ISBN 9788770668781


L&R Uddannelse EGMONT

## Projekt 4.1 Cirkelbevægelser og klotoider

(*Klotoider er lidt vanskeligt stof, men er samtidig en matematik, man godt kan sætte sig ind i gymnasiet, og som er meget tæt på den faktiske matematik, som vejingeniører anvender, når de planlægger større vejanlæg som motorvejsbyggeri. Emnet er behandlet i HEM3, den indledende fortælling til kapitel 4, men man kan ofte have god gavn af at se et emne fremstillet på en lidt anden måde. Dette projekt bygger på materialer fra DTUs gymnasiematematik*).

Når vi kører i bil og vejen pludselig drejer f.eks. til venstre, se figur 1, vil man ofte være tilbøjelig til at skære svinget af ved at begynde at dreje, allerede før man kommer ind i svinget. Svinget bliver hermed mindre skarpt og kørslen føles behageligere.

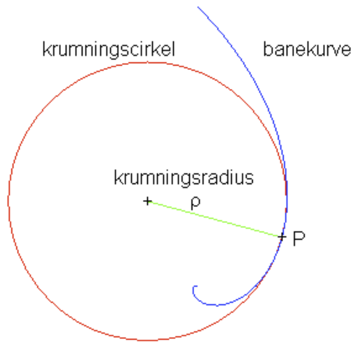
Hvis man kører på et lige vejstykke og møder et vejsving, der er udformet som en cirkelbue og samtidig prøver at holde bilens fart konstant, vil man pludselig mærke en tværgående kraft eller et "ryk", idet man kører ind i vejsvinget.

Årsagen til dette "ryk" er, at man for at følge bilens cirkelbane må være påvirket af en passende centripetalkraft. Jo skarpere vejsvinget er, eller jo højere farten er, desto større bliver kraften eller "rykket". For at forøge køresikkerheden og kørekomforten, udformes vejenes kurver derfor ikke som cirkelbuer, men som *klotoider*, se figuren nedenfor.

Klotoiden er en kurve, hvis krumning forøges gradvist. Herved undgår føreren af bilen det bratte "ryk", når bilen kører ind i vejsvinget. Vi skal senere se nærmere på klotoidens udformning, men først vil vi undersøge cirkelbevægelsen lidt nøjere.

En vilkårlig banekurve kan i en omegn af et punkt P altid tilnærmes med en cirkel, se figuren. Cirklen kaldes for banekurvens *krumningscirkel* i P, og radius $\rho$ ( rho) kaldes for banekurvens *krumningsradius* i P. Jo stærkere vejen drejer eller krummer, des mindre er krumningsradius. Vi indfører et mål for vejens krumning $\kappa$ ( kappa) som den reciprokke værdi af krumningsradius:

$$\kappa = \frac{1}{\rho}$$

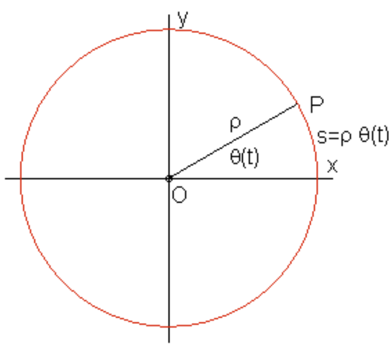



Lad os betragte en partikel P, der bevæger sig på en cirkel med radius $\rho$, se figuren.

*Vinkel-drejningen* imellem *x*-aksen og stedvektoren $\overrightarrow{OP}$ kaldes $\theta(t)$.

Sammenhængen imellem vinkel-drejningen og den tilbagelagte *vejstrækning eller buelængde* $s(t)$ er givet ved:

$$s(t) = \rho \cdot \theta(t)$$



**ISBN 9788770668781**



*Vinkelhastigheden* $\omega$ og *vinkelaccelerationen* $\alpha$ er defineret ved

$\omega = \dot{\theta}(t)$ , vinkelhastighed

$\alpha = \dot{\omega}(t) = \ddot{\theta}(t)$ , vinkelacceleration

hvor vi her anvender Newtons "prik-notation" for differentiation.

I det viste xy-koordinatsystem kan stedvektoren $\overrightarrow{OP} = \bar{r}(t)$ skrives

$$\bar{r}(t) = [\, x(t)\,,\, y(t)\,] = [\, \rho \cos\theta(t)\,,\ \rho \sin\theta(t)\,]$$ , **stedvektoren** ,

hvor $x(t) = \rho \cos\theta(t)$ og $y(t) = \rho \sin\theta(t)$ er koordinatfunktionerne.

