ISBN 9788770668781

Projekt 5.13 Kvadratisk programmering anvendt til optimering af elektriske kredsløb

ISBN 9788770668781

Indledning:

I HEM2, kapitel 11, Fagligt *samarbejde matematik og fysik* undersøges i afsnit 4.6 parallelkoblinger af resistanser. Her påvises, at de sædvanlige lovmæssigheder for parallelkoblinger følger af et *minimumsprincip*: Strømmen i en parallelkobling deler sig på en sådan måde at *den afsatte elektriske effekt er minimal*. Vi vil nu generalisere dette til almene elektriske kredsløb. Eksemplet er interessant af flere årsager:

For det første understøtter det princippet om at fysikkens love kan formuleres som maksimerings / minimerings-principper, jfr følgende eksempler:

1) **Optik**: Lyset følger altid den hurtigste vej (men ikke nødvendigvis den korteste vej), jfr. brydningsloven som vi også har set på i det samme studieretningskapitel 11 i B-bogen.
2) **Mekanik**: En partikel følger den vej, der giver den mindste virkning, hvor virkningen er defineret som integralet over forskellen mellem potentiel og kinetisk energi. Vi har ikke diskuteret dette princip, men det er af afgørende betydning bl.a. for sammenhængen mellem den klassiske mekanik og kvantemekanikken.
3) **Elektriske kredsløb**: Strømmen i et elektrisk kredsløb fordeler sig på en sådan måde at den afsatte elektriske effekt er minimal (hvilket også kan tolkes som at strømmen følgen den vej, der 'yder den mindste modstand').

For det andet er det et eksempel på anvendelsen af teorien om *kvadratisk programmering*. Faktisk var det en af hovedbegrundelserne for overhovedet at gå ind i teorien for kvadratisk programmering.
I 1947 besøgte Georg Dantzig von Neumann, hovedarkitekten bag udviklingen af den amerikanske version af computeren. Deres fælles projekt er udviklingen af den lineære programmering. På togrejsen stødte han ved et tilfælde ind i matematikeren Tucker, fortalte om projektet og skitserede ideerne bag den lineære programmering. Tucker så med det samme, at der var et slægtskab med teorien for elektriske kredsløb. Tucker gjorde ikke noget ved det til at begynde med, men efter at to af hans studenter begyndte at arbejde sammen med Dantzig (med Tucker som rådgiver) foreslog Tucker, at man skulle arbejde videre med at forstå sammenhængen med teorien bag de elektriske kredsløb: I fysikken var det jo netop et enestående eksempel på en kvadratisk programmering. Denne teori burde kunne generaliseres og anvendes i økonomi.

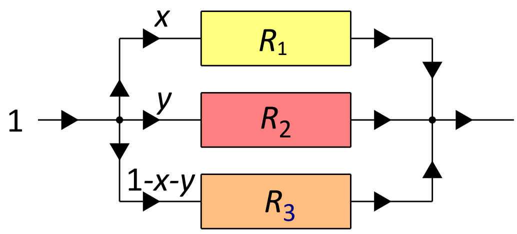

Albert Tucker, kendt for 'The prisoners dilemma' som han opfandt i 1950, omtrent samtidigt med at han sammen med nogle af sine studenter udviklede teorien bag den kvadratiske programmering.

Dantzig lod sig overtale og arbejdede derefter med på udviklingen af den kvadratiske programmering, sideløbende med den videre udvikling af den lineære programmering. Denne kombination af kvadratisk programmering og optimering af elektriske kredsløb er emnet for dette projekt.

ISBN 9788770668781

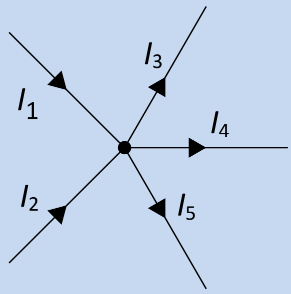
1. Gensyn med parallelkoblinger

Vi starter med en simpel generalisering af eksemplet fra mat-fys kapitlet i HEM2: Vi ser denne gang på en parallelkobling med tre resistanser R_1, R_2 og R_3 :



