsætning pr. dag for vare A og vare B kan bestemmes ved

$$O(x,y) = -0{,}4x^2 + 20x - 0{,}1y^2 + 10y$$

Niveaukurven $N(t)$ svarer til $O(x,y) = t$.

b) Gør rede for, at $N(250)$ er en ellipse med ligningen

$$\frac{(x-25)^2}{625} + \frac{(y-50)}{2500} = 1$$

og tegn denne samt begrænsningsområdet i et koordinatsystem.

c) Bestem den afsætning af vare A og den afsætning af vare B, der skal produceres og afsættes pr. dag for at få den størst mulige samlede omsætning pr. dag.

Efterfølgende underlægges den samlede daglige produktion af vare A og vare B følgende begrænsning:

$$x + y \leq 50\,.$$

d) Bestem den afsætning af vare A og den afsætning af vare B, der skal produceres og afsættes pr. dag for at få den størst mulige samlede omsætning pr. dag, når der skal tages hensyn til nævnte begrænsning.

Opgaven falder i to dele, hvor den første del (*a*, *b* og *c*) handler om at finde et maksimumspunkt, der ligge indenfor polygonområdet, mens den anden del (*d*) handler om at finde et maksimumspunkt, der ligger på randen af polygonområdet.

1. Det optimale punkt ligger indenfor polygonområdet

Denne gang er fokus på kriteriefunktionen. Den samlede omsætning er *summen* af afsætningerne for de to varer A og B. Den samlede omsætning er derfor givet ved

$$O(x,y) = x \cdot p(x) + y \cdot q(y)$$

Indsættes udtrykkene for priserne per enhed fås som ønsket i det første spørgsmål

$$\begin{aligned} O(x,y) &= x \cdot (-0{,}4x + 20) + y \cdot (-0{,}1y + 10) \\ &= -0{,}4 \cdot x^2 + 20 \cdot x - 0{,}1 \cdot y^2 + 10 \cdot y \end{aligned}$$

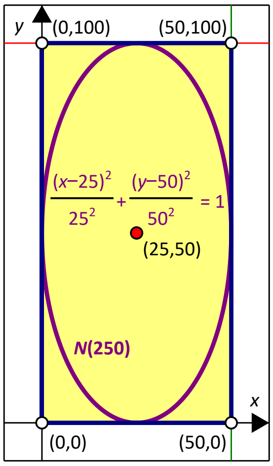
Der er altså tale om et andengradspolynomium i to variable. Dermed har vi styr på det første spørgsmål.

ISBN 9788770668781

Dernæst skal vi have styr på *begrænsningsområdet*, der er fastlagt ved de to dobbeltuligheder

$$0 < x < 50, \quad 0 < y < 100$$

Der er altså tale om et rektangel med bredde 50 og højde 100. Vi har nu også fået styr på *mulighedsområdet*.



Vi har tidligere fundet den kvadratiske omsætningsfunktion:

$$O(x,y) = -0{,}4 \cdot x^2 + 20x - 0{,}1 \cdot y^2 + 10 \cdot y\,.$$

Det er denne funktion vi skal *maksimere* i polygonområdet, så vi ser på nogle *niveaukurver*, i første omgang niveaukurven $N(250)$, der altså har ligningen

$$-0{,}4 \cdot x^2 + 20x - 0{,}1 \cdot y^2 + 10 \cdot y = 250$$

Udfører vi en kvadratkomplettering af omsætningsfunktionen – gerne med værktøjsprogram – fås

$$\text{CompleteSquare}(O(x,y),x,y) \quad \blacktriangleright \quad 500 - \frac{2 \cdot (x-25)^2}{5} - \frac{(y-50)^2}{10}$$