Hastigheden $\bar{v}(t)$ defineret

$$\bar{v}(t) = [\,\dot{x}(t)\,,\ \dot{y}(t)\,] = [\,-\sin\theta(t)\,,\,\cos\theta(t)]\,\rho\,\dot{\theta}(t)$$ , **hastigheden** .

Indfører vi *enhedstangentvektoren* $\bar{e}_t$ til cirklen

$$\bar{e}_t = [\,-\sin\theta(t)\,,\,\cos\theta(t)\,]$$ ,

kan $\bar{v}(t)$ skrives

$$\bar{v}(t) = \rho\dot{\theta}(t)\,\bar{e}_t = \rho\,\omega\,\bar{e}_t \quad .$$

Accelerationen $\bar{a}(t)$ er defineret

$$\bar{a}(t) = (\,\ddot{x}(t)\,,\ \ddot{y}(t)\,) = [-\sin\theta(t), \cos\theta(t)]\,\rho\,\ddot{\theta}(t) - [\,\cos\theta(t), \sin\theta(t)\,]\,\rho\,\dot{\theta}(t)^2 \quad .$$

Indfører vi *enhedsnormalvektoren* $\bar{e}_n = \hat{e}_t$ som tværvektoren til $\bar{e}_t$

$$\bar{e}_n = -[\,\sin\theta(t)\,,\,\cos\theta(t)]$$

kan $\bar{a}(t)$ skrives

$$\bar{a}(t) = \rho\,\ddot{\theta}(t)\,\bar{e}_t + \rho\,\dot{\theta}(t)^2\,\bar{e}_n = \rho\,\dot{\omega}\,\bar{e}_t + \rho\,\omega^2\,\bar{e}_n$$ , **accelerationen**

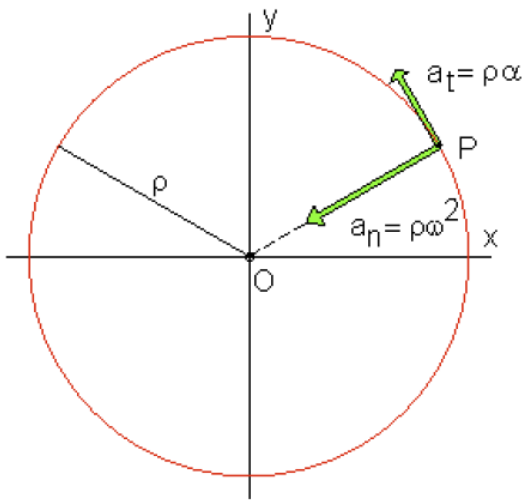
Accelerationen i cirkelbevægelsen $a_n$ og $a_t$ efter normalen og tangenten kan da skrives

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \rho\,\omega^2$$ , **normalaccelerationen**

$$a_t = \dot{v} = \rho\,\dot{\omega} = \rho\,\alpha$$ , **tangentialaccelerationen**

**ISBN 9788770668781**






Figur 5. Normal- og tangentialaccelerationen.

I figur 5 er vist retningen af normal- og tangentialaccelerationen i en cirkelbevægelse.

**Eksempel 1.**

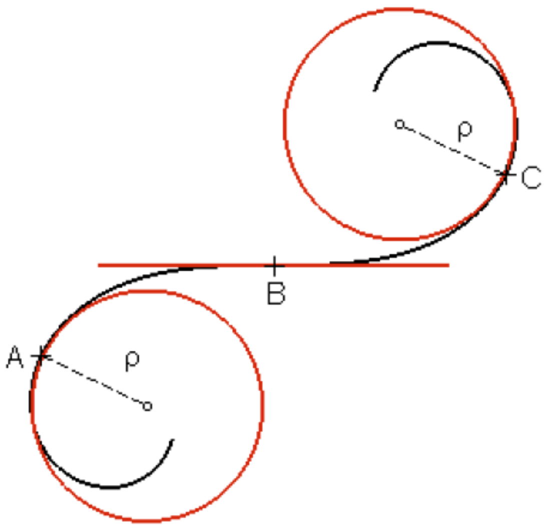



Fig. 6. Bilkørsel i vejsving.

Vi betragter en bil, der kører på en snoet vejstrækning ABC , se figur 6. I punktet A er krumningsradius $\rho$ = 400 m , i punktet B er krumningsradius uendelig og krumningen $\kappa$ = 0, og i punktet C er krumningsradius igen $\rho$ = 400 m ( Vejstrækningen ABC er udformet som en klotoide, hvor krumning $\kappa = 1/\rho$ afhænger lineært af den kørte vejstrækning s , se nærmere herom senere). I figur 6 er vist krumningscirklerne i A , B og C , hvor krumningscirklen i B udarter til en ret linie. De to vejstrækninger AB og BC er lige store, og der gælder AB = BC = 900 m.

