ISBN 9788770668781

Projekt 5.5 - Lineær programmering i to variable

1. Den grundlæggende ide i lineær programmering

Håndtering af optimeringsproblemer er et af de store anvendelsesområder inden for differentialregningen. Det kan være problemer af typen: Hvilken rute giver den korteste transporttid? Hvilke dimensioner giver det mindste materialeforbrug? Eller: Hvilken hastighed giver den mest effektive trafikafvikling? Alt ammen under nogle bestemte betingelser. Fremgangsmåden i den gren af matematikken er at identificere en uafhængig variabel, x og så udtrykke eksempelvis materialeforbruget som en funktion $f(x)$ af denne variabel. Svaret på optimeringsproblemet findes dernæst ved at differentiere og bestemme lokale ekstrema.

Mange optimeringsproblemer inden for virksomhedsøkonomi eller vedrørende håndtering af logistikken inden for store organisationer involverer imidlertid ikke én, men et stort antal uafhængige variable. Det kræver nye matematiske metoder. En vej at gå er her at generalisere differentialregningen til funktioner af flere variable. Men der findes en anden vej, der populært sagt er udviklet ud fra ”trial and error” metoder, dvs hvor man prøver sig frem med kvalificerede gæt. Disse metoder fik fast grund under fødderne i årene efter 2. Verdenskrig, og ikke mindst udviklingen af computere med deres enorme regnekraft gav muligheder for at udvikle disse metoder til en helt ny gren af matematikken, *lineær programmering*.

Vi vil her introducere de grundlæggende metoder i lineær programmering, eller LP som man af og til kalder det, ud fra et eksempel med blot to variable. Et fælles træk ved alle LP-problemer er:

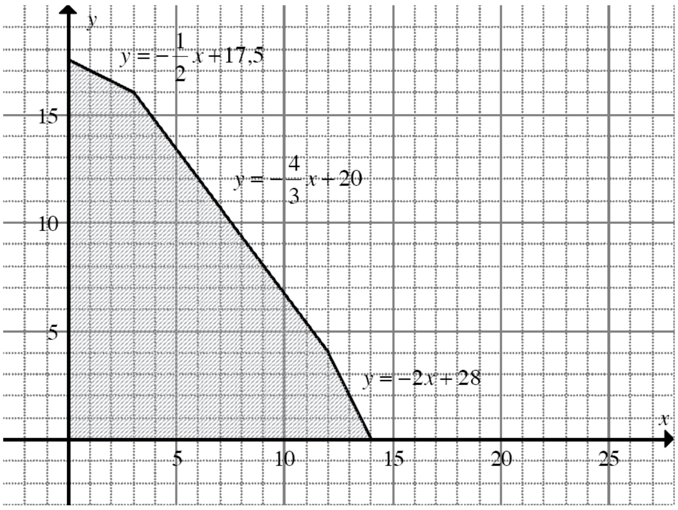
- de uafhængige variable er underlagt bestemte betingelser (begrænsninger), som vi repræsenterer grafisk i et koordinatsystem
- vi ønsket at optimere produktion, fortjeneste eller andet, og opstiller et funktionsudtryk for dette. Funktionen er afhængig af alle de uafhængig variable og kaldes *kriteriefunktionen*
- anbefalinger af bestemte optimale løsninger kan ikke altid imødekommes eksakt, så vi er også interesseret i, hvor følsom den optimale løsning er i forhold til små udsving på betingelserne.

Eksempel: Eksamensopgave hhx, A-niveau
Virksomheden Gern Glas A/S producerer planglas og spejle til bl.a. møbelindustrien. Produktionen foregår i tre processer: slibning, hærdning og boring.

Kilde: Gern Glas A/S.