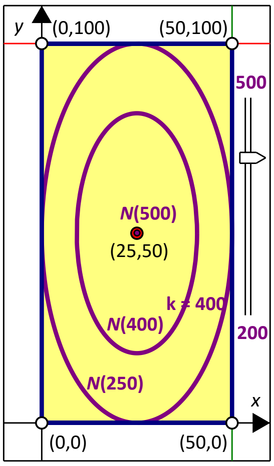
Det viser for det første, at omsætningsfunktionen har toppunkt i punktet $(x,y) = (25,50)$ med omsætningen 500 (hvor det så bliver afgørende, at toppunktet ligger inden for kriterieområdet!).
For det andet viser det, at niveaukurven er en ellipse med ligningen

$$500 - \frac{2 \cdot (x-25)^2}{5} - \frac{(y-50)^2}{10} = 250 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-25)^2}{625} + \frac{(y-50)^2}{2500} = 1$$

dvs. ellipsen har centrum i (25,50) – der ligger midt i kriterieområdet – samt storeakse $\sqrt{2500} = 50$ (langs *y*-aksen!) og lilleakse $\sqrt{625} = 25$ (langs *x*-aksen). Grafen for ellipsen tegnes ind i kriterieområdet og vi er igennem det andet spørgsmål.

Faktisk kan vi som vist lige så godt tegne en dynamisk niveaukurve $O(x,y) = k$ ved hjælp af en skyder **k**, der fx kan løbe fra 200 til 500 i trin af 10. Vi benytter da kvadratkompletteringen til at vise, at den generelle niveaukurve er en ellipse med centrum i (25,50) og halvakser

$$a = \sqrt{\tfrac{5}{2} \cdot (500-k)} \quad \text{og} \quad b = \sqrt{10 \cdot (500-k)}$$



Vi ser da, at niveaukurverne trækker sig sammen omkring deres centrum og at de tilsyneladende forsvinder, når **k** når værdien 500. Vi ser også, at centrum for ellipserne ligger *inde i* kriterieområdet.

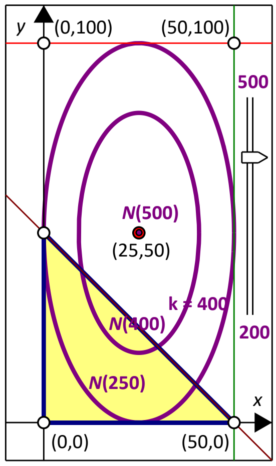
Konklusion: Omsætningen har maksimum i det fælles centrum $x = 25$ og $y = 50$, dvs. den optimale produktion er givet ved 25 enheder af vare A og 50 enheder af vare B. Den tilhørende maksimale fortjeneste er givet ved $O(25,50) = 500$.

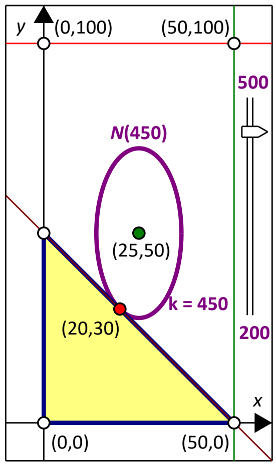
ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

2 Det optimale punkt ligger på randen af polygonområdet

Til sidst indlægges den yderligere begrænsning $x+y\leq 50$, dvs. den samlede produktion kan højst være på 50 enheder. Kriterieområdet snævres da ind som vist til en retvinklet trekant, hvor ellipsernes centrum nu falder uden for kriterieområdet! Den tidligere fundne optimale produktion kan altså ikke længere opretholdes.





Det ser denne gang ud som om ellipsen slipper kriterieområdet for omsætningen k = 450 i skæringspunktet $(20,30)$. Det kan vi nu prøve at underbygge med en analytisk beregning under brug af substitutionsmetoden. Kanten af kriterieområdet har ligningen $y=-x+50$. Indsættes/substitueres den i forskriften for omsætningsfunktionen fås et andengradspolynomium i en variabel

$$O(x,-x+50)=-\tfrac{1}{2}\cdot x^2+20x+250$$
$$=450-\frac{(x-20)^2}{2}$$

Dette andengradspolynomium har toppunkt i $x=20$.
Den tilhørende *y*-værdi langs kanten er givet ved $y=-20+50=30$.

