ISBN 9788770668781

Projekt 4.5 Ellipser – egenskaber og anvendelser i en nyrestensknuser

Ellipsens ligning undersøgte vi kapitel 7 i *Hvad er matematik*? 2.
I det følgende skal vi undersøge ellipser som *banekurver*, og vise, hvorledes denne beskrivelse kan åbne for en indsigt i, hvordan en nyrestensknuser fungerer.

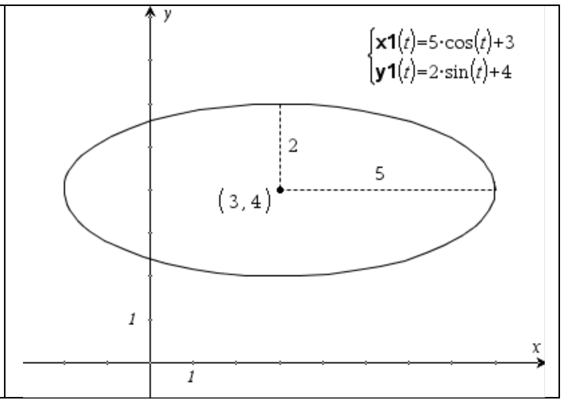
Eksempel 1

Figuren viser *banekurven* for vektorfunktionen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

hvor $0 \le t \le 2\pi$.

Banekurven er en *ellipse* med *centrum* i $(3,4)$, *storakse* $a = 2\cdot 5 = 10$ og *lilleakse* $b = 2\cdot 2 = 4$.



Øvelse 1
Vi vil nu undersøge vektorfunktionen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

hvor $0 \le t \le 2\pi$, ved variabelkontrol, dvs ved på *skift* at lade x_0 , y_0 , a og b variere.

a) Hold x_0 , y_0 og b fast. Lad a variere, plot en vandret linje igennem (x_0, y_0) , aflæs skæringspunkterne med banekurven og aflæs afstanden mellem de to punkter. Hvilken betydning har a for banekurvens udseende?

b) Hold x_0 , y_0 og a fast. Lad b variere, plot en lodret linje igennem (x_0, y_0) , aflæs skæringspunkterne med banekurven og aflæs afstanden mellem de to punkter. Hvilken betydning har b for banekurvens udseende?

c) Hold x_0 , a og b fast. Lad y_0 variere, plot centrum og aflæs. Hvilken betydning har y_0 for banekurvens forløb?

d) Hold y_0 , a og b fast. Lad x_0 variere, plot centrum og aflæs. Hvilken betydning har x_0 for banekurvens forløb?

Øvelse 2

a) Bestem en vektorfunktion for en ellipse med centrum i $(-1,2)$, storakse på 14 og lilleakse 6.

b) Tegn banekurven for ellipsen.

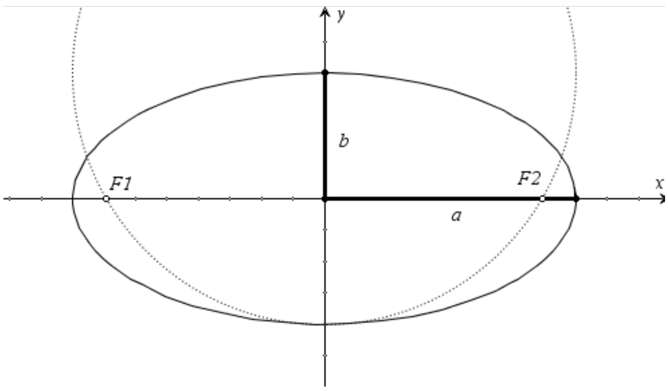
c) Benyt kurvelængdeformlen til at bestemme ellipsens omkreds.

Øvelse 3

Vis at vektorfunktionen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ svarer til ligningen $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$.

2. Brændpunkter

Vi betragter ellipsen med centrum i $(0,0)$ og storakse $2a$ samt lilleakse $2b$ (se figur). Ellipsens brændpunkter, F_1 og F_2, er defineret som skæringspunkterne mellem ellipsens storakse og cirklen med centrum $P(0,b)$ og radius a.



Afstanden fra koordinatsystemets begyndelsespunkt til brændpunkterne er derfor

$$|OF_1| = |OF_2| = \sqrt{a^2 - b^2} .$$

Dvs brændpunkterne har koordinaterne $F_1(-\sqrt{a^2-b^2},0)$ og $F_2(\sqrt{a^2-b^2},0)$.

Øvelse 4

Eftervis, at $|OF_1| = |OF_2| = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Betragter vi i stedet en ellipse med centrum i $C(x_0, y_0)$, storakse $2a$ og lilleakse $2b$, så vil brændpunkterne naturligvis have koordinaterne

$$F_1(x_0 - \sqrt{a^2-b^2}, y_0) \quad \text{og} \quad F_2(x_0 + \sqrt{a^2-b^2}, y_0),$$

svarende til at centrum er parallelforskudt med stedvektoren $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Hvis $P(x,y)$ er et tilfældigt punkt på ellipsen kaldes linjestykkerne PF_1 og PF_2 brændstrålerne fra P.