Sender vi en strøm på 1 A gennem kredsløbet vil den fordele sig på de tre grene. Vi kan da lade *x* betegne den del af strømmen, der passer den øverste gren; og tilsvarende kan vi lade *y* betegne den del af strømmen der passerer den mellemste gren. I det følgende kan du også tolke *x* og *y* som den brøkdel af strømmen, der løber gennem den øverste henholdsvis den mellemste gren i parallelkoblingen. Den nederste gren gennemløbes da af strømmen $1-x-y$ ifølge reglen om ladnings- og strøm-bevarelse:

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$$



Kirchoffs første lov: I ethvert knudepunkt er summen af de strømstyrker, der fører ind mod knudepunktet, den samme som summen af de strømstyrker, der fører væk fra knudepunktet.

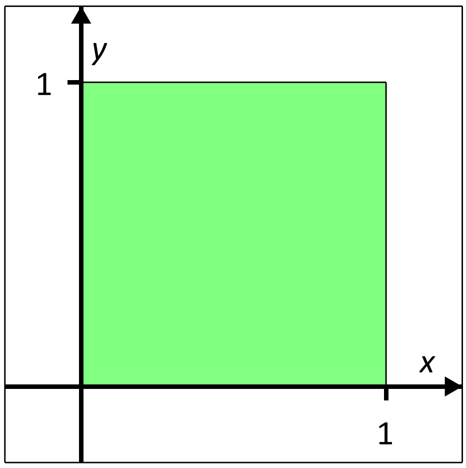
Effekten *P* afsat i en resistans *R* med strømstyrken *I* er givet ved $P = R \cdot I^2$. Den samlede effekt gennem de tre resistanser er derfor givet ved:

$$P = R_1 \cdot x^2 + R_2 \cdot y^2 + R_3 \cdot (1-x-y)^2$$

Vi ser nu hvad konsekvenserne bliver af at forlange, at den afsatte effekt skal være minimal. For det første bemærker vi at de to strømstyrker gennem den øverste og den mellemste gren begge udgør en *brøkdel* af den samlede strøm, der ledes ind i parallelkoblingen. De opfylder derfor begge to begrænsningen:

$$0 \le x \le 1$$
$$0 \le y \le 1$$

Polygonområdet (eller mulighedsområdet) for strømstyrkerne ser derfor således ud:



ISBN 9788770668781

Grafen for den afsatte effekt som funktion af *x* og *y* er en elliptisk paraboloide, der vender grenene opad. Det følger umiddelbart af at den er konstrueret som en sum af tre kvadratiske funktioner, men ganger vi parenteserne ud kan vi også nemt tjekke at diskriminanten er negativ:

$$P=(R_1+R_3)\cdot x^2+2\cdot R_3\cdot x\cdot y+(R_2+R_3)\cdot y^2-2\cdot R_3\cdot x-2\cdot R_3\cdot y$$

Øvelse 1:

a) Udregn diskriminanten for andengradspolynomiet og argumentér for at diskriminanten er negativ.

Minimumspunktet for paraboloiden findes nu ved at bestemme toppunkterne for andengradspolynomiet *P* som funktion af *x* henholdsvis *y*. Her ser vi på effekten som en funktion af strømstyrken *x*:

$$P=\underbrace{\boxed{(R_1+R_3)}}_{A}\cdot x^2+\underbrace{\boxed{2\cdot(R_3\cdot y-R_3)}}_{B}\cdot x+\underbrace{\boxed{(R_2+R_3)\cdot y^2-2\cdot R_3\cdot y}}_{C}$$

Det fører til toppunktsligningen

$$x=-\frac{B}{2A}=-\frac{2\cdot R_3\cdot(y-1)}{2\cdot(R_1+R_3)}=\frac{R_3\cdot(1-y)}{(R_1+R_3)}$$

Den kan omskrives på formen

$$(R_1+R_3)\cdot x=-R_3\cdot y+R_3\Rightarrow y=-\frac{R_1+R_3}{R_3}\cdot x+1$$

Vi kunne også udnytte differentiation af funktioner af flere variable og holde den ene variabel konstant, mens du differentierer efter den anden:

$$0=\frac{\partial P}{\partial x}=2\cdot\left(R_1+R_3\right)\cdot x+2\cdot\left(R_3\cdot y-R_3\right)$$

Det fører til de samme ligninger som før.