Til et planglas bruges 10 minutter til slibning, 20 minutter til hærdning og 4 minutter til boring.
Til et spejl bruges 20 minutter til slibning, 15 minutter til hærdning og 2 minutter til boring.
Til slibning er der 350 minutter til rådighed pr. dag, til hærdning er der 300 minutter til rådighed pr. dag, og til boring er der 56 minutter til rådighed pr. dag
Lad x angive antal planglas pr. dag og lad y angive antal spejle pr. dag.
Begrænsningerne definerer følgende polygonområde:

ISBN 9788770668781



Det samlede dækningsbidrag pr. dag bestemmes ved funktionen $f(x, y) = 30x + 20y$

a) Bestem det antal planglas og det antal spejle, der skal produceres pr. dag for at opnå det størst mulige samlede dækningsbidrag pr. dag.

b) Bestem, indenfor hvilket interval dækningsbidraget pr. spejl kan variere, så *f* stadigvæk antager sin størsteværdi i punktet bestemt i spørgsmål a).

Løsning
For at kunne overskue problemet gennemføres en matematisk modellering, hvor vi som sædvanligt indfører relevante variable og deres variabelsammenhænge beskrevet ved funktioner. I eksemplet præsenteres vi således for to *uafhængige variable* x og y, der repræsenterer den daglige produktion af *antal planglas* henholdsvis *antal spejle*, samt den *afhængige variabel* z, der repræsenterer *dækningsbidraget per dag*. I opgaveteksten er dækningsbidraget per dag oplyst via sin funktionsforskrift $z = f(x, y)$. Opgaven er nu delt i to dele: en optimeringsdel (a) og en følsomhedsanalyse (b).

2. Optimeringsdelen

Spørgsmålet er, hvordan vi kan tilrettelægge produktionen, så dækningsbidraget pr. dag bliver størst muligt? Til hjælp for at besvare dette spørgsmål indføres der nu nogle uligheder i form af en række *begrænsninger* på produktionen. For det første er der *positivitetsbetingelserne*: Antal planglas og antal spejle må nødvendigvis være ikke-negative for at give mening, dvs. de uafhængige variable x og y skal opfylde betingelserne: $x \geq 0, y \geq 0$. For det andet er der *produktionsbetingelserne*: Der er kun en begrænset mængde af tid til rådighed for at slibe, hærde og bore. De tilhørende oplysninger kan bekvemt opstilles i en produktionstabel:

Emne\Aktivitet (min. per dag)	Slibning	Hærdning	Boring
Planglas	10	20	4
Spejl	20	15	2
Begrænsning (min. per dag)	350	300	56
Produktions-betingelse	$10x+20y \leq 350$	$20x+15y \leq 300$	$4x+2y \leq 56$

Uafhængige variable (antal)	Værdi
$x =$	
$y =$	

Afhængig variabel Dækningsbidrag	30x + 20y

Her udtrykker produktionsbetingelsen for slibning fx at når vi bruger 10 min. på at slibe ét planglas, så bruger vi $10 \cdot x$ minutter per dag på at slibe x planglas og tilsvarende $20 \cdot y$ på at slibe y spejle. Da de to aktiviteter foregår uafhængige af hinanden bliver den samlede tid brugt på slibning derfor givet ved summen $10x + 20y$. Men da der kun er 350 minutter til rådighed om dagen til at bruge på slibning er vi nødt til at opfylde uligheden $10x + 20y \leq 350$. Vi har også indført forskriften for dækningsbidraget som funktion af antal planglas og antal spejle. Forskriften henter vi direkte fra opgaveteksten uden begrundelse. Men målt i passende enheder (fx kr.) gælder der åbenbart, at dækningsbidraget er henholdsvis 30 pr. planglas og 20 pr. spejl.

Vi opbygger skemaet i et regneark med brug af dettes formelværktøj. Indsættes værdier for de uafhængige variable i de grønne celler, udregnes dels sandhedsværdierne for de orange begrænsningsceller - dvs. stemmer ulighederne, ja eller nej - dels værdien af dækningsbidraget i den røde celle.

