ISBN 9788770668781

Projekt 5.11 De blandede afledede er ens – bevis for sætning 10

Vi beviser sætning 10 på s 268:

Sætning 10: Blandede afledede
Hvis de dobbelt afledede og de blandede afledede af f er kontinuerte, så er $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$.
Denne funktion betegnes normalt f''_{xy}, og den kaldes den blandede afledede af f.

Betragt et bestemt punkt (a,b), hvor betingelserne i sætningen er opfyldt i et område omkring punktet. Vi regner indenfor dette område.

Vi opstiller følgende identitet:
$$\big(f(a+h,b+k)-f(a+h,b)\big)-\big(f(a,b+k)-f(a,b)\big)=\big(f(a+h,b+k)-f(a,b+k)\big)-\big(f(a+h,b)-f(a,b)\big) \quad (*)$$
og vil se, hvad der sker når vi lader h og k gå mod 0.

Vi definerer funktionerne:
$$u(x)=f(x,b+k)-f(x,b) \qquad \text{og} \qquad v(y)=f(a+h,y)-f(a,y)$$

Læg mærke til, at når vi differentierer $u(x)$ får vi den første partielle afledede for funktionen f i spil, og når vi differentierer $v(y)$ får vi den anden partielle afledede for funktionen f i spil:
$$u'(x)=f'_x(x,b+k)-f'_x(x,b) \qquad \text{og} \qquad v'(y)=f'_y(a+h,y)-f'_y(a,y) \qquad (**)$$

Ideen i beviset er nu at bruge middelværdisætningen to gange på henh. udtrykket til venstre og på udtrykket til højre i (*)

Venstre side i (*) = $u(a+h)-u(a)=u'(c)\cdot h=\big(f'_x(c,b+k)-f'_x(c,b)\big)\cdot h$, hvor c ligger i $]a;a+h[$

Højre side i (*) = $v(b+k)-v(b)=v'(d)\cdot k=\big(f'_y(a+h,d)-f'_y(a,d)\big)\cdot k$, hvor d ligger i $]b;b+k[$

Vi anvender nu igen middelværdisætningen på de to parenteser med de første afledede:

Venstre side fortsat: $\big(f'_x(c,b+k)-f'_x(c,b)\big)\cdot h=\big(f''_{xy}(c,e)\cdot k\big)\cdot h=f''_{xy}(c,e)\cdot k\cdot h$, hvor e ligger i $]b;b+k[$

Højre side fortsat: $\big(f'_y(a+h,d)-f'_y(a,d)\big)\cdot k=\big(f''_{yx}(g,d)\cdot h\big)\cdot k=f''_{yx}(g,d)\cdot h\cdot k$, hvor g ligger i $]a;a+h[$

Samlet har vi derfor:

Venstre side i (*) = $f''_{xy}(c,e)\cdot k\cdot h$, hvor c ligger i $]a;a+h[$, og e ligger i $]b;b+k[$

Højre side i (*): $f''_{yx}(g,d)\cdot h\cdot k$, hvor g ligger i $]a;a+h[$, og d ligger i $]b;b+k[$

Men venstre og højre sider er jo ens!, så vi har:
$$f''_{xy}(c,e)\cdot k\cdot h=f''_{yx}(g,d)\cdot h\cdot k$$, hvor c og g ligger i $]a;a+h[$, og d og e ligger i $]b;b+k[$

dvs. $f''_{xy}(c,e)=f''_{yx}(g,d)$, hvor c og g ligger i $]a;a+h[$, og d og e ligger i $]b;b+k[$ (***)

Vi udnytter nu, at de dobbelt afledede er kontinuerte.
Når h går mod 0, vil c og g gå mod a. Og når k går mod 0, vil d og e gå mod b.
Dvs: Når $(h,k)\to(0,0)$, vil både $(c,e)\to(a,b)$ og $(g,d)\to(a,b)$. Men så vil
$$f''_{xy}(c,e)\to f''_{xy}(a,b) \quad \text{og} \quad f''_{yx}(g,d)\to f''_{yx}(a,b)$$
Men de to dobbeltafledede er identiske hele vejen, som (***) siger.
Så er også grænseværdierne ens: $f''_{xy}(a,b)=f''_{yx}(a,b)$, hvorved vi har vist sætningen.