ISBN 9788770668781

Projekt 5.1. Feltrationer til en millionhær i krig – Om oprindelsen til operationsanalyse og Lineær programmering

1. Matematikken og militæret i USA under og efter anden verdenskrig

Selv om USA først blev direkte involveret i 2. Verdenskrig efter Japans angreb på Pearl Harbour 7. december 1941, så var det i årene forud en udbredt opfattelse ikke mindst i emigrantkredse, at det måtte komme. Men det politiske establishment var markant imod et direkte engagement, så mange forberedelser foregik i det skjulte.
Amerikanske forskningsmiljøer var stærkt præget af den massive tilstrømning af videnskabsmænd på flugt, først fra Nazi-Tyskland, og siden fra land efter land, som tyskerne besatte. Ved krigens udbrud i Europa i 1939 etablerede det matematiske samfund i USA *The War Preparedness Committee*, og der blev organiseret tilsvarende komiteer blandt ingeniører og fysikere. Men ingen af disse var i stand til at overtale militæret til at inddrage nye teknologiske landvindinger, fx inden for radarteknologi, og i det hele taget involvere videnskaben i forberedelsen af det uundgåelige. Ikke mindst den indbyrdes rivalisering mellem hær og flåde stod i vejen, men helt generelt var der på det tidspunkt ringe forståelse for, hvad videnskaben kunne bidrage med.

Men de videnskabelige samfund havde en stærk medspiller. Præsident Roosevelt var lige så overbevist som de om det uundgåelige opgør der ventede, og i juni 1940 nedsættes *The National Defense Research Committee (NDRC)* uden om kongressen og med direkte reference til præsidenten. Komiteen, der blev ledet af en af MIT's førende forskere Vannavar Bush, fik sine egne forskningsmidler, og det lykkedes Bush at udvikle et system, der på en gang holdt kongressen uden for indflydelse og indsigt i omfanget, og samtidig imødekom forskernes skepsis over at blive underlagt politisk styring. Forskernes pointe var nemlig, at grundforskning var afgørende, hvis man skulle opnå overlegenhed i krigen. Forskerne blev tilknyttet gennem et kontraktsystem, hvor de blev på deres respektive universiteter og dér arbejdede på aftalte projekter. Det var Big Science, men på en helt anden måde end atombombeprojektet, hvor tusinder af videnskabsfolk var samlet et sted, i Los Alamos i New Mexico. Her var det et netværk af forskere spredt ud over USA, og det krævede et stort organisationstalent at holde styr på det.

I maj 1941 går Roosevelt i offensiven og etablerer en organisation, *Office af Science, Research and Development (OSRD)*, der skal samle al forskning i udvikling af nye våbensystemer. Det er uafhængigt af militærets organisation og får nu tilført store midler fra kongressen. I første omgang er matematikerne ikke inddraget og de etablerer derfor deres egen organisation, *The Applied Mathematics Panel (AMP)*, men det varer dog ikke længe før de inddrages i områder som kodebrydning, ballistik, udvikling af radarsystemer - og i operationsanalyse som er emnet for dette kapitel.

Det enorme organisatoriske arbejde med at holde styr på disse hundredvis af projekter blev varetaget af Mina Rees (1902-1997), der selv havde en fortid på det berømte matematiske institut i Göttingen i Tyskland. Mina Rees var algebraiker ved Universitetet i Göttingen. Det var ikke let for kvinder på den tid at skabe sig en forskerkarriere inden for matematik. En af hendes forgængere Emmy Noether (1882-1835), der i dag er anerkendt som en af de største inden for moderne algebra, fik kun lov til at forelæse, når det blev slået op som om det var Hilberts forelæsning. Under anden verdenskrig arbejdede Mina Rees med at rekruttere og koordinere de amerikanske matematikeres indsats – en opgave hun løste med stor succes. Du kan finde hendes egen beretning om matematikkens rolle i 2.VK ***her.***

Den mest berømte matematiker, der blev tilknyttet denne gruppe var uden tvivl John von Neumann (1903-1957), en ungarsk matematiker, der havde søgt tilflugt i USA og arbejdede på det prestigefyldte Institute of Advanced Study ved Princeton. Von Neumann blev af mange regnet for sin tids største matematiker. Det mest synlige resultat af matematikernes engagement var udviklingen af computeren, hvor von Neumann bl.a. leverede ideen om at opbygge de automatiserede beregninger på totalssystemet (det binære system), som vi også kender fra nutidens computere.
Mina Rees påpegede i en evalueringsrapport lige efter krigen, at der blev gjort betydelige fremskridt inden for mange områder af anvendt matematik, og det blev derfor besluttet at fortsætte samarbejdet mellem militæret og matematikerne efter krigen.