Øvelse 1
a) Prøv fx at tildele *x* og *y* værdierne 6 og 8. Er begrænsningerne opfyldt? Hvad bliver dækningsbidraget per dag hørende til en produktion af 6 planglas og 8 spejle?
b)Hvor meget skal du ændre på antallet af spejle for at vi sprænger produktionsbetingelserne?

Vi vil i første omgang løse optimeringsdelen med brug af traditionelle geometriske metoder. I opgaven er opstillet *polygonområdet for begrænsningerne*, dvs. det område i (*x*,*y*)-grafrummet, der rummer de mulige produktionspunkter (x, y). Vi vil her selv prøve at opstille dette ved at regne på ulighederne.
Når vi isolerer en variabel i en ulighed skal vi huske at uligheden kun bevares, hvis vi ganger/dividerer med positive tal! Vi omskriver til følgende uligheder:

Positivitetsbetingelser

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Produktionsbegrænsninger

$$10x + 20y \leq 350 \Leftrightarrow y \leq -\tfrac{1}{2} \cdot x + \tfrac{35}{2}$$
$$20x + 15y \leq 300 \Leftrightarrow y \leq -\tfrac{4}{3} \cdot x + 20$$
$$4x + 2y \leq 56 \Leftrightarrow y \leq -2x + 28$$

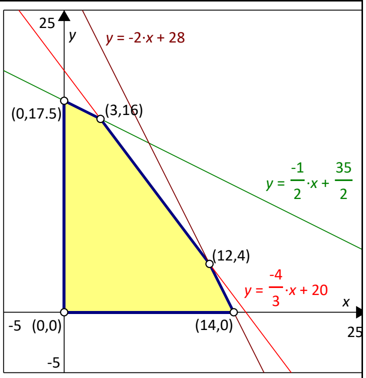
En lineær ulighed tilfredsstilles af en halvplan afgrænset af en kantlinje. Polygonområdet fremstår derfor som fællesmængden af en række halvplaner.

Fx aflæser vi at den første produktionsbetingelse har kantlinjen

$$y = -\tfrac{1}{2} \cdot x + \tfrac{35}{2}.$$

Den tilfredsstilles derfor af alle punkterne i halvplanen under kantlinjen. Den nemmeste metode til at få tegnet polygonområdet er nu at tegne alle kantlinjerne, fastlægge deres skæringspunkter (gerne geometrisk) og tegne polygonen.

Øvelse 2
Find ud af hvordan man tegner grafer for uligheder i dit værktøjsprogram.

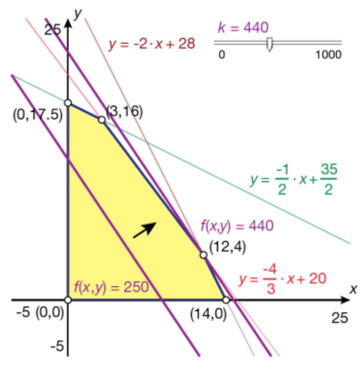


Vi kan nu finde det maksimale dækningsbidrag. Vi skal altså have tegnet grafen for dækningsbidraget $f(x, y) = 30 \cdot x + 20 \cdot y$. I hvert punkt (x, y) af koordinatsystemet kan vi udregne værdien $f(x, y)$, og afsætter vi denne værdi op ad en *z*-akse, kunne vi forestille os grafen som en 2-dimensionel flade over *xy*-planen. Men en af de geniale ideer i LP er i stedet at se på *niveaulinjer*, dvs. se på hvilke punkter i *xy*-planen, der giver en bestemt funktionsværdi.

Vi indfører derfor en skyder *k* for dækningsbidraget (op til 1000) og tegner *niveaulinjen* med ligningen $30 \cdot x + 20 \cdot y = k$ bestående af alle punkterne med dækningsbidraget *k*. Når man trækker i skyderen og lader *k* vokse kan man se niveaulinjen bevæge sig væk fra *origo*. Dermed kan man nemt finde det sted, hvor der er maksimal fortjeneste, som er netop det hjørnepunkt, hvor niveaukurven forlader polygonen, altså punktet $(12, 4)$.

