ISBN 9788770668781

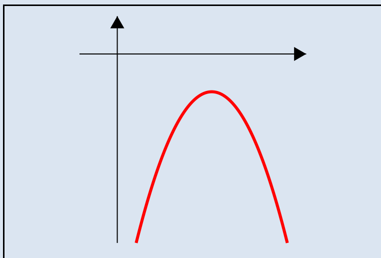
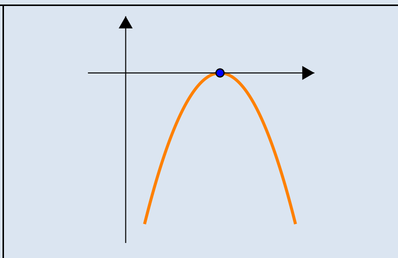
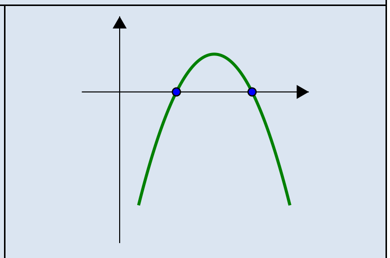
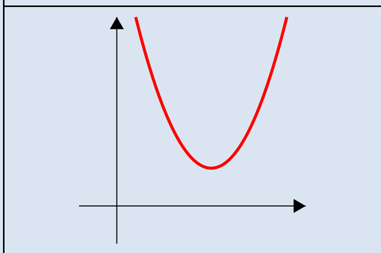
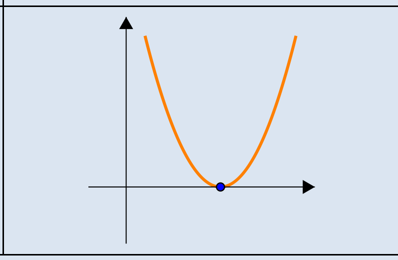
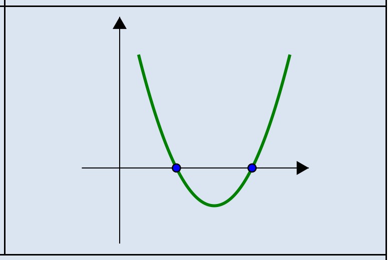
Projekt 5.5 Andengradspolynomier af to variable

1. Kvadratiske funktioner i to variable - de tre typer paraboloider

Et andengradspolynomium i en variabel har en forskrift på formen $f(x)=A\cdot x^2+B\cdot x+C$, hvor $A\neq 0$. Vi undersøgte andengradspolynomierne i *Hvad er matematik*? 2 kapitel 2 og fandt bl.a. frem til følgende struktursætning, som vi vil trække kraftigt på i det følgende.

Sætning 1: Andengradspolynomier i en variabel

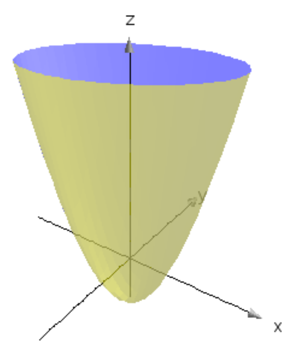
Til ethvert andengradspolynomium $f(x)=A\cdot x^2+B\cdot x+C$, hvor $A\neq 0$, er tilknyttet en diskriminant $D=B^2-4\cdot A\cdot C$. Grafen for andengradspolynomiet er en parabel, der er glad (opad hul, konveks) hvis *A* er positiv og sur (nedad hul, konkav), hvis *A* er negativ. Det er fortegnet for diskriminanten, der afgør grafens beliggenhed i forhold til 1. aksen:

	$D<0$	$D=0$	$D>0$
$A<0$ Sur Nedad hul Konkav			
$A>0$ Glad Opad hul Konveks			
	Hvis $D<0$ rammer grafen *ikke* *x*-aksen, dvs. den tilhørende andengradsligning $f(x)=0$ har ingen løsninger. Andengradspolynomiet kan da *ikke* skifte fortegn.	Hvis $D=0$ *rører* parablen *x*-aksen i et enkelt punkt, dvs. den tilhørende andengradsligning $f(x)=0$ har netop en løsning. Andengradspolynomiet kan da *ikke* skifte fortegn.	Hvis $D>0$ *skærer* parablen *x*-aksen i to punkter, dvs. den tilhørende andengradsligning $f(x)=0$ har to løsninger. Andengradspolynomiet skifter da fortegn undervejs.

