ISBN 9788770668781

Projekt 5.12 Arten af stationære punkter

I grundbogen s. 269 er "anden ordens kriteriet" for arten af stationære punkter formuleret således:

Sætning 11: Arten af stationære punkter

Lad $P_0(x_0,y_0,z_0)$ være et stationært punkt for den to gange differentiable funktion $f(x,y)$, og lad

$$r = f''_{xx}(x,y) \quad s = f''_{xy}(x,y) \quad t = f''_{yy}(x,y)$$

og lad $q = rt - s^2$, så gælder der, at

- når $q > 0$ og $r > 0$, har f et lokalt minimum i $P_0(x_0,y_0,z_0)$
- når $q > 0$ og $r < 0$, har f et lokalt maksimum i $P_0(x_0,y_0,z_0)$
- når $q < 0$ har f et saddelpunkt i $P_0(x_0,y_0,z_0)$

Når $q = 0$, kan vi ikke slutte noget.

Taylorpolynomier

Sætningen kan vises ved at tage udgangspunkt i Taylors formel for funktioner af to variable.
Taylors formel af første grad for funktioner af én variabel er den lineære funktion, hvis graf er tangenten:

$f(x_0+h) \approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot h$ - det kaldes også "det approksimerende førstegradspolynomium"

Her står jo blot, at funktionen er lokalt lineær.

Taylors formel af anden grad for funktioner af én variabel er andengradspolynomium, der tilnærmer funktionen bedst – dvs her tager vi hensyn til krumningen:

$$f(x_0+h) \approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot h+\tfrac{1}{2}\cdot f''(x_0)\cdot h^2$$

Taylors formel af første grad for funktioner af to variable er den lineære funktion, hvis graf er tangentplanen:

$$f(x_0+h,y_0+k) \approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\cdot h+f'_y(x_0,y_0)\cdot k$$

Sammenlign med formlen for tangentplanen, sætning 8, s. 263:

$$z=z_0+p\cdot(x-x_0)+q\cdot(y-y_0) \ ,$$

Her er $z_0 = f(x_0,y_0)$, og p og q er de partielle afledede. Overvej selv, at det er samme udtryk!

Taylors formel af anden grad for funktioner af to variable er det andengradspolynomium i to variable, der tilnærmer funktionen bedst. Her skal vi differentiere begge de partielle afledede en gang mere, og differentiere både mht *x* og *y*:

$$f(x_0+h,y_0+k) \approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\cdot h+f'_y(x_0,y_0)\cdot k$$
$$+\tfrac{1}{2}\cdot\left(f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot h^2+f''_{xy}(x_0,y_0)\cdot h\cdot k+f''_{yx}(x_0,y_0)\cdot k\cdot h++f''_{yy}(x_0,y_0)\cdot k^2\right)$$

Vi ved nu, at de blandede afledede er ens, så vi kan reducere det lidt:

$$f(x_0+h,y_0+k) \approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\cdot h+f'_y(x_0,y_0)\cdot k$$
$$+\tfrac{1}{2}\cdot\left(f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot h^2+2\cdot f''_{xy}(x_0,y_0)\cdot h\cdot k+f''_{yy}(x_0,y_0)\cdot k^2\right)$$

Ser vi nu på sætningens præmisser, så er vi i et stationært punkt. Dvs de første afledede er 0. Men så reduceres udtrykket yderligere til:

$$f(x_0+h,y_0+k) \approx f(x_0,y_0)+\tfrac{1}{2}\cdot\left(f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot h^2+2\cdot f''_{xy}(x_0,y_0)\cdot h\cdot k+f''_{yy}(x_0,y_0)\cdot k^2\right)$$

For at forenkle udtrykket yderligere giver vi nu de dobbelt afledede nye navne. Vi har fulgt formelsamlingens betegnelser, *r*, *s* og *t* , men i litteraturen betegnes de ofte *A*, *B* og *C*, og kriteriet kaldes ofte for "*ABC-kriteriet*":

ISBN 9788770668781

$$r = A = f''_{xx}(x_0, y_0)$$
$$s = B = f''_{xy}(x_0, y_0)$$
$$t = C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

Indsæt konstanterne *r*, s og *t*:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \approx f(x_0, y_0) + \tfrac{1}{2} \cdot \left(r \cdot h^2 + 2 \cdot s \cdot h \cdot k + t \cdot k^2\right)$$

1. Hvis der er maksimum i $f(x_0, y_0)$, så vil funktionsværdierne i et område omkring (x_0, y_0) holde sig under denne værdi, dvs at udtrykket $\tfrac{1}{2} \cdot \left(r \cdot h^2 + 2 \cdot s \cdot h \cdot k + t \cdot k^2\right)$ er negativt.

2. Hvis der er minimum i $f(x_0, y_0)$, så vil funktionsværdierne i et område omkring (x_0, y_0) holde sig over denne værdi, dvs at udtrykket $\tfrac{1}{2} \cdot \left(r \cdot h^2 + 2 \cdot s \cdot h \cdot k + t \cdot k^2\right)$ er positivt.