Vi indsætter:

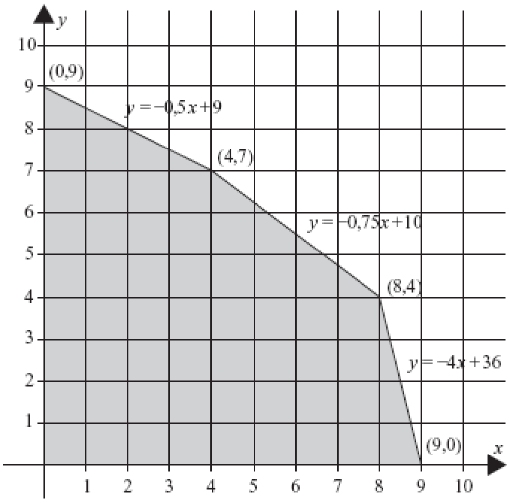
$$f(12,4) = 30 \cdot 12 + 20 \cdot 4 = 360 + 80 = 440$$



Konklusion: Den optimale produktion består i 12 planglas og 4 spejle. Den maksimale fortjeneste er $f(12, 4) = 440$.

Maksimum antages altid i et hjørnepunkt.
Vi kunne derfor også have fundet den optimale løsning ved *hjørneinspektion*, dvs. ved at regne dækningsbidraget ud for de fem hjørnepunkter og derefter vælge det hjørnepunkt, der har det højeste dækningsbidrag.
Hjørnepunktinspektion forudsætter stadigvæk, at man støtter sig til en graf. Det er ikke nok bare at finde alle skæringspunkterne mellem kantlinjerne, da nogle af kantlinjerne skærer hinanden udenfor polygonen (dvs. skæringspunktet opfylder ikke begrænsningerne) og disse skæringspunkter skal selvfølgelig *ikke* indgå i hjørneinspektionen.

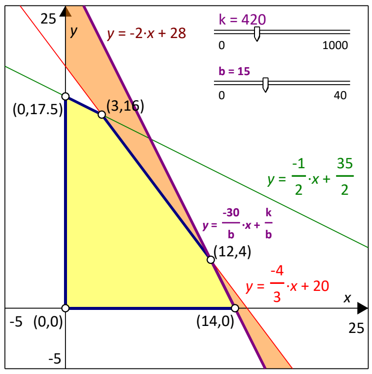
Øvelse 3: **Eksamensopgave UDEN hjælpemidler hhx, mat B**



En funktion i to variable er givet ved forskriften $f(x,y)=4x+2y$. I figuren herover er indtegnet et polygonområde.
a) Bestem funktionens størsteværdi inden for polygonområdet.

3. Følsomhedsanalysen

I det sidste spørgsmål skal vi nu finde hvor meget dækningsbidraget pr. spejl kan variere så det stadigvæk antager sit maksimum i produktionen (12,4), dvs. 12 planglas og 4 spejle. Dækningsbidraget har forskriften $f(x,y)=a\cdot x+b\cdot y$, hvor a er dækningsbidraget for et planglas, dvs. her 30, og b er dækningsbidraget for et spejl, dvs. her 20. I *følsomhedsanalysen* ser vi på, hvor følsom placeringen af maksimumsstedet (12,4) er for variationer i b. Med andre ord, hvornår skifter maksimumsstedet til et nabopunkt, henholdsvis (14,0) eller (3,16).