Bemærkning: Benytter du CAS-værktøjer kan du enten benytte max-min-kommandoen eller differentiationskommandoen. Det kan fx se således ud:

$$\mathbf{p}:=r_1\cdot x^2+r_2\cdot y^2+r_3\cdot(1-x-y)^2 \;\blacktriangleright\; (r_1+r_3)\cdot x^2+2\cdot r_3\cdot x\cdot(y-1)+(r_2+r_3)\cdot y^2-2\cdot r_3\cdot y+r_3$$

$$\text{fMin}(\mathbf{p},x) \;\blacktriangleright\; x=\frac{-r_3\cdot(y-1)}{r_1+r_3} \text{ and } r_1+r_3>0$$

$$0=\frac{d}{dx}(\mathbf{p}) \;\blacktriangleright\; 0=2\cdot(r_1+r_3)\cdot x+2\cdot r_3\cdot(y-1)$$

$$\text{solve}(\text{fMin}(\mathbf{p},x),y) \;\blacktriangleright\; y=\frac{-((r_1+r_3)\cdot x-r_3)}{r_3} \text{ and } r_1+r_3\neq 0 \text{ and } r_1>-r_3$$

$$\text{solve}\left(0=\frac{d}{dx}(\mathbf{p}),y\right) \;\blacktriangleright\; y=\frac{-((r_1+r_3)\cdot x-r_3)}{r_3}$$

ISBN 9788770668781

Øvelse 2:

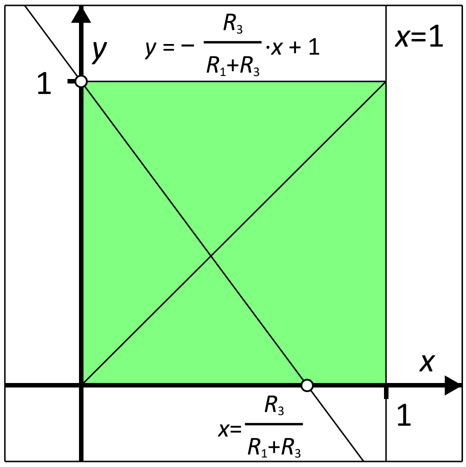
a) Find nu selv toppunktsligningen for *y*!

Analyserer vi nu toppunktsligningen for *x*, ser vi at den skærer *y*-aksen i 1 og begrænsningslinjen *x* = 1 i $y=-\dfrac{R_1}{R_3}$.

Den har altså negativ skæring med *x* = 1 og den skærer derfor *x*-aksen på stykket fra 0 til 1.

En lille udregning giver at den skærer i *x*-aksen i $x=\dfrac{R_3}{R_1+R_3}$,

som jo netop er en ægte brøk.



Øvelse 3:

a) Analyser nu på tilsvarende vis toppunktsligningen for *y*.

b) Gør rede for at de to toppunktslinjer nødvendigvis skærer hinanden inden for polygonområdet.

c) Gør rede for at de skærer hinanden på diagonalen $y=x$ netop når $R_2=R_3$.

d) Gør rede for at de tre strømstyrker er lige store netop når $R_1=R_2=R_3$.

Hidtil har vi ignoreret spændingsfaldene over resistanserne.

Øvelse 4:

a) Gør rede for, at toppunktsligningen for *x* kan omskrives på formen
$$\underbrace{R_1\cdot x}_{U_1}=\underbrace{R_3\cdot(1-x-y)}_{U_3}$$

b) Gør rede for, at den afsatte effekt er minimal netop når spændingsfaldene over de tre resistanser er lige store. Sædvanligvis stiller man dette krav sammen med strømbevarelsen og analyserer parallelkoblingen ud fra reglerne for strømstyrker og spændingsfald i elektriske kredsløb. Formulér disse regler!

c) Find det samlede spændingsfald over parallelkoblingen og dermed erstatningsresistansen for parallelkoblingen. Gør rede for, at erstatningsresistansen *R* følger reglen for parallelkoblinger:
$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}.$$

ISBN 9788770668781

Øvelse 5:

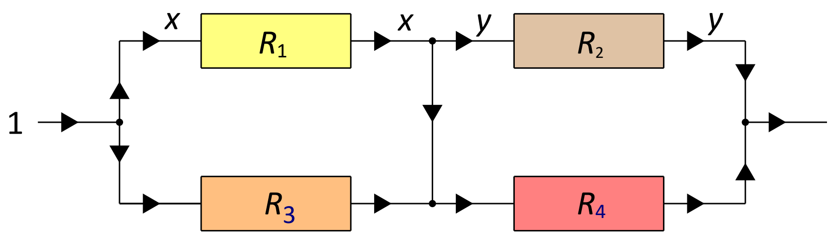
a) Gør rede for, at toppunktsligningerne for *x* og *y* har som konsekvens at forholdene mellem strømstyrkerne er det omvendte af forholdene mellem resistanserne:
$R_3 : R_2 : R_1 = x : y : (1-x-y) = I_1 : I_2 : I_3$

Øvelse 6:

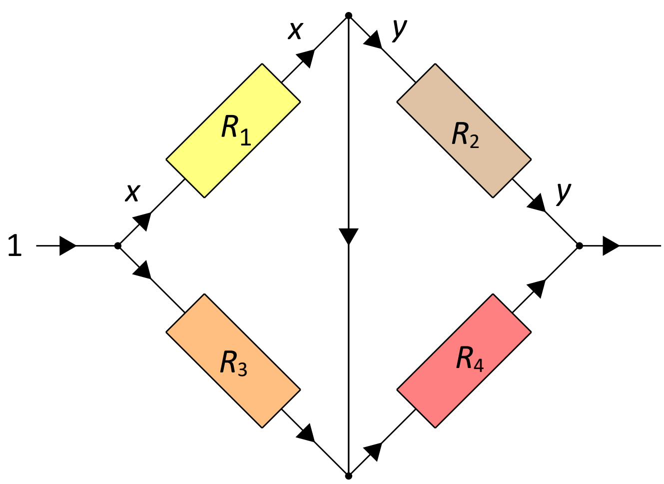
a) Vælg konkrete tal for resistanserne og illustrér den kvadratiske programmering med såvel passende 2-dimensionale som 3-dimensionale grafer.

2. Ikke-trivielle kredsløb: Brokoblinger

Et elektrisk kredsløb er trivielt, hvis det kan sammensættes af serie- og parallelkoblinger. For sådanne kredsløb kan vi benytte de simple regler for serie- og parallelkoblinger. Men det er ikke alle elektriske kredsløb, der kan opdeles i serie- og parallelkoblinger. Det simpleste ikke-trivielle kredsløb kaldes en *brokobling*. Den fremkommer ud fra en parallelkobling ved at vi forbinder de to sidegrene på tværs med en bro:



Denne gang er der fire resistanser involveret (og fire knudepunkter), men som før er der kun to frihedsgrader i strømstyrken: Sender vi en strøm på 1 A gennem kredsløbet vil den fordele sig på de fem grene. Vi kan da som vist lade *x* og *y* betegne strømstyrkerne i de to øverste grene. Det er selvfølgelig ikke afgørende at brokoblingen netop ser ud som ovenfor. Ofte vises den i stedet på den såkaldte ruderform. Det er kun topologien eller grafstrukturen der spiller en rolle.



ISBN 9788770668781

Øvelse 7:

a) Argumentér for at de tiloversblevne strømstyrker følger af ladningsbevarelsen.

b) Opskriv den samlede effekt for brokoblingen.

c) Find mulighedsområdet for *x* og *y*. Læg mærke til at strømmen over broen kan være både positiv og negativ! Vi kan ikke umiddelbart vide hvilken vej strømmen løber over broen (med mindre resistanserne er helt symmetrisk fordelt, dvs. $R_1 = R_4$ og $R_2 = R_5$, for så er strømstyrken i broen nødvendigvis 0 A).

