L&R Uddannelse EGMONT

Projekt 5.2 Cobb Douglas-funktioners særlige egenskaber

1. Produktionsfunktioner, der opfylder elasticitetskrav, er potenserede Cobb-Douglas funktioner

Den generelle definition på elasticitet har vi i grundbogen formuleret således:

Definition: Elasticitet af en funktion i forhold til en variabel
Lad $f(z)$ være en funktion, der afhænger af en variabel *z*. Ved elasticiteten *e* af *f* i forhold til *z* forstår vi *den relative ændring af f i forhold til den relative ændring af z*. På formel:

$$e(f;z)=\frac{\left(f(z_0+\Delta z)-f(z_0)\right)/f(z_0)}{\Delta z/z_0}$$, eller hvis funktionen er differentiabel:

$$e(f;z)=\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\cdot z_0$$, eller generelt: $$e(f;z)=\frac{f'(z)}{f(z)}\cdot z$$

Formlen i definitionen kan omskrives således:

$$e(f;z)=\frac{f'(z)}{f(z)}\cdot z \Leftrightarrow f'(z)=\frac{e(f;z)}{z}\cdot f(z) \qquad (*)$$

I grundbogen har vi vist:

Sætning 1: Tolkning af potenserne i en Cobb-Douglas funktion
For en Cobb-Douglas funktion $f(I,A)=k\cdot I^{\alpha}\cdot A^{1-\alpha}$ gælder der:
α er produktionselasticiteten mht. kapitalen (investeringen), *I*
$1-\alpha$ er produktionselasticiteten mht. arbejdskraften, *A*

Vi vil nu bevise "den omvendte" sætning:

Sætning 2: Produktionsfunktioner er Cobb-Douglas funktioner
Hvis en funktion *f* af to eller flere variable opfylder en differentialligning af typen (*) for hver af sine variable, hvor $e(f;z)$ er en konstant for hver af de variable, så er *f* en Cobb-Douglas funktion, hvis funktionen yderligere er homogen.

Bevis:
Lad os sige, at *f* er en funktion af de to variable *x* og *y*. Vi holder nu først *y* fast og betragter ligningen (*) som en ligning i *x*

$$f'(x,y_0)=\frac{e(f;x)}{x}\cdot f(x,y_0)$$

Hvis $e(f;z)$ i (*) er en konstant, så lad os betegne den α. Ligningen har da følgende form:

$$f'(x,y_0)=\frac{\alpha}{x}\cdot f(x,y_0)$$

Dette er en lineær første ordens differentialligning, som vi har løst i kapitel 3a:

$$f(x,y_0)=c\cdot e^{\int\frac{\alpha}{x}dx} \qquad (**)$$

Det ubestemte integral løses først:

$$\int\frac{\alpha}{x}\,dx=\alpha\cdot\int\frac{1}{x}\,dx=\alpha\cdot\ln(x)$$

Vi tager ikke en ubestemt konstant med i løsningejn af integralet, da denne er indeholdt i konstanten *c*.
Vi indsætter nu i (**)

$$f(x,y_0)=c\cdot e^{\alpha\cdot\ln(x)}=c\cdot\left(e^{\ln(x)}\right)^{\alpha}=c\cdot x^{\alpha}$$

Vi kan foretage denne udregning for alle værdier af y_0. Konstanten *c* vil naturligvis afhænge af y_0, aså lad os skrive det som en funktion:

$$f(x,y_0)=c(y_0)\cdot x^{\alpha} \qquad (***)$$

På helt samme måde kan vi bestemme en løsning, hvis vi holder *x* fast. Her er ligningen:

$$f'(x_0,y)=\frac{\beta}{y}\cdot f(x_0,y)$$

og vi vil få løsningen:

$$f(x_0,y)=d(x_0)\cdot y^{\beta} \qquad (****)$$

Da vi kunne foretage udregningen for alle x_0 og y_0, har vi altså:

$$f(x,y)=c(y)\cdot x^{\alpha} \ (***) \qquad \text{og} \qquad f(x,y)=d(x)\cdot y^{\beta} \ (****)$$