Når vi går over til at se på andengradspolynomier i to variable er den generelle forskrift givet på formen:

$$f(x,y)=\underbrace{a\cdot x^2+b\cdot x\cdot y+c\cdot y^2}_{\text{Andengradsleddene}}+\underbrace{d\cdot x+e\cdot y}_{\text{Førstegradsleddene}}+\underbrace{f}_{\text{Konstantleddet}}$$

Læg mærke til, at der nu er tre andengradsled – det midterste led, altså $b\cdot x\cdot y$, kaldes *det blandede led*.



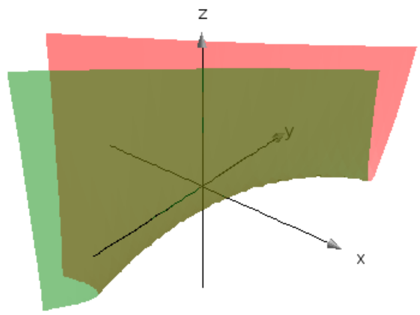
$z=f(x,y)$
$=x^2-x\cdot y+2\cdot y^2-2x+4y+1$

Grafen for et andengradspolynomium i to variable, dvs. fladen med ligningen $z=f(x,y)$, kaldes en *paraboloide*. Ser vi på graferne for andengradspolynomier i to variable, ser vi hurtigt, at der er forskellige slags paraboloider. Fx kan en lille ændring i det blandede led som vist føre til en stor ændring i grafens udseende. Spørgsmålet er så hvor mange forskellige typer paraboloider, der findes?

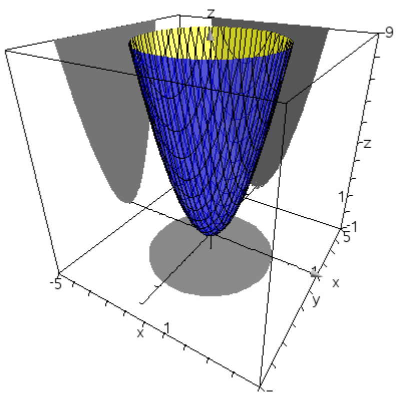
For andengradspolynomier i en variabel findes der kun en prototype $y=x^2$. Alle andre parabler fremkommer af denne ved hjælp af simple geometriske transformationer. Men for tredjegradspolynomier findes der som vist i B-bogen kap. 3, netop 3 prototyper:

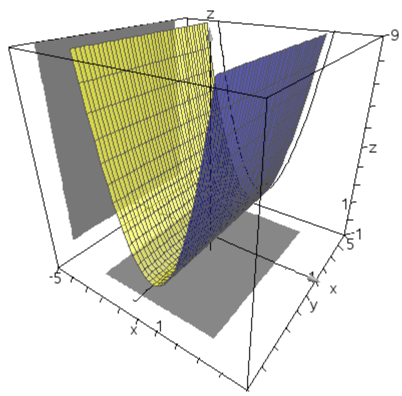
ISBN 9788770668781

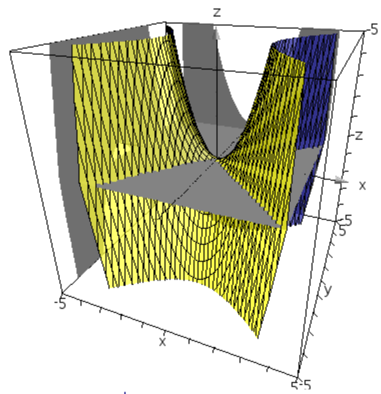
$y=x^3-3x$, $y=x^3$ og $y=x^3+3x$. Noget tilsvarende gælder for andengradspolynomier i to variable. Udgangspunktet er parablen $z=x^2$, der giver anledning til følgende tre prototyper