Øvelse 8:

a) Argumentér for at grafen for den afsatte effekt som funktion af strømstyrkerne *x* og *y* er en elliptisk paraboloide, der vender opad (udregn diskriminanten for andengradspolynomiet og argumenter for at diskriminanten er negativ).

b) Fastlæg toppunktsligningerne for strømstyrkerne *x* og *y*.

c) Gør rede for at de to toppunktslinjer nødvendigvis må skære hinanden inden for polygonområdet.

d) Find betingelsen for at strømstyrken over broen er 0 A.

Øvelse 9:

a) Gør rede for, at de to toppunktsligninger kan oversættes til betingelser for spændingsfaldene over forskellige veje mellem knudepunkterne i det elektriske kredsløb.

b) Find det samlede spændingsfald over parallelkoblingen og dermed erstatningsresistansen for parallelkoblingen.

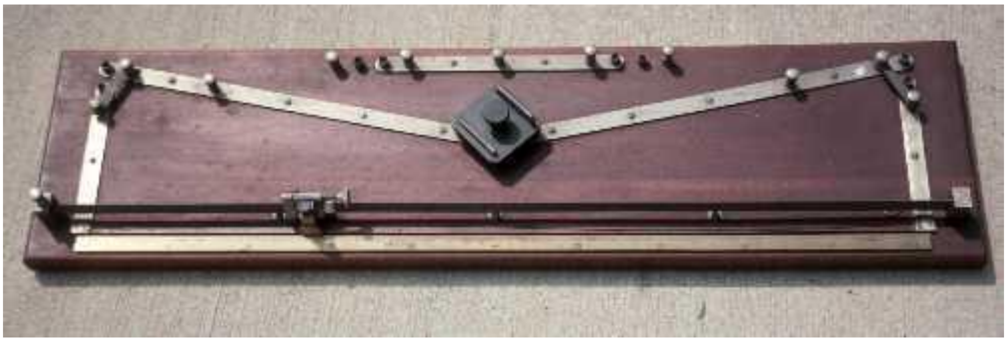
Øvelse 10:

a) Vælg konkrete tal for resistanserne og illustrér den kvadratiske programmering med såvel 2-dimensionale som 3-dimensionale grafer.

ISBN 9788770668781

3. Wheatstones bro

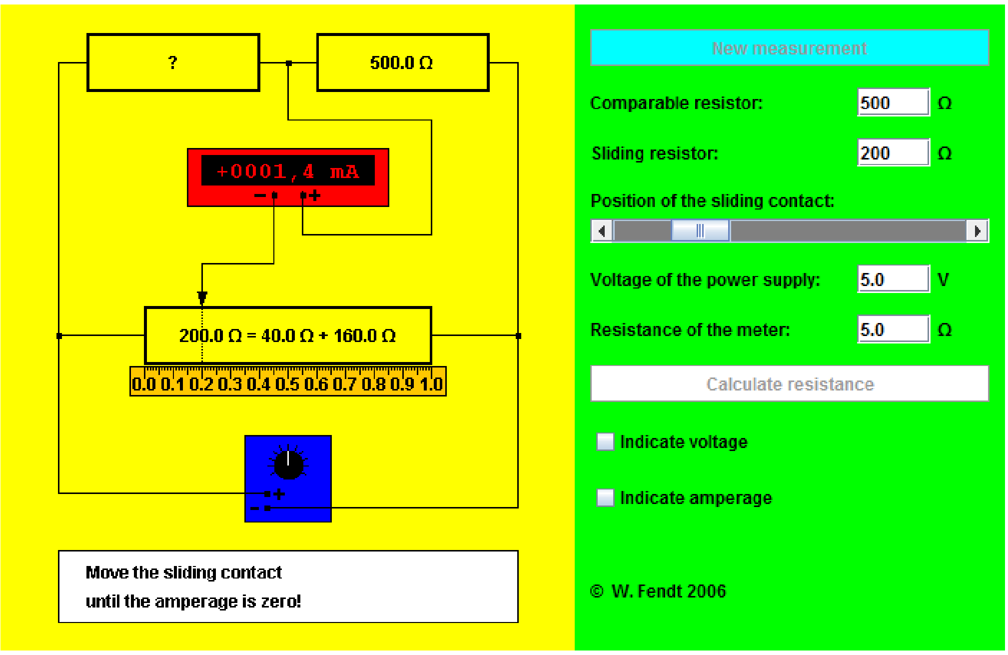
Wheatstones bro er et vigtigt eksempel på anvendelsen af en brokobling. Skolen har ganske givet en Wheatstones bro i jeres fysiksamling. Den kan udformes på forskellig vis: Kernen i en Wheatstones bro er at den bruges til præcisionsmåling af en ukendt resistans R_4 ved at sammenligne den med en kendt resistans R_3. Det sker ved at ændre på resistanserne R_1 og R_2 indtil der ikke længere løber en strøm gennem broen. I den fineste version, der stammer fra Kirchhoff, ligger resistanserne R_1 og R_2 på en skinne med en skyder, der kan dele skinnen i forskellige forhold, der kan aflæses med stor præcision på en skala. Forholdet mellem de to skinnestykkers længder er samtidigt forholdet mellem de to resistanser R_1 og R_2.