I april 1946 underskrev von Neumann en kontrakt med det amerikanske militær om bygning af den første computer baseret på hans idéer beskrevet i *First Draft of a Report on the EDVAC* i 1945, hvor *EDVAC* står for *Electronic Discrete Variable Automatic Calculator*. Det kostede lidt under 500000 dollar at udvikle computeren, der havde en hukommelse på ca. 5KB og kunne håndtere de fire regningsarter - en vild pris for en simpel regnemaskine, tænker vi i dag!

Von Neumann var lige som Gauss ekstremt hurtigt tænkende. Her ses han sammen med Oppenheimer – der efter krigen blev direktør for Institute of Advanced Study – foran en af de førstecomputere EDVAC fra 1946, som han var med til at udvikle i årene lige efter Anden Verdenskrig

Et andet af de store nye forskningsområder, der udsprang af 2. Verdenskrig var operationsanalyse, dvs. udvikling af modeller til håndtering af komplekse problemer vedrørende logistik i industrien og militæret. Sådanne logistiske problemer kunne beskrives ved en række lineære ligninger og uligheder, og løsningen på et sådant problem skulle findes ved at udarbejde en slags program for, hvilke aktiviteter der skulle udføres hvornår i forløbet, præcis på samme måde som fx et partitur for en klassisk koncert, fortæller hvilke musikinstrumenter, der skal spille, og hvornår. Området, der senere blev døbt *lineær programmering* af økonomen Koopmans, skulle vise sig at blive et anden af de afgørende bidrag fra samarbejdet mellem matematikerne og militæret under krigen. Hovedkraften i udviklingen af denne nye matematiske disciplin var George Dantzig (1914-2005).

2 Dantzig og modellen bag den Lineære Programmering

Den oprindelige inspiration fik Dantzig fra økonomi. I forenklede økonomiske modeller opstilles lineære sammenhænge mellem inputvariablene, der typisk står for ressourcer, og outputvariablene, der typisk står for varer. Hvis *y* er en vare, der fremstilles under brug af ressourcerne $x_1, x_2, ..., x_n$ så er en lineær sammenhæng givet ved en ligning på formen

$$y = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n \cdot x_n$$

hvor $a_1, a_2, ..., a_n$ er konstanter, der siger noget om mængden af de enkelte ressourcer i produktionen. Man havde længe kunnet håndtere løsning af lineære ligningssystemer, men problemet i økonomi var ofte, at antallet af ligninger langt oversteg antallet af variable. Og så kan ligningssystemet ikke løses eksakt.

Dantzigs første store bidrag til en ny tilgang var, at omformulere disse ligninger til *systemer af uligheder*. Dantzig bemærkede nemlig, at *begrænsninger* altid spillede en stor rolle, fordi der jo ikke er ubegrænsede ressourcer til rådighed. Når man regnede med modellerne, fx for at beskrive et program for en produktion, en produktionsplan, måtte man derfor overholde en række lineære uligheder, således at forbruget af de ressourcer, der indgik i programmet, holdes under det faktiske lager af disse ressourcer. Samtidig var det klart ud fra konteksten, at de variable kun kan være positive.

Dantzig som ung på vandretur i bjergene. Dantzig var mere end nogen anden ansvarlig for udviklingen af den lineære programmeringsmodel.

Dantzigs andet store bidrag var at opstille en *lineær kriteriefunktion*, en funktion der kunne give et svar på, hvordan produktionen skulle tilrettelægges (input) for at opnå det maksimale udbytte (output). Ved hjælp af kriteriefunktionen blev problemet dermed oversat til et problem om at optimere en funktion under givne betingelser.