Øvelse 5

a) Bestem F_1 og F_2 for ellipsen i eksempel 1.

b) Tegn ellipsen og afsæt et tilfældigt punkt $P(x,y)$ på banekurven.

c) Bestem længden af brændstrålerne fra P.

d) Undersøg ved at variere $P(x,y)$, hvad der gælder for afstanden $|PF_1| + |PF_2|$.

Øvelse 6

Vi ser igen på en ellipse med centrum i $C(x_0, y_0)$, storakse $2a$ og lilleakse $2b$, som jo har vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

hvor $0 \le t \le 2\pi$.

Vis, at $|PF_1| + |PF_2| = 2a$.

ISBN 9788770668781

3. Excentricitet

I forbindelse med ellipser optræder begrebet excentricitet.
En ellipses excentricitet betegnes e, og er defineret ved

$$e = \frac{|F_1F_2|}{2a},$$

hvor F_1 og F_2 er ellipsens brændpunkter, og a er ellipsens halve storakse.

Øvelse 7
Vis, at

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

hvor a, henholdsvis b er ellipsens halve lilleakse henholdsvis halve storakse.

Øvelse 8
Undersøg excentricitetens betydning for ellipsens udseende, idet excentriciteten defineres som en funktion af den halve lilleakse, dvs.

$$e(b) = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

og a varieres i intervallet $b \leq a < \infty$.

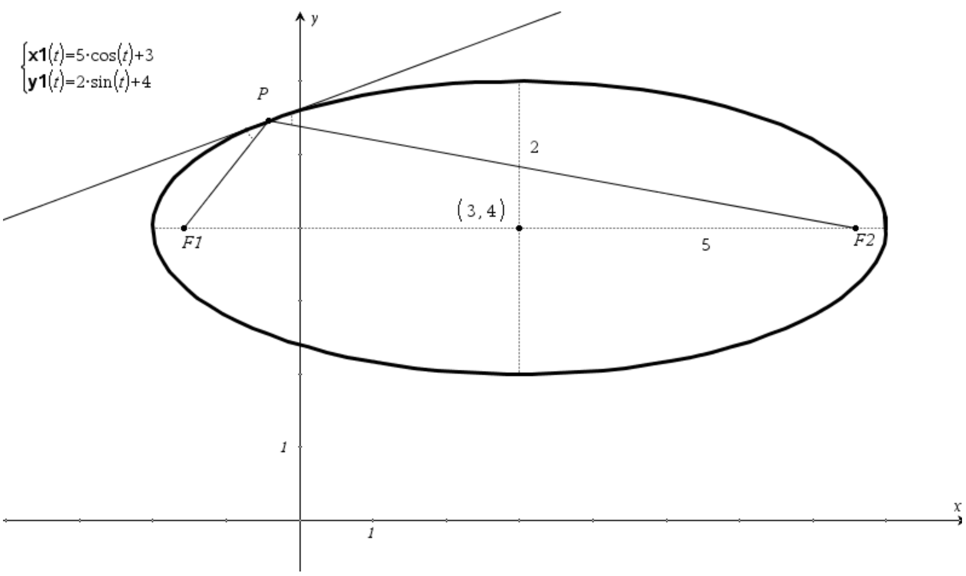
4. Brændstrålernes vinkel med tangenten og anvendelsen heraf i en nyrestensknuser.

Øvelse 9
Vi ser igen på ellipsen fra eksempel 1.

a) Tegn ellipsen, og afsæt et tilfældigt punkt $P(x, y)$ på banekurven.

b) Tegn brændstrålerne fra P, og tegn tangenten i punktet P.

c) Bestem ved hjælp af dit geometriprogram vinklen mellem hver af brændstrålerne fra P og tangenten i P (se figur).



d) Undersøg, hvad der gælder om de to vinkler, når $P(x,y)$ varieres.

e) Hvad gælder der om en brændstråle, der starter i et af brændpunkterne og reflekteres i tangenten?

Den egenskab vi opdagede eksperimentelt i øvelse 9 vil vi nu bevise. Egenskaben i øvelse 9e) udnyttes i de såkaldte nyrestensknusere, idet en patient placeres så den nyresten, der skal pulveriseres, befinder sig i den ene brændpunkt af en ellipsoide (en omdrejningsellipse), mens der i det andet brændpunkt befinder sig en lydkilde, der kan udsende ultralyd. Når lydbølgerne herfra rammer overfladen reflekteres de og samles i det andet brændpunkt. Derved opstår en høj koncentration af lydenergi, som vil være i stand til at ødelægge nyrestenen uden noget operativt indgreb.