Øvelse 11:

a) Gøre rede for hvordan Wheatstones bro kan bruges til at måle den ukendte resistans, idet du trækker på teorien fra det foregående afsnit.

b) På nettet kan man finde appletter, der illustrerer princippet bag Wheatstones bro, fx den følgende fra Walther Fendt:

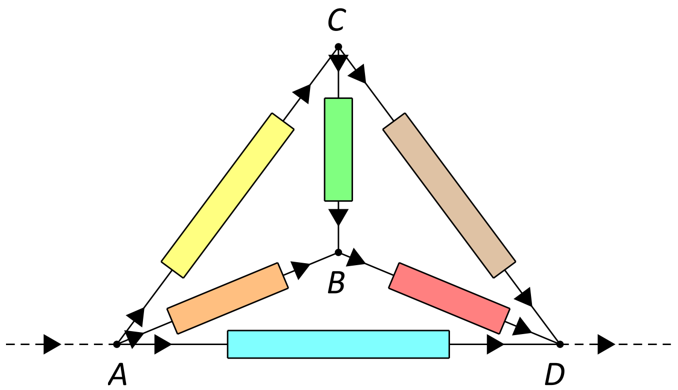


Opbyg nu ved hjælp af passende skydere din egen applet i et dynamisk geometriprogram!

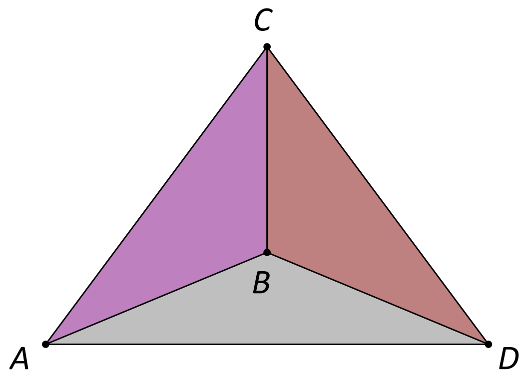
ISBN 9788770668781

4. Tetraederkoblingen

Elektriske kredsløb kan udformes som simple polyedre, hvor strømmen løber langs kanterne. Det simpleste polyeder er tetraederet *ABCD*, hvor vi lader strømmen løbe ind i hjørnet *A* og væk i hjørnet *D*:



Tetraederkobling



Tetraeder

Sammenlignet med brokoblingen har vi altså tilføjet en resistans langs broen *BC*, samt tilføjet endnu en resistans på grenen *AD*, der ligger parallelt med broen.

Øvelse 12:

a) Hvor mange frihedsgrader har strømstyrken i det elektriske kredsløb?

b) Hvad bliver udtrykket for den samlede effekt?

c) Hvad bliver toppunktsligningerne?

d) Hvad bliver strømstyrkerne i kredsløbet udtrykt ved de indgående resistanser?

e) Hvad er betingelsen for at der ikke løber nogen strøm i broen *BC*? Kan du i givet fald yderligere opnå at de tre strømstyrker i grenene *AB*, *AC* og *AD* er lige store?

f) Hvordan fordeler strømmen sig, hvis alle resistanser er lige store?

Øvelse 13:

a) Gennemfør nu selv en tilsvarende analyse af en oktaederkobling og en kubisk kobling (terningekobling), idet du lader strømmen løbe ind og ud af diagonalt modsatte hjørnepunkter.