Da a holdes fast, mens b varierer, er forskriften for dækningsbidraget:

$$f(x,y)=30\cdot x+b\cdot y$$

Vi indfører igen en skyder, denne gang for dækningsbidraget b. Vi ser da at maksimumsstedet skifter til nabopunktet (14,0) når b er ca. 15, og at det tilsvarende skifter til nabopunktet (3,16), når b er ca. 22.5.
For at finde de præcise værdier for intervalgrænserne for b aflæser vi hældningerne (rød og blå) for de to kantlinjer, der støder op til hjørnepunktet (12,4). Den sammenholdes da med hældningen for niveaulinjen:

$$30\cdot x+b\cdot y=k$$

$y=\frac{-30}{b}\cdot x+\frac{k}{b}$, dvs hældningen for niveaulinjen er: $\frac{-30}{b}$

Kant 1: $\alpha_1=-2$. Vi finder da $\frac{-30}{b}=-2 \Leftrightarrow b=15$. Kant2: $\alpha_1=-\frac{4}{3}$. Vi finder da $\frac{-30}{b}=-\frac{4}{3} \Leftrightarrow b=\frac{90}{4}=22.5$.

ISBN 9788770668781

Konklusion: Maksimumsstedet ligger ved produktionen 12 planglas og 4 spejle om dagen, så længe dækningsbidraget for spejle ligger i det åbne interval $]15;22.5[$.

Øvelse 4: Kontrol af løsningerne i regneark

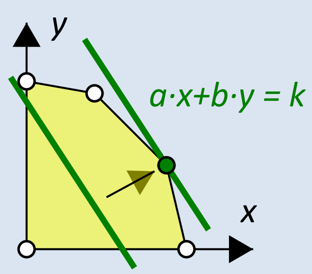
Det første spørgsmål kunne også være løst ud fra tabellen i et regneark. Vi skal da først overføre tabellen til vores regneark (tabellen kan evt. hentes fra hjemmesiden), idet vi erstatter de matematiske formler med de tilsvarende regnearks-formler.

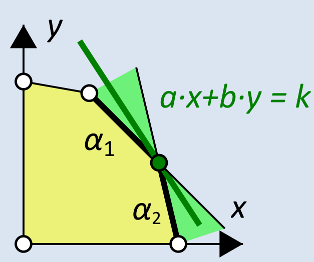
	A	B	C	D	E	F	G
1	Emne\Aktivitet	Slibning	Hærdning	Boring		Uafhængige	Værdi
2	(min. per dag)					variable (antal)	
3	Planglas	10	20	4		x =	
4	Spejl	20	15	2		y =	
5	Begrænsning						
6	(min. per dag)	350	300	56			
7							
8	Produktions-						
9	betingelse	=SUMPRODUKT(B3:B4;$G3:$G4)	=SUMPRODUKT(C3:C4;$G3:$G4)	=SUMPRODUKT(D3:D4;$G3:$G4)			
10							
11						Afhængig variabel Dækningsbidrag	=30*G3+20*G4

Regnearket opbygges, så de uafhængige variable *x* og *y* i de grønne celler importeres i udregningen af produktionsbetingelser og dækningsbidrag. Visse regneark har en indbygget *problemløsning* af LP-problemer og tilsvarende følsomhedsanalyse. Du kan på ***her*** finde en detaljeret gennemgang af løsningen af opgaven ved hjælp af regneark.

Praxis: Lineær programmering i to variable med følsomhedsanalyse

Optimeringsdel:
Identificér de to *uafhængige* beslutningsvariable *x* og *y*.
Opskriv *kriteriefunktionen*, dvs. den *afhængige* variabel $f(x,y)=a\cdot x+b\cdot y$.
Omskriv begrænsningerne for de involverede aktiviteter til uligheder (herunder evt. positivitetsbetingelserne $x\geq 0, y\geq 0$) og tegn det tilhørende polygonområde.
Du kan nu enten finde den søgte optimale løsning ved *hjørneinspektion* eller ved at *undersøge niveaulinjerne*.
Bruges niveaulinjer, skal du tegne niveaulinjen $a\cdot x+b\cdot y=k$ og forskyde den i retning af voksende værdier af *k* (ved maksimering) eller aftagende værdier af *k* (ved minimering), indtil den slipper polygonområdet i et hjørnepunkt. Dette hjørnepunkt er da det optimale punkt. Fastlæg koordinater og tilhørende værdi af kriteriefunktionen for det optimale hjørnepunkt.
Følsomhedsanalyse:
Fastlæg hældningerne α_1 og α_2 for de to kanter, der støder op til det optimale hjørnepunkt. Ved følsomhedsanalyse for *x* skal du nu finde de tilhørende værdier af koefficienten a, så niveaulinjen netop får en af de to hældninger α_1 og α_2. Tilsvarende ved følsomhedsanalyse for *y*, hvor det er værdien af koefficienten *b*, der tilpasses, så niveaulinjen netop får en af de to hældninger α_1 og α_2. Den relevante koefficient skal da ligge i intervallet udspændt af de to fundne randværdier.