Øvelse 10

Vi betragter ellipsen med centrum i $(0,0)$ og storakse $2a$ samt lilleakse $2b$.
Vis, at ellipsens brændpunkter, F_1 og F_2, har koordinaterne $F_1(-e\cdot a,0)$ og $F_2(e\cdot a,0)$.
(Vink: Udnyt fx formlen $e=\dfrac{|F_1F_2|}{2a}$ som kan omskrives til: $|F_1F_2|=e\cdot 2a$, og udnyt ellipsens symmetriegenskab)

Øvelse 11

Betragt et tilfældigt punkt *P* på ellipsen med stedvektor $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos(t)\\b\sin(t)\end{pmatrix}$. Stedvektoren som funktion af *t* betegnes $\vec{r}(t)$.

a) $\vec{r}'(t)$ er retningsvektor for tangenten. Vis, at $\vec{r}'(t)=\begin{pmatrix}-a\sin(t)\\b\cos(t)\end{pmatrix}$.

b) Kald vinklen mellem brændstrålen F_1P og *tangenten* for *u*, og vinklen mellem brændstrålen F_2P og *tangenten* for *v*. Bemærk, dette er vinkler mellem linjestykker. Argumenter ud fra tegningen ovenfor eller ud fra din egen tegning for, at vinkel *u* svarer til vinklen mellem vektorerne $\overrightarrow{PF_1}$ og $\vec{r}'(t)$, og at vinkel *v* svarer til vinklen mellem vektorerne $\overrightarrow{F_2P}$ og $\vec{r}'(t)$.

c) Vis, at disse vektorer har koordinaterne: $\overrightarrow{PF_1}=\begin{pmatrix}-ea-a\cos(t)\\-b\sin(t)\end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{F_2P}=\begin{pmatrix}a\cos(t)-ea\\b\sin(t)\end{pmatrix}$

Vi ønsker at vise, at vinkel *u* er lig med vinkel *v*. Dette gør vi ved at vise, at $\cos(u)=\cos(v)$. Og i den sidste ligning kan vi udnytte vores viden om sammenhæng mellem skalarprodukt og vinkel:

$$\cos(u)=\frac{\overrightarrow{PF_1}\cdot\vec{r}'(t)}{\left|\overrightarrow{PF_1}\right|\cdot\left|\vec{r}'(t)\right|}\qquad\qquad \cos(\mathrm{v})=\frac{\overrightarrow{F_2P}\cdot\vec{r}'(t)}{\left|\overrightarrow{F_2P}\right|\cdot\left|\vec{r}'(t)\right|}$$

Vi udnytter nu formlen $e^2\cdot a^2=a^2-b^2$, som vi får fra øvelse 7, samt formlen $\left(\cos(\mathrm{t})\right)^2+\left(\sin(t)\right)^2=1$ til at gennemføre følgende udregninger:
(*de farvede udtryk svarer til hinanden – argumenter for hvert trin i omskrivningen*)

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

$$
\begin{aligned}
\left(\left|\overrightarrow{PF_1}\right|\right)^2 &= \left(-ea-a\cos(t)\right)^2+\left(-b\sin(t)\right)^2\\
&=\left[e^2\cdot a^2+a^2\cdot(\cos(t))^2+2\cdot ea\cdot a\cos(t)\right]+\left[b^2\cdot(\sin(t))^2\right]\\
&=\left(a^2-b^2\right)+a^2\cdot(\cos(t))^2+2\cdot ea\cdot a\cos(t)+b^2\cdot\left(1-(\cos(t))^2\right)\\
&=a^2+a^2\cdot(\cos(t))^2-b^2\cdot(\cos(t))^2+2\cdot ea\cdot a\cos(t)\\
&=a^2+\left(a^2-b^2\right)\cdot(\cos(t))^2+2\cdot ea\cdot a\cos(t)\\
&=a^2+e^2\cdot a^2\cdot(\cos(t))^2+2\cdot ea\cdot a\cos(t)\\
&=\left(a+e\cdot a\cdot(\cos(t))\right)^2
\end{aligned}
$$

Konklusion:

$$\left|\overrightarrow{PF_1}\right|=a+e\cdot a\cdot(\cos(t))$$

Øvelse 12

Vis efter samme opskrift følgende:

a) $\left(\left|\overrightarrow{F_2P}\right|\right)^2=\left(a-e\cdot a\cdot(\cos(t))\right)^2$, hvoraf: $\left|\overrightarrow{F_2P}\right|=a-e\cdot a\cdot(\cos(t))$

b) $\overrightarrow{PF_1}\cdot\vec{r}'(t)=e\cdot a\cdot\sin(t)\cdot\left(a+e\cdot a\cdot(\cos(t))\right)$

c) $\overrightarrow{F_2P}\cdot\vec{r}'(t)=e\cdot a\cdot\sin(t)\cdot\left(a-e\cdot a\cdot(\cos(t))\right)$

Øvelse 13

Indsæt nu de fundne udtryk i formlerne for $\cos(u)$ og $\cos(v)$, og konkluder, at $\cos(u)=\cos(v)$, hvoraf vi kan slutte, at $u=v$: Brændstrålernes vinkel med tangenten er lige store. Derfor vil et signal udsendt fra det ene brændpunkt og reflekteret i overfladen af elipsoiden, samme ned i det andet brændpunkt.