Den optimale produktion skal altså nu flyttes til 20 enheder af vare A og 30 enheder af vare B. Den tilhørende omsætning er givet ved $O(20,30)=450$. Dermed har vi løst hele opgaven.

Øvelse 1: Kontrol af løsningerne i regneark

Som ved de lineære programmeringsmodeller kan oplysningerne i opgaven samles i et skema, der viser hvilke variable med tilhørende begrænsninger, der er på spil:

Emne\Produktion (antal per dag)	Kapacitet for A	Kapacitet for B	Samlet Kapacitet
A	1	0	1
B	0	1	1
Begrænsning (antal per dag)	50	100	50
Produktions-betingelse	$x<50$	$y<100$	$x+y<50$

Pris Per enhed
$-0.4\cdot x+20$
$-0.1\cdot y+10$

Uafhængige variable (antal)	Værdi
$x=$	
$y=$	
Afhængig var.: Omsætningen	$x\cdot p(x)+y\cdot q(y)$

Her skal den tredje (magenta) begrænsning dog først aktiveres i sidste spørgsmål!

Både det simple og det udvidede tilfælde kan løses i et regneark, som har en indbygget *problemløsning* af LP problemer. I projekt 5.4 kan du finde en detaljeret gennemgang af løsning ved hjælp af regneark.

3 Elementær grafisk løsning i 3d

Kvadratisk programmering er ikke helt nem at overskue, så det er instruktivt også at illustrere de grundlæggende ideer med 3-dimensionale grafbilleder. Vi kan da bakke analysen op med et tredimensionalt billede af grafen for omsætningsfunktionen

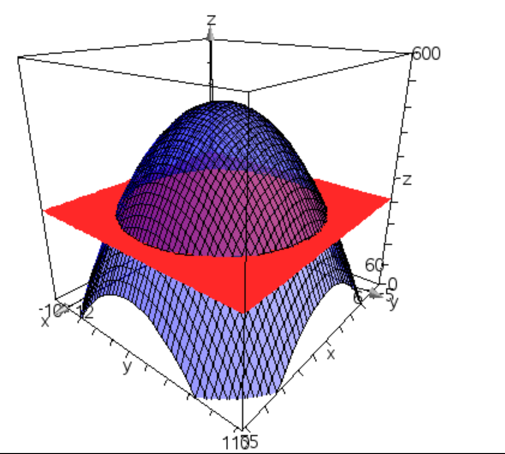
$$z=O(x,y)=-\tfrac{2}{5}\cdot x^2+20x-\tfrac{1}{10}\cdot y^2+10y\,.$$