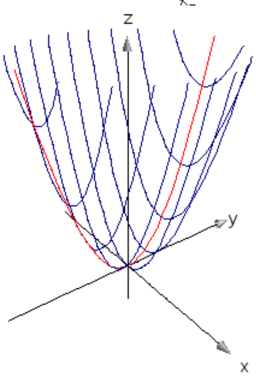


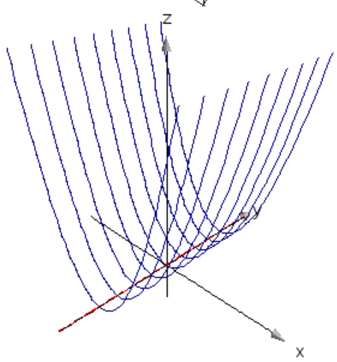
$$z=g(x,y)$$
$$=x^2-3x\cdot y+2\cdot y^2-2x+4y+1$$

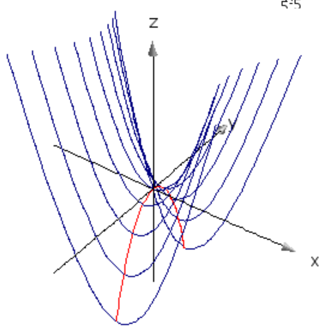












Den elliptiske paraboloide:

$$z=x^2+y^2,$$

der fremkommer ved at lade den opad hule blå parabel $z=x^2$ glide langs den opad hule røde parabel $z=y^2$. Den elliptiske enhedsparaboloide har toppunkt/minimum i (0,0,0). Grafen har form som en skål med minimum i bunden.

Den parabolske cylinder:

$$z=x^2 ,$$

der fremkommer ved at lade den opad hule blå parabel $z=x^2$ glide langs den røde *y*-akse. Den parabolske enhedscylinder har minimum langs *y*-aksen, der altså er indeholdt i fladen. Grafen har form som en langstrakt dal med minimum i bunden.

Den hyperbolske paraboloide:

$$z=x^2-y^2 ,$$

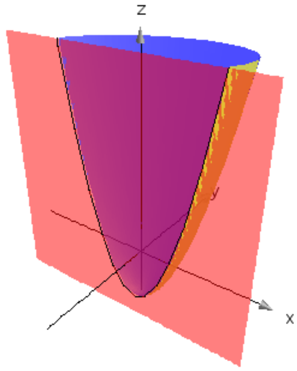
der fremkommer ved at lade den opad hule parabel $z=x^2$ glide langs den nedad hule parabel $z=-y^2$. Den hyperbolske enhedsparaboloide indeholder de to vandrette linjer $y=x$ og $y=-x$ i *x*-*y*-planen $z=0$. Grafen har form som et bjergpas.

Man kan vise at alle andre paraboloider fremkommer af de tre prototyper ved hjælp af simple geometriske transformationer (lineære koordinattransformationer).

ISBN 9788770668781

2. Diskriminanten for et andengradspolynomium i to variable

Vi kan undersøge udseendet af den generelle paraboloide meget simpelt ved at skære den med en lodret plan. Først ser vi på grafen, når vi indskrænker funktionen fra to variable til kun at være en funktion af en enkelt variabel. Det sker ved at holde y fast, idet vi fx kan sætte $y=-1$. Vi ser da, at snitkurven i begge tilfælde mistænkeligt ligner en parabel.



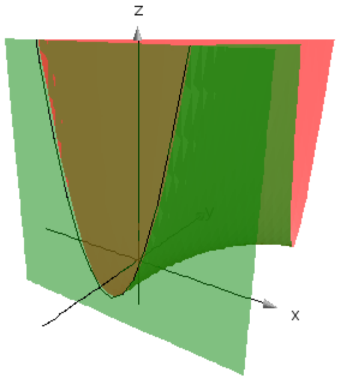
$z = x^2 - x \cdot y + 2 \cdot y^2 - 2x + 4y + 1$

Det er ikke så overraskende for indsætter (substituerer) vi $y=-1$ i forskrifterne for andengradspolynomierne fås netop to andengradspolynomier i x:

$$\begin{aligned} f_{-1}(x) &= f(x,-1) \\ &= x^2 - x \cdot (-1) + 2 \cdot (-1)^2 - 2x + 4 \cdot (-1) + 1 \\ &= x^2 - x - 1 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} g_{-1}(x) &= g(x,-1) \\ &= x^2 - 3 \cdot x \cdot (-1) + 2 \cdot (-1)^2 - 2x + 4 \cdot (-1) + 1 \\ &= x^2 + x - 1 \end{aligned}$$