Da USA gik ind i krigen og begyndte opbygningen af en millionstor hær, rejste der sig et væld af logistiske problemer. Et af de helt grundlæggende var at sikre, at alle soldater blev forsynet med feltrationer, der dækkede det daglige behov for energi og basale næringsstoffer. Dette udgør samtidig en af de tunge økonomiske poster i krigsbudgettet, så dette satte fokus på det såkaldte *diætproblem*, der i al sin enkelhed lyder:

> *Hvordan sammensætter man en feltration, så man på en gang optimerer næringsindholdet og minimerer omkostningerne?*

Dengang havde man endnu ikke udviklet lineær programmering, men vi kan illustrere ideen og styrken i denne metode netop med diætproblemet.

3. Diætproblemet

I begyndelsen af 1940'erne havde økonomen Joseph Stigler (1911-91) undersøgt diætproblemet med håndregning og almindelig logik, og I 1945 havde han samlet resultaterne af sin undersøgelse i artiklen *The cost of subsistence*. Stiglers hovedpointe var, at det amerikanske militærs feltration var alt for dyr. Du kan hente den originale artikel via **her .**

Som udgangspunkt brugte Stigler anbefalingerne fra National Research Council, der fokuserede på 9 minimumsanbefalinger, der ville dække det daglige behov for energi, protein, calcium, jern, A-vitamin, B_1-, B_2- og B_3-vitamin samt C-vitamin.

Næringsstof	Energi (kilokalorier)	Protein (gram)	Calcium (gram)	Jern (mg)	A-vitamin (1000 i.e.)	B_1-vitamin (mg)	B_2-vitamin (mg)	B_3-vitamin (mg)	C-vitamin (mg)
Variabelnavn	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*
Dagligt behov	3	70	0.8	12	5	1.8	2.7	18	75

Lad os i det følgende betegne de daglige behov af de 9 næringsarter $n_1, n_2, ..., n_9$. Fx er $n_1 = 3$ kilokalorier. Selvfølgelig har man også brug for andre næringsstoffer, men National Research Council gik ud fra, at hvis disse var dækket ind, ville de andre automatisk følge med. Stiegler fremskaffede en tabel over næringsstofferne i 77 fødevareemner, og han beregnede for hver af disse, hvor store mængder af hvert af de 9 næringsstoffer han kunne opnå, når han købte for 1 dollar af den bestemte fødevare. Han kunne således regne på fødevareemnernes næringsindhold *pr. dollar*. Vi nummererer de 77 fødevareemner, og lader $a_1, a_2, ..., a_{77}$ betegne energiindholdet pr dollar i fødevaremne 1, 2, osv. Tilsvarende betegner $b_1, b_2, ..., b_{77}$ proteinindholdet pr dollar i fødevaremne 1, 2, osv. Dermed kunne Stigler opstille 9 uligheder, der hver indeholder en kombination af de 77 fødevareemner:

Næringsart 1, Energi: $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_{77} \cdot x_{77} \geq n_1$

Næringsart 2, Protein: $b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + ... + b_{77} \cdot x_{77} \geq n_1$

...

Næringsart 9, C-vitamin: $i_1 \cdot x_1 + i_2 \cdot x_2 + ... + i_{77} \cdot x_{77} \geq n_9$

hvor $x_1, x_2, ..., x_{77}$ betegner udgiften til hvert af de 77 fødevareemner, målt i dollar.

Vi skal så finde ud af, hvor store mængder af hvert af fødevareemnerne, vi har brug for, og dermed hvor mange penge vi skal bruge for at kunne købe disse mængder. Stieglers mål var jo at gøre feltrationen dækkende med hensyn til indholdet af næringsstoffer samtidigt med at den blev så billig som muligt, så derfor handler problemet altså om, at gøre summen $x_1 + x_2 + ... + x_{15}$ mindst mulig. Men, at løse dette system af 77 uligheder var et uoverstigeligt problem. Stigler måtte derfor forsøge at reducere antallet af nødvendige uligheder. Derfor begyndte han at undersøge næringsstofindholdet nærmere for hvert af de 77 fødevareemner. Han fandt ud af, at for en hel del af fødevareemnerne findes en anden fødevare, der indeholder flere næringsstoffer pr. dollar, og derfor kan bruges i stedet, så prisen minimeres. Stiegler fik reduceret de 77 fødevareemner til de følgende 15, hvor næringsindholdet stadig er angivet pr. dollar fødevareemne:

Næringsindhold pr. dollar i fødevareemner	Energi (kilokalorier)	Protein (gram)	Calcium (gram)	Jern (mg)	A-vitamin (1000 i.e.)	B_1-vitamin (mg)	B_2-vitamin (mg)	B_3-vitamin (mg)	C-vitamin (mg)
Hvedemel	44.7	1411	2.0	365	–	55.4	33.3	441	–
Mælkepulver	8.4	422	15.1	9	26.0	3.0	23.5	11	60
Plantemargarine	20.6	17	0.6	6	55.8	0.2	–	–	–
Cheddarost	7.4	448	16.4	19	28.1	0.8	10.3	4	–
Lever	2.2	333	0.2	139	169.2	6.4	50.8	316	525
Grønne bønner	2.4	138	3.7	80	69.0	4.3	5.8	37	862

ISBN 9788770668781

Kål	2.6	125	4.0	36	7.2	9.0	4.5	26	5369
Løg	5.8	166	3.8	59	16.6	4.7	5.9	21	1184
Kartofler	14.3	336	1.8	118	6.7	29.4	7.1	198	2522
Spinat	1.1	106	–	138	918.4	5.7	13.8	33	2755
Søde kartofler	9.6	138	2.7	54	290.7	8.4	5.4	83	1912
Ferskner (tørret)	8.5	87	1.7	173	86.8	1.2	4.3	55	57
Blommer (tørret)	12.8	99	2.5	154	85.7	3.9	4.3	65	257
Limabønner (tørret)	17.4	1055	3.7	459	5.1	26.9	38.2	93	–
Bønner (tørret)	26.9	1699	11.4	792	–	38.4	24.6	217	–
Dagligt behov	**3**	**70**	**0.8**	**12**	**5**	**1.8**	**2.7**	**18**	**75**

Tabelen kan hentes ***her***.

Øvelse 1 - dækning af energibehov

I tabellen står der, at det daglige energibehov er 3 kilokalorier. Dette kan vi få dækket af forskellige fødevareemner. Hvis vi fx køber hvedemel for x_1 dollar, så vil vi få et energibidrag fra hvedemel på $44.7 \cdot x_1$.

Vi indfører nu variabelbetegnelserne $x_1, x_2, \ldots, x_{15}$ for udgifterne til samtlige 15 fødevareemner.

a) Bestem energibidraget fra hvert af de øvrige 14 fødevareemner.

b) Opstil en ulighed, som summen af de 15 energibidrag skal opfylde.

c) Er uligheden for energi sand, hvis der købes for 10 cent af hvert fødevareemne?

Øvelse 2 - dækning af proteinbehov

Vi ser nu i stedet på næringsstoffet protein.

a) Bestem proteinbidraget fra hvert af de 15 fødevareemner.

b) Opstil en ulighed, som summen af de 15 proteinbidrag skal opfylde.

c) Er uligheden for protein sand, hvis der købes for 10 cent af hvert fødevareemne?

Øvelse 3

Opstil uligheder for hvert af de andre næringsstoffer.

a) Er de 7 uligheder opfyldt, hvis du køber for 10 cent af hver fødevare?

b) Hvor meget skal du købe hvedemel for, hvis du vil holde indkøbet af de 14 andre fødevarer fast på 10 cent, og samtidigt sørge for at alle 9 uligheder er opfyldt?

Øvelse 4

Hvem kan finde den laveste pris? I grupper udfordrer I hinanden til at bestemme den billigste kombination af de 15 fødevarer, hvor det daglige behov er opfyldt. Man behøver ikke inddrage alle 15 fødevarer.

Øvelse 5

Her er tre eksempler på fødevareemner, som Stigler ikke inkluderede:

Næringsindhold pr. dollar i fødevareemner	Energi (kilokalorier)	Protein (gram)	Calcium (gram)	Jern (mg)	A-vitamin (1000 i.e.)	B_1-vitamin (mg)	B_2-vitamin (mg)	B_3-vitamin (mg)	C-vitamin (mg)
Majsmel	36.0	897	1.7	99	30.9	17.4	7.9	106	–
Svinemørbrad	4.4	249	0.3	37	0	18.2	3.6	79	–
Dåselaks	5.8	705	6.8	45	3.5	1.0	4.9	209	–

a) Hvis man køber for 10 cent hvedemel og 10 cent majsmel, hvilken af de to fødevarer giver så det største bidrag til hvert af de 9 næringsstoffer?

b) Undersøg, hvilken af de 15 fødevareemner der giver større bidrag end svinemørbrad for 10 cent.

c) Undersøg, hvilken af de 15 fødevareemner, der giver større bidrag end dåselaks for 10 cent.