Grafen er en *paraboloide.* Dertil tilføjes niveauplanen hørende til $N(250)$

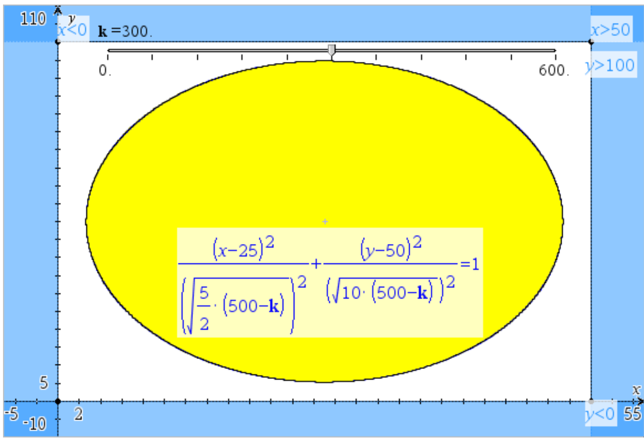
$$z=250\,,$$

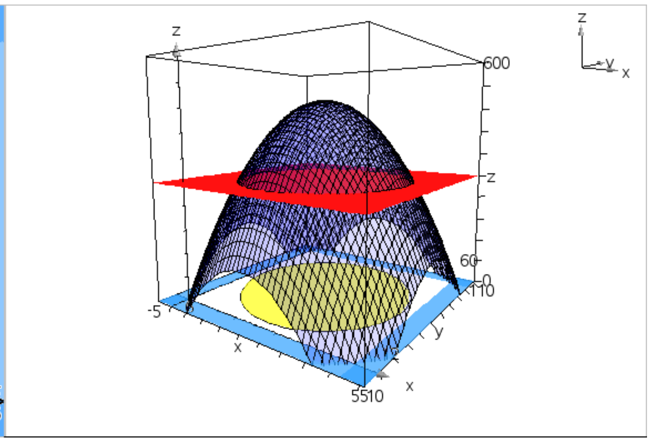
der skærer paraboloiden i en ellipse (med centrum i (25,50) og halvakser 25 og 50).

Vi kan også illustrere højdekurverne ved at skære grafen med en vandret plan, der kan forskydes. Planen slipper grafen i højden 500, dvs. noget tyder på, at den maksimale omsætning netop er givet ved z = 500.



Endelig har vi mulighed for at illustrere højdekurver i 3d og niveaukurver i 2d *samtidigt* ved hjælp af skydere. Vi vender tilbage til skyderen for højden **k**, men inddrager den nu også i den tre-dimensionale grafopsætning, hvor vi tilføjer planen $z = k$ og projektionen af ellipsen i x-y-planen:





Når vi trækker i skyderen ser vi nu samtidigt højdekurven ændre sig i 2d-grafen og 3d-grafen.

Øvelse 2.
Konstruer selv en dynamisk figur der illustrerer højdekurver og niveaukurver.

Praxis: Kvadratisk programmering i to variable med simple andengradspolynomier.
Identificér de to *uafhængige beslutningsvariable* x og y.
Opstil kriteriefunktionen, dvs den *afhængige variabel* $f(x,y)=a_1\cdot x^2+b_1\cdot x+a_2\cdot y^2+b_2\cdot y+c$.
Hvis a_1 og a_2 har *samme fortegn* er niveaukurverne *ellipser*.
Hvis en af dem, fx a_2, er nul, er niveaukurverne *parabler*.
Omskriv begrænsningerne for de involverede aktiviteter til uligheder (herunder evt. positivitetsbetingelserne $x\geq 0, y\geq 0$) og tegn det tilhørende polygonområde.

1. Ellipsetilfældet (a_1 **og** a_2 **har samme fortegn):**
Kriteriefunktionen omskrives ved kvadratkomplettering:
$f(x,y)=a_1\cdot(x-x_T)^2+b_T\cdot(y-y_T)^2+z_T$.

ISBN 9788770668781

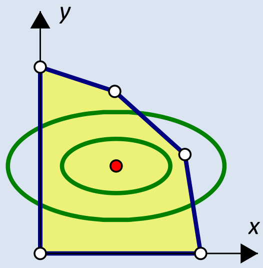
Niveaukurverne er ellipser og kriteriefunktionen har toppunkt i det fælles centrum for ellipserne: $x_T = -\frac{b_1}{2a_1}, y_T = -\frac{b_2}{2a_2}$. Der bliver nu to muligheder:

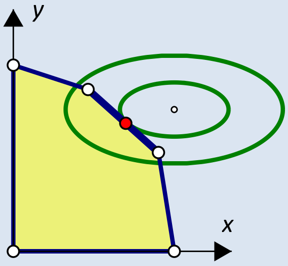
1a. Centrum ligger inde i eller på randen af polygonområdet:
Hvis centrum for ellipserne ligger *inde i eller på randen* af polygonområdet er centrum netop det optimale punkt.

