Hvad er matematik? 3
ISBN 9788770668781

website: link fra kapitel 4, afsnit 4.2

Arealbestemmelse for punktmængde afgrænset af banekurve

Banekurver for vektorfunktioner kan, evt. sammen med koordinatakserne, afgrænse en punktmængde M, der har et areal, og dette areal kan man bestemme ved hjælp af integralregning. Vi illustrerer først med et eksempel.

Betragt vektorfunktionen

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} 9-t^2 \\ \frac{1}{4}t^3-4t \end{pmatrix}, \text{ med parameterintervallet } t\in[-10;10]$$

I området fra $t=-4$ til $t=0$ gennemløbes en kurve, der ligger over *x*-aksen, og som sammen med *denne* afgrænser et område M, der har et areal. Området strækker sig fra -7 til 9 på *x*-aksen. Da $y(x)\geq 0$ i dette interval $[-7;9]$ kan vi bestemme arealet af punktmængden som det bestemte integral:

$$\int_{-7}^{9} y(x)dx \, .$$

Nu er *y* ikke skrevet som en funktion af *x*, men af *t*. Derfor skal vi først eliminere *t* for at anvende den klassiske metode:

$x=9-t^2$

$t^2=9-x$ Roker rundt i ligningen

$t=-\sqrt{9-x}$ Vælg minus-løsningen, da *t* er negativ

Indsættes dette i udtrykket for *y* kan vi udnytte værktøjsprogrammets facilitet:

$$y=\tfrac{1}{4}t^3-4t \,|\, t=-\sqrt{9-x}$$

$$y=4\cdot\sqrt{9-x}-\frac{(9-x)^{1.5}}{4}$$

Arealet kan herefter udregnes:

$$\text{Areal}=\int_{-7}^{9} 4\cdot\sqrt{9-x}-\frac{(9-x)^{1.5}}{4}\,dx=\frac{1024}{15}$$

Vi havde ikke behøvet at gå omvejen over ellimineringen af *t*, men kunne udnytte følgende sætning:

Sætning: Areal af et område afgrænset af en banekurve

Antag, at banekurven for vektorfunktionen $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ forløber over 1. aksen mellem punkterne *A* og *B*, og at den her kan betragtes som grafen for en funktion.
Arealet af området mellem punkterne og afgrænset af kurven og 1.asken er da bestemt ved
$\int_u^v y(t)\cdot x'(t)dt$, hvor *u* er parameterværdien hørende til *A* og *v* er parameterværdien hørende til *B*.

Bemærkning. Parameterværdien *u* kan godt være større end parameterværdien *v*. Det afhænger af gennemløbet af kurven, hvor vi jo godt kan nå det højre punkt *B* før vi når det venstre punkt *A*.

Bevis

Beviset bygger på såkaldt *omvendt substitution*. Det er lettest at forstå omskrivningerne, hvis vi foretager et navneskifte, idet 1. koordinatfunktion kaldes $f(t)$ og 2. koordinatfunktion kaldes $g(t)$:

$$x=f(t) \qquad y=g(t)$$

Vi har antaget, at banekurven kan betragtes som grafen for en funktion. Det betyder, at der lodret over et givet *x* højst er ét punkt på banekurven. Sagt på en anden måde: et givet *x* optræder højst én gang som funktionsværdi. Men så har funktionen *f* en omvendt funktion f^{-1}:

Hvis $x=f(t)$ så er f^{-1} defineret ved: $f^{-1}(x)=t$

Dette kan vi indsætte:

$$y=g(t)=g(f^{-1}(x))$$

ISBN 9788770668781

Her er *y* skrevet som funktion af *x*, og det søgte areal kan nu beregnes:

$$\text{Arealet} = \int_{a_1}^{b_1} y\,dx = \int_{a_1}^{b_1} g(f^{-1}(x))\,dx$$

Vi substituerer nu: $t = f^{-1}(x)$. Det giver umiddelbart: $x = f(t)$ og dermed $dx = f'(t)dt$.

Grænserne a_1 og b_1 er *x*-værdier. De er funktionsværdier af *u* og *v*:

$a_1 = f(u)$ og $b_1 = f(v)$, så:

når $x = a_1$, er $t = f^{-1}(a_1) = u$ og når $x = a_2$, er $t = f^{-1}(a_2) = v$

Vi sætter ind og får

$$\text{Arealet} = \int_{a_1}^{b_1} g(f^{-1}(x))\,dx$$

$$\text{Arealet} = \int_{u}^{v} g(t)\cdot f'(t)dt \qquad \text{Substituer } t = f^{-1}(x),\ dx = f'(t)dt \text{, og grænserne}$$

$$\text{Arealet} = \int_{u}^{v} y(t)\cdot x'(t)dt \qquad \text{Indsæt } x = f(t) \text{ og } y = g(t)$$

Hermed er formlen vist

Metoden bygger på, at *y* i pågældende område er en funktion af x. Det er langt fra altid vi er i den situation. Derfor er der udviklet metoder, som eksempelvis giver mulighed for en direkte beregning af arealet af et lukket område, afgrænset af en banekurve. De er gennemgået i kapitlet.

Øvelse

Beregn arealet i eksemplet ovenfor ved direkte brug af formlen i sætningen.