$z = x^2 - 3x \cdot y + 2 \cdot y^2 - 2x + 4y + 1$

Men teknikken kan udvides til at undersøge skæringen mellem en generel paraboloide og en vilkårlig lodret plan. For enkelhedsskyld ser vi på en lodret plan, der *ikke* står vinkelret på x-aksen, så vi kan opfatte snitkurven som grafen for en funktion af x. Snitplanen har da en ligning på formen

$$y = k \cdot x + q$$

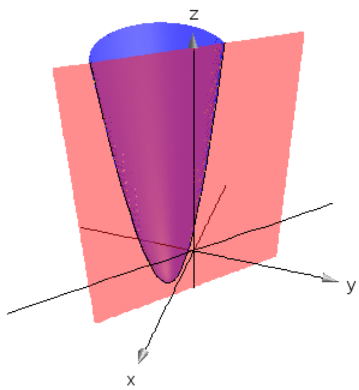
Indsættes det i den generelle ligning for en paraboloide fås:

$$\begin{aligned} z &= f(x, k \cdot x + q) \\ &= a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot (k \cdot x + q) + c \cdot (k \cdot x + q)^2 + d \cdot x + e \cdot (k \cdot x + q) + f \\ &= (a + b \cdot k + c \cdot k^2) \cdot x^2 + (b \cdot q + 2c \cdot k \cdot q + d + e \cdot k) \cdot x + (c \cdot q^2 + e \cdot q + f) \end{aligned}$$

Det er et andengradspolynomium i x, såfremt andengradskoefficienten ikke er nul. Men andengradskoefficienten

$$A(k) = a + b \cdot k + c \cdot k^2$$

er selv et andengradspolynomium i k!
I tilfældet $A(k)=0$ er snitfladen ikke en parabel, men en ret linje.

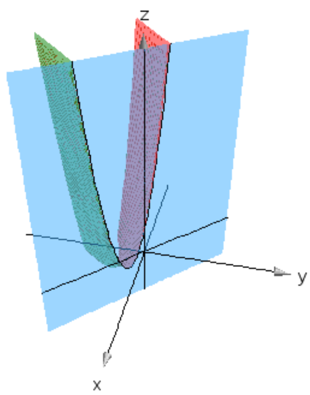


$z = x^2 - x \cdot y + 2 \cdot y^2 - 2x + 4y + 1$
$y = -x$

Andengradspolynomiet $A(k)$ har diskriminanten

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Vi vil også kalde denne størrelse for diskriminanten til andengradspolynomiet $f(x,y)$ i to variable. Den afgør, hvorvidt der er to, en eller ingen værdier af k, der giver en ret linje som snitkurve.



$z = x^2 - 3x \cdot y + 2 \cdot y^2 - 2x + 4y + 1$
$y = -x$

ISBN 9788770668781

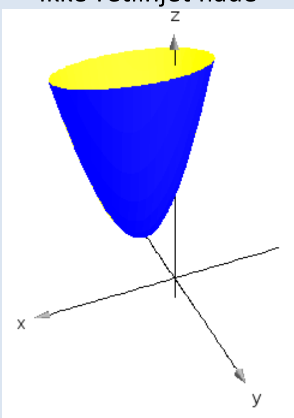
Vi har altså vist, at problemet om der gennem et givet grafpunkt findes rette linjer indeholdt i grafen svarer til at løse en andengradsligning med diskriminanten $D=b^2-4\cdot a\cdot c$, der er den samme for alle grafpunkter. Det er derfor paraboloiderne optræder i tre typer: Dem der ingen rette linjer indeholder (på samme måde som en kugle), dem der indeholder netop én ret linje gennem hvert grafpunkt (på samme måde som en cylinder), og dem der indeholder netop to rette linjer gennem hvert grafpunkt (på samme måde som skovtårnet på billedet, der er en hyperboloide).

Sætning 2: Struktursætningen for andengradspolynomier i to variable

Til ethvert andengradspolynomium $f(x,y)=a\cdot x^2+b\cdot x\cdot y+c\cdot y^2+d\cdot x+e\cdot y+f$, hvor $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ er tilknyttet en diskriminant $D=b^2-4\cdot a\cdot c$. Fortegnet for diskriminanten afgør, hvilken type paraboloide, der er tale om.

