

Projekt 4.2 Matematik-Fysik: Klotoiden og loops i rutsjebaner

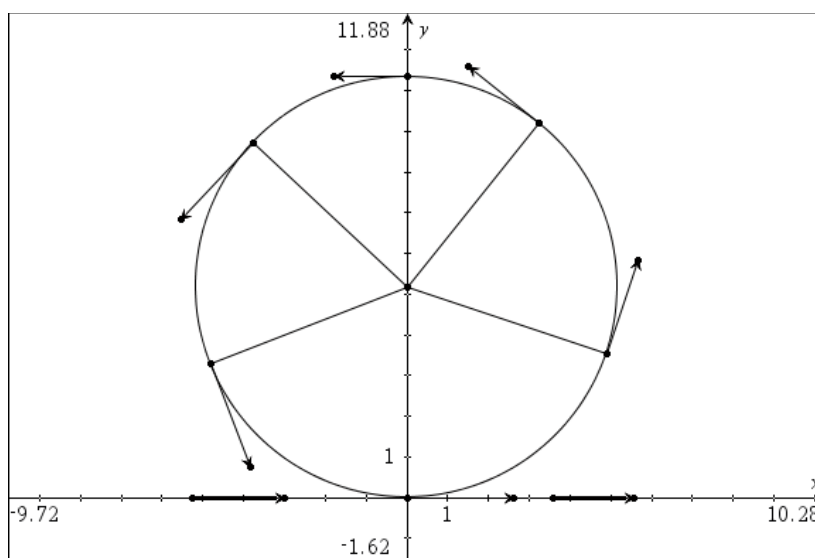
Problemet med at anvende de rene cirkelbevægelser og nødvendigheden af at anvende overgangskurver som klotoiden kan illustreres med rutsjebaner!

Når man kører rundt i en rutsjebane vil man være udsat for en acceleration, der primært kommer fra centripetalaccelerationen i svingene. Centripetalaccelerationen er givet ved (se nærmere i afsnit 3):

$$a = \frac{v^2}{r} = v^2 \cdot \kappa$$

En tommelfingerregel for rutsjebanebyggere siger, at centripetalaccelerationen gerne må komme op på 5g (det er sjovt), men helst ikke meget over 7g (det er ikke sjovt!).

Hvis vi laver et lodret loop kan vi forsøge os med en cirkelbevægelse, hvor vi kommer ind langs x-aksen og følger cirklen rundt og forlader loopet igen langs x-aksen:



For et sådant loop gælder der følgende bemærkelsesværdige sætning:

Sætning:

Hvis vi ser bort fra gnidning så vil accelerationen i et cirkelformet loop være mindst 5g, hvor g er tyngdeaccelerationen.

Bevis: Da vi kan se bort fra gnidning er den mekaniske energi bevaret, dvs.

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot y = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$$

Her er v_0 farten i den jævne retlinjede bevægelse på x-aksen før vi kommer ind i loopet (og også efter vi er kommet ud af loopet, da vi ser bort fra gnidningen), mens y er højden over jordoverfladen.

Vi omskriver denne sammenhæng til

$$v^2 = v_0^2 - 2g \cdot y$$

Farten er mindst i toppen af loopet, hvorfor vi finder

$$v_{\min}^2 = v_0^2 - 4g \cdot R,$$

hvor R er radius i loopet, dvs $y = 2R$

Ved division med radius finder vi den følgende sammenhæng:

$$\frac{v_{\min}^2}{R} = \frac{v_0^2}{R} - 4g, \text{ dvs. } a_{\min} = a_0 - 4g$$

Heraf ser vi allerede at der må gælde $a_0 \geq 4g$ for at vi overhovedet kan nå toppen af loopet! Men vi skal også hænge fast i banen, så vi undgå at falde ned på grund af tyngdekraften. Centripetalaccelerationen i toppen af loopet må

derfor mindst være g , da vi ellers vil falde i tyngdefeltet, når vi når toppen af loopet. Men det medfører netop at der må gælde $a_0 \geq 5g$. ✓

I praksis er accelerationen i bunden af loopet større, da vi dels er nødt til at tage højde for gnidning, hvorfor vi mister fart undervejs i loopet, dels må have en vis margin, så man ikke kan mærke svævet i toppen, hvor man har hovedet nedad.

Fra ingen centripetalacceleration på vej ind mod loppet, oplever man altså pludselig en stor centripetalacceleration, når man træder ind i det cirkelformede loop, en acceleration, der i praksis må være væsentligt større end $5g$, erfaringsmæssigt helt op til $10g$, for overhovedet at kunne gennemføre loopet. Det er *ikke* godt! Læg mærke til at sætningen gælder uanset størrelsen af loopet: Det er samme begrænsninger, der gælder for legetøjsbiler hjemme i stuen (hvor vi kan se bort fra ubehaget) og de store rutsjebaner i forlystelsesparker.

Ved konstruktion af loops i forlystelsesparker er man derfor afskåret fra at bruge cirkelformede loops! I en rutsjebane med loop kommer vektorfunktioner som klotoiden igen på banen, da klotoiden giver mindre skarpe sving end fx cirkelbuer og dermed gør turen i rutsjebaner mere behagelig.