ISBN 9788770668781

Øvelse 6

Vi vælger at købe for 10 cent plantemargarine.

a) Bestem næringsstofbidragene fra plantemargarine.

Vi vælger nu i stedet at bruge 5 cent på hvedemel og 5 cent på spinat.

b) Bestem summen af næringsstofbidragene fra hvedemel og spinat?
Hvad kan du konkludere om brugen af de 10 cent?

Øvelse 7

Vi køber kun af fødevareemnerne hvedemel, lever, spinat og bønner.

a) Forklar betydningen af ligningssystemet:

$$\begin{aligned} 2.0\cdot x_1+0.2\cdot x_2+0\cdot x_3+11.4\cdot x_4&=0.8\\ 0\cdot x_1+169.2\cdot x_2+918.4\cdot x_3+0\cdot x_4&=5\\ 33.3\cdot x_1+50.8\cdot x_2+13.8\cdot x_3+24.6\cdot x_4&=2.7\\ 0\cdot x_1+525\cdot x_2+2755\cdot x_3+0\cdot x_4&=75 \end{aligned}$$

b) Hvilke daglige behov af næringsstoffer får vi opfyldt?

c) Løs ligningssystemet med dit værktøjsprogram – hvad fortæller løsningen?

d) Er positivitetsbetingelserne opfyldt?

e) Tilføj fødevaren kål, og formuler det nye ligningssystem.

f) Tilføj mælkepulver, cheddarost, søde kartofler og limabønner, og formuler det nye ligningssystem.

g) Løs ligningssystemet i dit værktøjsprogram.

Som øvelserne ovenfor indikerer, kunne Stigler også se bort fra fødevarerne markeret med gult i skemaet, idet det i hvert enkelt tilfælde er muligt at erstatte den pågældende fødevare med en såkaldt *konveks kombination* af de resterende ni fødevarer med større næringsindhold, og hvor kombinationen stadigvæk koster 1 dollar.
Stigler var nu nede på 9 mulige fødevarer og kunne derfor finde en passende løsning ved at prøve sig frem. Årsagen til, at han ville reducere til 9 fødevarer er, at så er der 9 ligninger med 9 ubekendte. Sådanne ligningssystemer kan ofte løses helt eksakt. Men Stigler søgte at reducere antallet yderligere, og han nåede til sidst ned på følgende forslag til feltration, der kun kostede 39,93 dollar om året, dvs. ca. det halve af udgiften til den feltration som man dengang brugte i hæren:

Stigler's 1939 Diet

Food	Annual Quantities	Annual Cost
Wheat Flour	370 lb.	$13.33
Evaporated Milk	57 cans	$3.84
Cabbage	111 lb.	$4.11
Spinach	23 lb.	$1.85
Dried Navy Beans	285 lb.	$16.80
Total Annual Cost		$39.93

Det er klart, at man ikke i almindelighed kan sidde og gætte sig frem gennem store tabeller, når man skal opstille modeller og løse sådanne problemer. Vi har gennemgået det i så stor detalje for at illustrere hvilket enormt spring fremad det var, da man udviklede lineær programmering og fandt de stærke algoritmer, der kan knække endog meget store systemer. En optimal kombination af 77 fødevarer er et lilleput problem i forhold til de logistiske problemer en hær som den amerikanske havde, mht. placering og dimensionering af ammunitionsdepoter, reservedelslagre osv.

I foråret 1947 havde Dantzig udviklet den såkaldte simpleksmetode til løsning af sådanne problemer og for at teste den besluttede Dantzig og hans gruppe sig for i efteråret 1947 at gennemregne Stiglers diætproblem med samtlige 77 fødevarer og 9 daglige behov. De havde ikke elektroniske computere til rådighed, så arbejdet blev uddelegeret til ni menneskelige computere, der dog fik assistance af bordregnemaskiner. Det tog ca. 120 mandedage at løse problemet. Det faktiske minimum var 39,69 dollar om året. Stiglers løsning var kun 24 cent dyrere! I dag kan man løse Stiglers problem i et splitsekund med et passende regneark.