$D<0$

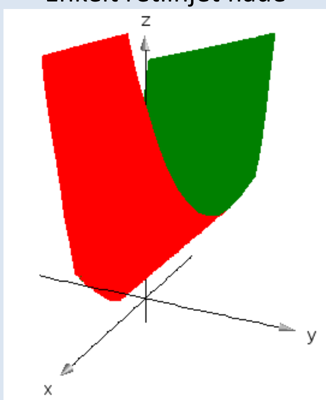
Ikke-retlinjet flade



Elliptisk paraboloide.
Alle lodrette snit er parabler, der vender samme vej. Hvis de vender opad er paraboloiden glad (opad hul, konveks) – Hvis de vender nedad er paraboloiden sur (nedad hul, konkav). I begge tilfælde har parablen et toppunkt. Den elliptiske paraboloide indeholder ingen rette linjer.

$D=0$

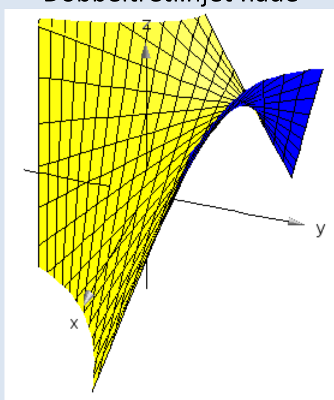
Enkelt retlinjet flade



Parabolsk cylinder.
Gennem hvert punkt på fladen går der netop én ret linje, fladens *frembringer*. Alle frembringerne er parallelle. Hvis de er vandrette er den parabolske cylinderflade vandret – tilsvarende for skrå og lodrette. Alle lodrette snit bortset fra frembringerne er parabler, der vender samme vej.

$D>0$

Dobbeltretlinjet flade



Hyperbolsk paraboloide.
Gennem hvert punkt på fladen går der netop to rette linjer, fladens *frembringere*. Der findes netop et punkt på fladen, hvor begge frembringere er vandrette – *saddelpunktet*. Alle lodrette snit bortset fra frembringerne er parabler, men de kan pege både opad og nedad.

3. Simple andengradspolynomier

I det følgende indskrænker vi os nu til at kigge på *simple andengradspolynomier* i to variable, hvor det blandende led mangler, dvs. vi kigger kun på andengradspolynomier på formen:

$$h(x,y)=a_1\cdot x^2+b_1\cdot x+a_2\cdot y^2+b_2\cdot y+c \text{ , hvor } (a_1,a_2)\neq(0,0)$$

Sporet i *x*-*z*-planen $y=0$ er altså andengradspolynomiet $z=a_1\cdot x^2+b_1\cdot x+c$. Tilsvarende er sporet i *y*-*z*-planen $x=0$ andengradspolynomiet $z=a_2\cdot y^2+b_2\cdot y+c$.

Diskriminanten for det simple andengradspolynomium er givet ved

$$D=0^2-4\cdot a_1\cdot a_2=-4\cdot a_1\cdot a_2 \text{ .}$$

Det er altså fortegnene for koefficienterne a_1 og a_2, der afgør hvilken type paraboloide vi har fat i. I forvejen bestemmer de om de to spor i koordinatplanerne peger samme vej eller modsat vej.

ISBN 9788770668781

Sætning 3: Struktursætningen for simple andengradspolynomier

Et simpelt andengradspolynomium har forskriften $h(x,y)=a_1\cdot x^2+b_1\cdot x+a_2\cdot y^2+b_2\cdot y+c$, hvor $(a_1,a_2)\neq(0,0)$. Hvilken type paraboloide, der er tale om afgøres af fortegnene for andegradskoefficien-terne, dvs. a_1 og a_2.

Koefficienterne a_1 og a_2 har samme fortegn:
Grafen er en *elliptisk paraboloide*, der er opad hul, hvis begge koefficienterne er positive og nedad hul, hvis de er negative. Den elliptiske paraboloide har toppunkt i $x_T=-\dfrac{b_1}{2a_1}, y_T=-\dfrac{b_2}{2a_2}$.

