ISBN 9788770668781

website: link fra kapitel 4

Bevis for sætning 2: Differentialkvotienten som tangentvektor

Sætning 2: Differentialkvotienten som tangentvektor

For en vektorfunktion $\vec{r}(t)$ defineres differenskvotienten i t_0 som $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{t-t_0}(\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0))$.

Der gælder, at $\vec{r}(t)$ er differentiabel i t_0 med differentialkvotient $\vec{r}\,'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$, netop når

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{t-t_0}(\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)) \to \vec{r}\,'(t_0) \text{ for } t \to t_0.$$

1. Vi antager, at $\vec{r}(t)$ er differentiabel.

I tilknytning til definitionen på s 226 har vi bevist, at vektorfunktionen $\vec{r}(t)$ er differentiabel, netop når den kan skrives på formen:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)\cdot\Delta t + \vec{E}(\Delta t)\cdot\Delta t, \qquad \text{hvor } \Delta t = t - t_0 \ .$$

Vedr at rokere over får vi, at dette er ensbetydende med:

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \vec{r}\,'(t_0)\cdot\Delta t + \vec{E}(\Delta t)\cdot\Delta t$$

Divider igennem med $\Delta t = t - t_0$:

$$\frac{1}{\Delta t}\cdot\left(\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)\right) = \vec{r}\,'(t_0) + \vec{E}(\Delta t)$$

Af definitionen på epsilonfunktioner har vi:

Når $\Delta t \to 0$ vil $\vec{E}(\Delta t) \to \vec{o}$

Men det betyder så, at

$$\frac{1}{\Delta t}\cdot\left(\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)\right) = \vec{r}\,'(t_0) + \vec{E}(\Delta t) \to \vec{r}\,'(t_0)$$

Dermed har vi vist,

hvis $\vec{r}(t)$ er differentiabel, så vil *differenskvotienten* $\frac{1}{\Delta t}\cdot\left(\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)\right) \to \vec{r}\,'(t_0)$ **, når** $\Delta t \to 0$

2. Vi antager $\vec{r}(t)$ er en vektorfunktion, der opfylder sætning 2.

Dvs $\vec{r}(t)$ er en vektorfunktion, der opfylder:

$$\frac{1}{\Delta t}\cdot\left(\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)\right) \to \vec{r}\,'(t_0), \ \text{for } t \to t_0$$

Ved en omskrivning ses, at dette svarer til:

$$\frac{1}{\Delta t}\cdot\left(\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)\right) - \vec{r}\,'(t_0) \to 0, \ \text{for } t \to t_0$$

Definer nu:

$$E(h) = \begin{cases} \frac{1}{h}\cdot\left(\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)\right) - \vec{r}\,'(t_0), & \text{når } h \neq 0 \\ \vec{o}, & \text{når } h = 0 \end{cases}$$

Så ser vi:

- $\vec{E}(0) = \vec{o}$, pr. definition
- Når $h \to 0$, vil $\vec{E}(h) = \frac{1}{h}\cdot\left(\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)\right) - \vec{r}\,'(t_0) \to \vec{o}$ (**)

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

Dvs $E(t)$ er en epsilonfunktion.

Gange nu (**) gennem med *h*:

$$\vec{E}(h)\cdot h = \vec{r}(t_0+h) - \vec{r}(t_0) - \vec{r}\,'(t_0)\cdot h$$

Ved at rokere rundt får vi nu:

$$\vec{r}(t_0+h) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)\cdot h + \vec{E}(h)\cdot h$$

eller skrevet med t og t_0 :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)\cdot \square t + \vec{E}(\square t)\cdot \square t$$

Men her står, at $\vec{r}(t)$ er differentiabel, med differentialkvotienten $\vec{r}\,'(t_0)$

Dermed har vi vist sætning 2.