Øvelse 8
Hent Stiglers tabel samt en vejledning i brugen af regneark til løsning af et problem som diætproblemet, og bestem en løsning ved hjælp af den indbyggede metode til at løse lineære programmerings-opgave

4. Von Neumann og matematikken bag den lineære programmering

Dantzig havde som sagt i 1947 opstillet en matematisk model, men endnu ikke fundet en algoritme, der i praksis kunne håndtere modellen. Dantzig søgte derfor råd hos Chicagoøkonomen Charles Koopmans (1910-1985), der blev meget begejstret for at høre om Dantzigs arbejde, og i øvrigt senere foreslog ham, at kalde sin metode for *lineær programmering*. Men han kendte heller ikke til nogen egentlig algoritme, der kunne bruges til at håndtere modellen.

Charles Koopmans, George Dantzig og Leonid Kantorovitch ved en kongres i Østrig i 1970. Amerikaneren Koopmans og russeren Kantorovich modtog nobelprisen i 1975 for deres arbejde med lineære programmeringsmodeller. Dantzig blev overraskende nok forbigået – den svenske nobelkomite havde åbenlyst besluttet, at Dantzig var matematiker, ikke økonom, og som bekendt kan man ikke få nobelprisen i matematik.

Sommeren 1947 lykkedes det Dantzig at udvikle den såkaldte simpleksmetode, som vi omtaler i afsnit 2.4. Den virkede overraskende godt i praksis, selv om Dantzig ikke helt forstod hvorfor. Han havde nu både en model og en metode, men han havde stadigvæk ingen teori om lineær programmering. Som vi omtaler i afsnit 2.4, så indebærer simpleks-metoden et tilsyneladende uoverskueligt antal beregninger, så Dantzig havde alligevel mistet troen på, at han havde fundet metoden. Han besluttede sig derfor for at anmode om en konsultation hos matematikkens troldmand von Neumann, og der blev arrangeret et møde i Princeton i efteråret 1947.

Dantzig, der var en glimrende pædagog, begyndte omhyggeligt at forklare von Neumann om baggrunden for deres arbejde, og hvordan de opstillede modeller for flyvevåbnet osv. Efter 10 minutter var von Neumans tålmodighed sluppet op. "Kom til sagen", udbrød han, og Dantzig gav ham derfor den ultrakorte version, hvor han på ét minut forklarede, hvad problemet handlede om. "Nåh, det problem!", udbrød von Neuman og kastede sig straks ud i et halvanden times foredrag om teorien bag den lineære programmering. En halv time inde i foredraget kunne von Neuman godt se, at Dantzig havde tabt både næse og mund, så han holdt en kort pause og udbrød beroligende: "Nu skal du ikke tro, at det bare er noget, jeg hiver lige ud af den blå luft som en anden tryllekunstner." Von Neumann havde netop afsluttet en bog om et beslægtet problem indenfor en anden ny matematisk teori, nemlig spilteori, og som han selv udtalte: "Så jeg står bare og gætter på at de to problemstillinger i virkeligheden er ækvivalente. Den teori jeg skitserer for dig er fuldstændigt analog til den, vi har udviklet for spilteori."

ISBN 9788770668781

Dantzig tog omhyggeligt noter, så da han tog hjem fra Princeton var han ikke blot i besiddelse af en interessant matematisk model og en metode til at løse den, men også en omfattende matematisk teori. Noterne cirkulerede blandt hans kolleger, men blev ikke offentliggjort i noget tidsskrift, for det var jo ikke hans egne ideer, men von Neumanns. Men med udgangspunkt i samtalerne med von Neumann udviklede Dantzig så den simpleks-algoritme, der gav lineær programmering dens gennembrud. Da computerne samtidig efterhånden kunne levere den nødvendige regnekraft gik modellen sin sejrsgang og er i dag en af de mest udbredte modeller i anvendt matematik. Med Dantzigs egne ord:

> *Linear programming can be viewed as part of a great revolutionary development which has given mankind the ability to state general goals and to lay out a path of detailed decisions to take in order to "best" achieve its goals when faced with practical situations of great complexity.*
> *Our tools for doing this are ways to formulate real-world problems in detailed mathematical terms (models), techniques for solving the models (algorithms), and engines for executing the steps of algorithms (computers and software)*.
> (Dantzig, Linear Programming, 1991. Hele artiklen findes ***her***.