En af koefficienterne a_1 og a_2 er nul:
Grafen er en *parabolsk cylinder*. Frembringerne er parallelle med en af koordinatakserne (afhængigt af hvilken koefficient, der er nul). Hvis fx a_2 er nul ligger toppunktet på linjen $x_T=-\dfrac{b_1}{2a_1}$.

Koefficienterne a_1 og a_2 har modsatte fortegn:
Grafen er en *hyperbolsk paraboloide*. Frembringerne er parallelle med de to koordinatakser. Den hyperbolske paraboloide har saddelpunkt i $x_T=-\dfrac{b_1}{2a_1}, y_T=-\dfrac{b_2}{2a_2}$.

Øvelse 1

De tre typer fremgår af den generelle struktursætning. Gennemfør selv detaljerne i argumentet.

Bevis for toppunktsformlen

Vi ønsker at bestemme *toppunktet* for en elliptisk paraboloide, henholdsvis *saddelpunktet* for en hyperbolsk paraboloide. Det nemmeste er da at bruge *kvadratkomplettering* ligesom ved andengradspolynomier i en variabel. Da et simpelt andengradspolynomium i to variable kan skrives som summen af to sædvanlige andengradspolynomier i en variabel

$$h(x,y)=\underbrace{a_1\cdot x^2+b_1\cdot x}_{p(x)}+\underbrace{a_2\cdot y^2+b_2\cdot y}_{q(y)}+c$$

kan vi anvende kvadratkomplettering på hvert af leddene for sig, hvorved vi finder en omskrivning af formen

$$h(x,y)=a_1\cdot\left(x+\frac{b_1}{2a_1}\right)^2+a_2\cdot\left(y+\frac{b_2}{2a_2}\right)^2+\left(c-\frac{b_1^2}{4a_1}-\frac{b_2^2}{4a_2}\right) \qquad (*)$$

I praksis bruger vi værktøjsprogrammet til at gennemføre omskrivningen!

Øvelse 2

a) Vis (*) med brug af et værktøjsprogram

b) Udfør kvadratkomplettering på de følgende to simple andengradspolynomier:

$$f(x,y)=x^2+y^2-2x+4y+1 \qquad g(x,y)=x^2-y^2-2x+4y+1$$

Men denne omskrivning viser netop, at det simple andengradspolynomium kan omskrives på formen

$$h(x,y)=a_1\cdot(x-x_T)^2+a_2\cdot(y-y_T)^2+z_T\text{, med } x_T=-\frac{b_1}{2a_1}, y_T=-\frac{b_2}{2a_2} \text{ og } z_T=c-\frac{b_1^2}{4a_1}-\frac{b_2^2}{4a_2}$$

Antag nu at andengradskoefficienterne har samme fortegn, fx at de begge er negative. Da kvadratet på et tal *ikke* kan være negativt, følger det at vi i begge kvadratled trækker noget fra z_T, dvs. $h(x,y)\leq z_T$ og at der kun kan gælde lighedstegn, hvis begge kvadratled forsvinder, dvs. der netop gælder

$$x_T=-\frac{b_1}{2a_1}, y_T=-\frac{b_2}{2a_2}.$$

Den elliptiske paraboloide har altså som påstået i sætningen et minimum i det anførte punkt.

Den hyperbolske paraboloide er ikke lige så vigtig i økonomisk modellering som den elliptiske paraboloide og den parabolske cylinder. Den spiller derimod en afgørende rolle i arkitektur, hvilket vi fortæller nærmere om i kapitel 10.

ISBN 9788770668781

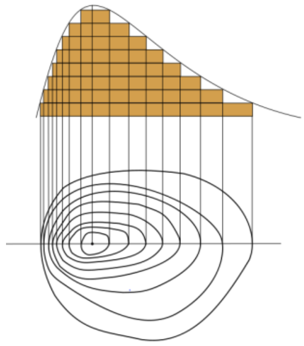
Øvelse 3

a) Find ved kvadratkomplettering minimumspunktet for den elliptiske paraboloide

$$f(x,y)=x^2+y^2-2x+4y+1$$

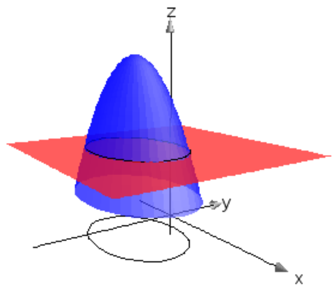
b) Find toppunktet ved hjælp af de partielt afledede, der må være 0 pågældende sted.