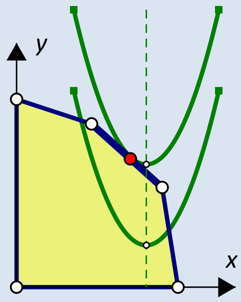
1b. Centrum ligger udenfor polygonområdet:
Hvis centrum for ellipserne ligger *udenfor polygonområdet* ligger det optimale punkt på randen for polygonområdet. Man skal da finde den kant, hvor niveaukurverne slipper polygonområdet, hvorefter det optimale punkt findes ved *substitutionsmetoden*, idet ligningen for kantlinjen $y = a \cdot x + b$ indsættes i kriteriefunktionen.

2. Parabeltilfældet($a_2 = 0$ **)**: Kriteriefunktionen omskrives ved kvadratkomplettering til $z = a_1 \cdot (x - x_T)^2 + b_1 \cdot y + z_T$.

Niveaukurverne er parabler med fælles symmetriakse $x_T = -\frac{b_1}{2a_1}$. Det optimale punkt ligger på randen af polygonområdet. Man skal da finde den kant, hvor niveaukurverne slipper polygonområdet, hvorefter det optimale punkt findes ved *substitutionsmetoden*, idet ligningen for kantlinjen $y = a \cdot x + b$ indsættes i kriteriefunktionen.







Øvelse 3: Eksamensopgave hhx, maj 2009, A-niveau
Firmaet Sport-swim producerer og sælger 2 slags svømmedragter:
Knee – skin , en kortbenet model og *Body – skin* , en langbenet model.

For svømmedragten *Knee – skin* er sammenhængen mellem afsætning og pris givet ved:

$$p(x) = -50x + 1000 \qquad 0 < x < 20$$

hvor *x* angiver afsætningen i stk., og $p(x)$.

For svømmedragten *Body – skin* er sammenhængen mellem afsætning og pris givet ved:

$$q(y) = -200y + 4000 \qquad 0 < y < 20$$

hvor *y* angiver afsætningen i stk., og $q(y)$ er prisen i kroner pr. stk.

a) Gør rede for, at den samlede omsætning i firmaet Sport-swim kan beskrives ved funktionen:

$$f(x,y) = -50x^2 + 1000x - 200y^2 + 4000y$$

Firmaet Sport-swim har en øvre produktionsgrænse på 30 stk. pr. uge, det vil sige $x + y < 30$.

ISBN 9788770668781

b) Gør rede for, at niveaukurven $N(20000)$ bestemt ved $f(x,y)=20000$ er en ellipse og tegn denne samt begrænsningsområdet i et koordinatsystem.

c) Bestem hvor mange stk. *Knee − skin* og hvor mange stk. *Body − skin* der skal produceres og sælges pr. uge, for at den samlede omsætning pr. uge bliver størst mulig og bestem denne samlede omsætning.

Øvelse 4: Vejledende eksamensopgave, hhx mat A

En virksomhed sælger to varer A og B. Lad *x* angive afsætningen i stk. pr. uge af vare A og lad *y* angive afsætningen i stk. pr. uge af vare B.

Virksomheden har monopol på markedet for vare A, og prisen pr. stk. er givet ved

$$p(x)=-0{,}01x+40 \;,\; 0\le x\le 3500$$

På det marked, hvor vare B sælges, er der fuldkommen konkurrence, og prisen pr. stk. er givet ved

$$q(y)=20 \;,\; y\ge 0$$

Omsætningen for en vare kan bestemmes ved

omsætning = afsætning · (*pris pr. stk.*)

a) Gør rede for, at den samlede omsætning pr. uge kan bestemmes ved funktionen *R* med forskriften

$$R(x,y)=-0{,}01x^2+40x+20y$$

Afsætningen er underlagt følgende betingelser:

$$0\le x\le 3500$$

$$y\ge 0$$

$$y\le -\tfrac{1}{5}x+2000$$

Niveaukurven $N(t)$ er defineret ved $R(x,y)=t$.

b) Gør rede for, at niveaukurven $N(60000)$ er en parabel og tegn denne samt betingelserne i et koordinatsystem.

c) Bestem det antal stk. af vare A og det antal stk. af vare B virksomheden skal afsætte pr. uge for at opnå maksimal omsætning.