Disse to udtryk er selvfølgelig ens:

$$c(y)\cdot x^{\alpha}=d(x)\cdot y^{\beta}$$

Denne ligning er opfyldt for alle *x* og *y*. Sæt $x=1$:

$$c(y)\cdot 1^{\alpha}=d(1)\cdot y^{\beta}$$

og indsæt dernæst $c(y)=d(1)\cdot y^{\beta}$ i (***):

$$f(x,y)=c(y)\cdot x^{\alpha}=d(1)\cdot y^{\beta}\cdot x^{\alpha}=k\cdot x^{\alpha}\cdot y^{\beta}$$

hvor vi har givet konstanten $d(1)$ navnet *k*.

I bogens gennemgang har vi set, at den egenskab at være homogen, giver $\beta=1-\alpha$.
Dermed er det vist, at funktionen er en Cobb Douglas funktion.

2. Forholdet mellem honorering af kapital og honoreringen af arbejde

Lad os antage, vi i en bestemt sektor har en produktionsfunktion af typen (**). En del af produktionen anvendes til at honorere arbejdskraften, en anden anvendes til at honorere den investerede kapital. Vi betragter produktionen over et kort tidsrum og antager, at i dette korte tidsrum er honoreringen pr enhed konstant, både mht arbejdskraft og kapitel. Man kalder honorering pr enhed af arbejdskraft for *lønraten*, ω og honorering pr enhed af kapitalen for *profitraten*, μ. Den samlede honorering af arbejdskraft og kapital betegnes *U* (udgifter / omkostninger). Vi kan opstille ligningen:

$$U=\mu\cdot I+\omega\cdot A$$

Lad os sige, værdien af produktionen er *C*. Så vil kapital og arbejdskraft opfylde:

$$k\cdot I^{\alpha}\cdot A^{1-\alpha}=C$$

Øvelse 5.3

a) Vis ved brug af potensregneregler, at $I=\left(\frac{C}{k}\right)^{1/\alpha}\cdot A^{(\alpha-1)/\alpha}$

b) Indsættes dette udtryk i formlen for *U* får vi: $U=\mu\cdot\left(\frac{C}{k}\right)^{1/\alpha}\cdot A^{(\alpha-1)/\alpha}+\omega\cdot A$

Vis, at $$\frac{dU}{dA}=\mu\cdot\left(\tfrac{C}{k}\right)^{1/\alpha}\cdot\left(\tfrac{\alpha-1}{\alpha}\right)\cdot A^{-1/\alpha}+\omega$$

c) Vi ønsker at minimere omkostningerne, *U*. Dette kræver, at $\frac{dU}{dA}=0$. Vis, at dette giver ligningen:

$$\left(\tfrac{C}{k}\right)^{1/\alpha}\cdot\left(\tfrac{1-\alpha}{\alpha}\right)\cdot A^{-1/\alpha}=\left(\tfrac{\omega}{\mu}\right)$$

d) Vis ved at differentiere to gange, at dette faktisk er et minimum,
e) Vis, ved at indsætte udtrykket for *C*, at vi får:

$$I\cdot A^{(1-\alpha)/\alpha}\cdot\left(\tfrac{1-\alpha}{\alpha}\right)\cdot A^{-1/\alpha}=\left(\tfrac{\omega}{\mu}\right)$$

ISBN 9788770668781

f) Vis, at dette kan reduceres til:

$$\frac{I}{A}\cdot\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)=\left(\frac{\omega}{\mu}\right)$$

g) Vis, at denne ligninmg kan omskrives til følgende forhold:

$$\frac{\mu\cdot I}{\omega\cdot A}=\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Nu husker vi ovenfra, at $\mu\cdot I$ svarer til *honoreringen af kapitalen*, mens $\omega\cdot A$ svarer til *honoreringen af arbejdskraften*. Dvs:

Forholdet mellem honorering af kapitalen og honoreringen af arbejdskraften er lig med forholdet mellem de to potenser, α og $1-\alpha$,