4 Niveaukurver



Hidtil har vi snittet andengradsfladerne med lodrette planer. Men det er også oplysende at snitte dem med en vandret plan, $z=z_0$, hvor snitkurven kaldes en *niveaukurve*, fordi den ligger i en konstant højde z_0. Niveaukurverne svarer altså helt til *højdekurverne* på et kort.

Den elliptiske paraboloide har netop fået sit navn, fordi niveaukurverne er ellipser. Det kan vi indse således, idet vi tager udgangspunkt i et konkret eksempel. Ved kvadratkomplettering omskrives ligningen for den elliptiske paraboloide $z=-x^2-2y^2+2x-8y-1$ til

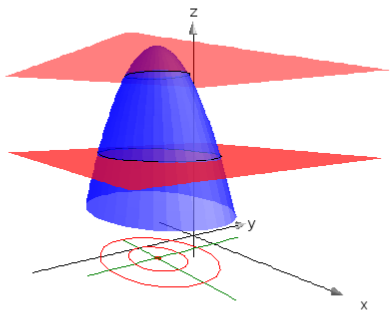


$z=-(x-1)^2-2\cdot(y+2)^2+8$. Der er altså et maksimum i punktet $(1,-2)$ med maksimumsværdien 8. Hvis vi nu giver z en bestemt værdi, fx $z=4$, så får snitkurven ligningen

$$-(x-1)^2-2\cdot(y+2)^2+8=4$$
$$(x-1)^2+2\cdot(y+2)^2=4$$
$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{2}=1$$

Men det viser jo netop at snitkurven er en ellipse med centrum i $(1,-2)$ (svarende til toppunktet for den elliptiske paraboloide) og halvakserne $a=2$ og $b=\sqrt{2}\approx1.414$.

Læg mærke til at når vi løfter niveauet for niveaukurven snører ellipserne sig sammen om deres fælles centrum, svarende til toppunktet for den elliptiske paraboloide. Du kan finde mere om ellipsen, herunder udledningen af ellipsens ligning i *Hvad er matematik*? 2, kapitel 7. Her samler vi blot de vigtigste egenskaber i en faktaboks, der også illustrerer hvordan ellipsen fremkommer af en enhedscirkel ved at forstørre, trykke flad og parallelforskyde. Parameterfremstillingen af ellipsen er taget med i oversigten, fordi det i mange programmer er nemmere at tegne ellipsen ud fra parameterfremstillingen.

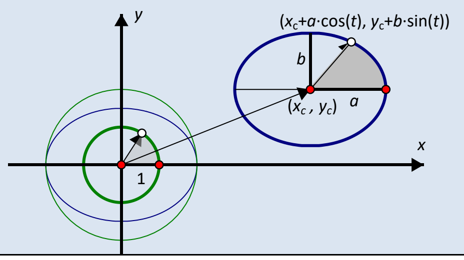


Ellipsens ligning og parameterfremstilling

Ellipsen med centrum i (x_c,y_c) og halvakser lig med *a* og *b* har

Ligningen: $$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1,$$

Parameterfremstillingen: $$\begin{cases}x=x_c+a\cdot\cos(t)\\ y=y_c+b\cdot\sin(t)\end{cases},\quad 0\le t<2\pi,$$



Øvelse 5

Tegn niveaukurver for andengradspolynomiet

$$z=-x^2-2y^2+2x-8y-1$$

svarende til niveauerne 0, 1, 4 og 6.

Øvelse 6

a) Gør rede for at niveaukurverne hørende til den parabolske cylinder

$$g(x,y)=x^2-2x+4y+3$$

er parabler, hvis toppunkter ligger på linjen $x=1$.

b) Hvad sker der med parablerne, når niveauet hæves?

Bemærkning: Hvis man tilsvarende undersøger niveaukurverne for den hyperbolske paraboloide, viser det sig at der er tale om hyperbler. På et topografisk kort vil man derfor med tilnærmelse se elliptiske niveaukurver rundt om bjergtoppene (A), hyperbolske niveaukurver rundt om bjergpassene (B), og parabolske niveaukurver langs dalgangene (C), der fører op i bjergene.