3. Hvis der er et saddelpunkt i $f(x_0, y_0)$, så vil nogle funktionsværdier i et område omkring (x_0, y_0) være strørre og andre være miondre end $f(x_0, y_0)$, dvs at udtrykket $\tfrac{1}{2} \cdot \left(r \cdot h^2 + 2 \cdot s \cdot h \cdot k + t \cdot k^2\right)$ antager både positive og negative værdier

Fortegn for $\tfrac{1}{2} \cdot \left(r \cdot h^2 + 2 \cdot s \cdot h \cdot k + t \cdot k^2\right)$ er det samme som fortegn for $r \cdot h^2 + 2 \cdot s \cdot h \cdot k + t \cdot k^2$, så vi betragter nu dette andengradspolynomium:

$$p(h,k) = r \cdot h^2 + 2 \cdot s \cdot h \cdot k + t \cdot k^2$$

Lad os først holde *k* fast og lade *h* variere:

$$p(h, k_0) = r \cdot h^2 + 2 \cdot s \cdot h \cdot k_0 + t \cdot {k_0}^2 = r \cdot h^2 + \left(2 \cdot s \cdot k_0\right) \cdot h + \left(t \cdot {k_0}^2\right)$$

Hvis dette andengradspolynomium i *h* skal være rent negativ, eller rent positivt (tilfælde1 og 2), dvs ikke have nogen nulpunkter, så er *diskriminanten* $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ negativ. Vi udregner *D*:

$$\begin{aligned} D &= \left(2 \cdot s \cdot k_0\right)^2 - 4 \cdot r \cdot \left(t \cdot {k_0}^2\right) \\ &= 4 \cdot s^2 \cdot {k_0}^2 - 4 \cdot r \cdot t \cdot {k_0}^2 \\ &= 4 \cdot {k_0}^2 \cdot \left(s^2 - r \cdot t\right) \end{aligned}$$

Da de to faktorer foran parentesen er positive, så ser vi:

$$D < 0 \Leftrightarrow s^2 - r \cdot t < 0 \Leftrightarrow r \cdot t - s^2 > 0$$

Øvelse 1

Gennemfør nu den samme udregning, hvor *h* holdes fast og vi lader *k* variere, og vis, at vi får samme betingelse:
Andengradspolynomiet er rent positiv eller rent negativ netop når $r \cdot t - s^2 > 0$

Foreløbig konklusion:
Maksimum og minimum for funktionen *f* optræder netop når $r \cdot t - s^2 > 0$

Benærk i øvrigt, at vi her ser, hvorfra det mærkelige udtryk for q stammer – det er simpelthen en diskriminant

Øvelse 2

Vis, at hvis uligheden $r \cdot t - s^2 > 0$ skal være opfyldt, så må *r* og *t* have *samme fortegn*

Har et andengradspolynomium maksimum, er koefficienten til andengradsleddet negativ. Betragter vi *p* som en funktion af *h* er derfor $r < 0$. Vi kunne også betragte *p* som en funktion af *k*, og ville så konkludere, at $t < 0$. Det er i overensstemmelse med Øvelse 2, der fortæller os, at *r* og *t* vil have samme fortegn.

ISBN 9788770668781

Har et andengradspolynomium minimum, er koefficienten til andengradsleddet positiv. Betragter vi *p* som en funktion af *h* er derfor $r > 0$. Vi kunne også betragte *p* som en funktion af *k*, og ville så konkludere, at $t > 0$. Det er i overensstemmelse med Øvelse 2, der fortæller os, at *r* og *t* vil have samme fortegn.

Konklusion om maksimum og minimum:

1. Maksimum for funktionen *f* optræder netop når $r \cdot t - s^2 > 0$ og $r < 0$ (og dermed også: $t < 0$)
2. Minimum for funktionen *f* optræder netop når $r \cdot t - s^2 > 0$ og $r > 0$ (og dermed også: $t > 0$)

I tilfælde 3 antager andengradspolynomiet $p(h,k) = r \cdot h^2 + 2 \cdot s \cdot h \cdot k + t \cdot k^2$ både positive og negative værdier i et område omkring det stationære punkt. Det betyder, at andengradspolynomiet også antager værdien 0, dvs harf nulpunkter. Men et andengradspolynomium har nulpunkter, præcis når diskriminanten er positiv:

$$D > 0 \Leftrightarrow s^2 - r \cdot t > 0 \Leftrightarrow r \cdot t - s^2 < 0$$

Konklusion om saddelpunkt:

3. Et saddelpunkt for funktionen *f* optræder netop når $r \cdot t - s^2 < 0$

Den sidste del af sætningen kan vi overbevise os om, ved at se på følgende tre forskellige funktioner, der alle har stationært punkt i $(0,0)$, men som også alle har værdien 0 for de dobbeltafledede i $(0,0)$. Og det fremgår tydeligt af de grafiske billeder, at der her er tale om henh. et maksimum, et minimum og et dsaddelpunkt.

1. $p_1(x,y) = x^4 + y^4$ 2. $p_2(x,y) = -x^4 - y^4$ 3. $p_3(x,y) = x^3 + y^3$