Hvad er matematik? 3
ISBN 9788770668781

website: link fra kapitel 4

L&R Uddannelse
EGMONT

Differentiabilitet af vektorfunktioner, opskrevet med epsilonfunktioner

I grundbogen indføres differentiabilitet af vektorfunktioner ved følgende definition:

Definition: Differentiabilitet

En vektorfunktion $\vec{r}(t)$ kaldes differentiabel i t_0, hvis koordinatfunktionerne begge er differentiable i t_0.

Differentialkvotienten defineres i så fald som: $\vec{r}\,'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$.

Er en vektorfunktion differentiabel i hele sin definitionsmængde, siger vi blot, den er differentiabel.

Den afledede funktion defineres i så fald som: $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

Det er i overensstemmelse med traditionen i de fleste fremstillinger. Det kan virke lidt overraskende, da definitionen ligner formulering ten af en sætning. Lad os betragte sagen lidt nøjere ved at inddrage epsilonfunktioner:

1. Vi antager koordinatfunktionerne er differentiable

Definitionen på at koordinatfunktionerne $x(t)$ og $y(t)$ er differentiable i t_0 er, at vi i passende intervaller om t_0 kan opskrive følgende udtryk:

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_0)\cdot\Delta t + E_x(\Delta t)\cdot\Delta t$$
$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)\cdot\Delta t + E_y(\Delta t)\cdot\Delta t$$

Dette kan vi samle til et udtryk for vektorfunktionen $\vec{r}(t)$:'

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) + x'(t_0)\cdot\Delta t + E_x(\Delta t)\cdot\Delta t \\ y(t_0) + y'(t_0)\cdot\Delta t + E_y(\Delta t)\cdot\Delta t \end{pmatrix}$$

Vi opdeler i en sum af vektorer:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'(t_0)\cdot\Delta t \\ y'(t_0)\cdot\Delta t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_x(\Delta t)\cdot\Delta t \\ E_y(\Delta t)\cdot\Delta t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}\cdot\Delta t + \begin{pmatrix} E_x(\Delta t) \\ E_y(\Delta t) \end{pmatrix}\cdot\Delta t \\ &= \vec{r}(t_0) + \vec{a}\cdot\Delta t + \vec{E}(\Delta t)\cdot\Delta t \end{aligned}$$

Her har vi sat $\vec{a} = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$, og $\vec{E}(\Delta t) = \begin{pmatrix} E_x(\Delta t) \\ E_y(\Delta t) \end{pmatrix}$

Vi ser, at

- $\vec{E}(0) = \begin{pmatrix} E_x(0) \\ E_y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{o}$
- Når $\Delta t \to 0$ vil $\vec{E}(\Delta t) = \begin{pmatrix} E_x(\Delta t) \\ E_y(\Delta t) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lim_{\Delta t\to 0}\left(E_x(\Delta t)\right) \\ \lim_{\Delta t\to 0}\left(E_y(\Delta t)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{o}$

Disse to punkter svarer helt til de to krav til en epsilonfunktion af én variabel.
Så en funktion der opfylder de to krav kalder vi en epsilonfunktion af to variable.

Konklusionen er således: Hvis de to koordinatfunktioner er differentiable, så kan vektorfunktionen skrives på formen:

ISBN 9788770668781

$$\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)+\vec{a}\cdot\Delta t+\vec{E}(\Delta t)\cdot\Delta t \qquad (*)$$

Dette svarer helt til definitionen på, at en funktion af én variable er differentiabel.
Derfor ville (*) være en rimelig definition af at en vektorfunktion er differentiabel. Og differentialkvotienten er vektoren $\vec{a}$.
Vi har således set, at med en epsilondefinition på at være differentiable, får vi at differentialkvotienten er den samme som i bogens definition: $\vec{a}=\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$, så vi skriver: $\vec{r}'(t_0)=\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$

2. Vi antager vektorfunktionen $\vec{r}(t)$ er differentiabel ifølge definitionen (*)
Vi indfører vektorfunktionernes koordinatfunktioner og skriver:

$$\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)+\vec{a}\cdot\Delta t+\vec{E}(\Delta t)\cdot\Delta t$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdot\Delta t+\begin{pmatrix} E_1(\Delta t) \\ E_2(\Delta t) \end{pmatrix}\cdot\Delta t$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_1\cdot\Delta t \\ a_2\cdot\Delta t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} E_1(\Delta t)\cdot\Delta t \\ E_2(\Delta t)\cdot\Delta t \end{pmatrix}$$

Dette skriver vi ud i to udtryk, et for hver koordinat:

$$x(t)=x(t_0)+a_1\cdot\Delta t+E_1(\Delta t)\cdot\Delta t \qquad (**)$$
$$y(t)=y(t_0)+a_2\cdot\Delta t+E_2(\Delta t)\cdot\Delta t \qquad (**)$$

Hvis $\vec{E}(\Delta t)$ er en vektor-epsilonfunktion, der opfylder de to punkter på forrige side, er det let at se, at de to funktioner E_1 og E_2 begge opfylder kravet til at være en almindelig epsilonfunktion:

- $E_i(0)=0$
- Når $h\to 0$ vil $E_i(h)\to 0$

Men så siger de to udtryk (**), at koordinatfunktionerne er differentiable,
og at $x'(t_0)=a_1$ og $y'(t_0)=a_2$.
Dvs den afledede af vektorfunktionen fås ved at differentiere koordinatfunktionerne, som det siges i definitionen i grundbogen

Så fornemmelsen af, at den traditionelle definition har karakter af en sætning, og at der må være en mere "oprindelig" definition, var korrekt.