Øvelse 5: Frit efter eksamensopgaver fra hhx mat A og B

ISBN 9788770668781

En virksomhed ønsker at anskaffe et antal nye printere. Virksomheden skal vælge mellem type A, som både kan printe og kopiere samt type B, som kun kan printe. Lad *x* angive antal printere af type A og lad *y* angive antal printere af type B.

Virksomheden har besluttet maksimalt at anvende 560 000 kr. til anskaffelse af printere. Type A koster 80 000 kr. pr. stk. og type B koster 40 000 kr. pr. stk.

Virksomheden har besluttet højst at anskaffe 8 nye printere, hvoraf mindst 2 skal være af type A.

Kapaciteten for printer type A er opgivet til 1500 print eller kopier i timen og for printer type B til 1000 print i timen. Funktionen $f(x, y) = ax + by$ angiver den samlede kapacitet i timen for de anskaffede printere.

a) Argumenter for, at $f(x,y) = 80000 \cdot x + 40000 \cdot y$.
b) Tegn polygonområdet hørende til begrænsningerne.
c) Bestem det antal printere af type A og det antal printere af type B, der giver virksomheden den størst mulige samlede kapacitet i timen.
d) Gør rede for, at kapaciteten for type A kan variere i intervallet [1000; 2000], hvis *f* stadig skal antage sin største værdi i punktet bestemt i spørgsmål c).

Øvelse 6: Vejledende eksamensopgave, hhx mat A
En virksomhed producerer og sælger to typer handicaplifte, FLEXSTAIRS og UPLIFT.
Lad *x* angive antal FLEXSTAIRS og lad *y* angive antal UPLIFT.
Produktionen af de to lifte foregår i to afdelinger, produktionsafdelingen og testafdelingen.
Til både produktion og testning er der et begrænset antal timer pr. måned.
Det tager 20 timer at producere en FLEXSTAIRS og 15 timer at producere en UPLIFT. Samlet er der 300 timer i produktionsafdelingen pr. måned.
Der skal bruges 2 timer til at teste en FLEXSTAIRS og 4 timer til at teste en UPLIFT. Samlet er der 40 timer i testafdelingen pr. måned.

Ovenstående oplysninger er samlet i følgende skema:

	Flexstairs	**Uplift**	**Max tid**
Produktion	20	15	300
Testning	2	4	40
Dækningsbidrag	10000	10000	


Foto:http://www.liftup.dk/index.php?id=5,0,0,1,0,0

Det samlede dækningsbidrag ved en produktion af *x* antal FLEXSTAIRS og *y* antal UPLIFT er givet ved funktionen $f(x,y) = 10000x + 10000y$.
a)Bestem det antal FLEXSTAIRS og det antal UPLIFT, virksomheden skal producere pr. måned for at opnå det størst mulige samlede dækningsbidrag.

Virksomheden ser de største fremtidsmuligheder i produktion og salg af FLEXSTAIRS. Hvis dækningsbidraget på FLEXSTAIRS stiger, overvejer virksomheden at stoppe produktionen af UPLIFT.

b) Bestem hvor meget dækningsbidraget på en FLEXSTAIRS mindst skal stige til, for at det bedst kan betale sig for virksomheden udelukkende at producere FLEXSTAIRS.