**ISBN 9788770668781**



Vi vil nu se på 2 tilfælde. I 1. tilfælde antager vi, at bilen kører med konstant fart v på hele strækningen ABC . I 2. tilfælde antager vi at bilen bremser på strækningen ABC med en konstant kraft, således farten aftager jævnt. Den tidsafledede $\dot{v}$ af farten v er da en konstant.

**1. tilfælde: Farten v er konstant på strækningen ABC.**

Vi antager, at farten er v = 20 m/s = 72 km/h og er konstant på hele vejstrækningen ABC . Vi ønsker at beregne accelerationerne $a_A$ , $a_B$ og $a_C$ af bilen i hver punkterne A , B og C .

Først ser vi på punktet A . Bilens banekurve er med tilnærmelse cirkelformet med en radius på $\rho$ = 400 m. Da farten er konstant, vil bilen kun have en normalacceleration $a_{A,n}$ , altså

$$a_A = a_{A,n} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{20^2}{400} \ \text{m/s}^2 = 1 \ \text{m/s}^2 .$$

På grund af symmetrien må accelerationen i C også være $a_A = a_C = 1 \ \text{m/s}^2$ . I punkt B er normalaccelerationen $a_{B,n} = 0$ , da $\rho = \infty$ . Tangentialaccelerationen i B $a_{B,t}$ er ligeledes nul, da farten v er konstant. Det betyder, at $a_B = 0 \ \text{m/s}^2$ .

**2. tilfælde: Farten v aftager jævnt.**

Vi antager, at farten i A er $v_A$ = 25 m/s = 90 km/h men aftager på hele vejstrækningen ABC , idet der gælder, at den tidsafledede af farten $\dot{v} = -1/8 \ \text{m/s}^2$ er en konstant.

Da farten aftager jævnt på strækningen ABC , kan vi benytte formlen fra bevægelsen i tyngdefeltet til beregning af farten som funktion af vejstrækningen s , idet vi blot skal erstatte tyngdeaccelerationen g med $\dot{v} = -1/8 \ \text{m/s}^2$ . Vi har da for farten v(s) i et vilkårligt punkt af banen

$$v(s) = \sqrt{v_A^2 + 2\dot{v}s} = \sqrt{25^2 - 2\cdot 1/8 \cdot s} \ \text{m/s} .$$

Indsætter vi $s_{AB}$ = 900 m og $s_{AC}$ = 1800 m i ovenstående formel, får vi

$V_B$ = 20 m/s = 72,0 km/h og $V_C$ = 13,2 m/s = 47,6 km/h .

Normalalacceleration $a_{A,n}$ og $a_{A,t}$ tangentialaccelerationen i A er da

$$a_{A,n} = \frac{v_A^2}{\rho} = \frac{25^2}{400} \ \text{m/s}^2 = 1{,}56 \ \text{m/s}^2 ,$$

$$a_{A,t} = \dot{v} = -1/8 \ \text{m/s}^2 = -0{,}125 \ \text{m/s}^2 ,$$

hvorefter den resulterende acceleration A bliver

$$a_A = \sqrt{1{,}56^2 + 0{,}125^2} \ \text{m/s}^2 = \underline{\mathbf{1{,}\ 57\ m/s^2}} .$$

Ligesom i det 1. tilfælde er normalaccelerationen i punktet B , $a_{B,n} = 0$ , da $\rho = \infty$ . Tangentialaccelerationen , $a_{B,t}$ i B er den samme som i A , nemlig

$$a_{B,t} = \dot{v} = -1/8 \ \text{m/s}^2 = -0{,}125 \ \text{m/s}^2 .$$

**ISBN 9788770668781**


Hvorefter den resulterende acceleration B bliver

$$a_B = \sqrt{0^2 + 0{,}125^2} \ \text{m/s}^2 = \underline{\mathbf{0.125\ m/s^2}}\ .$$

Normalalacceleration $a_{C,n}$ og tangentialaccelerationen $a_{C,t}$ i C er

$$a_{C,n} = \frac{v_C^2}{\rho} = \frac{13{,}23^2}{400} \ \text{m/s}^2 = 0{,}438\ \text{m/s}^2\ ,$$

$$a_{C,t} = \dot{v} = -\,1/8 \ \text{m/s}^2 = -\,0{,}125\ \text{m/s}^2\ ,$$

hvorefter den resulterende acceleration C bliver

$$a_C = \sqrt{0{,}4375^2 + 0{,}125^2} \ \text{m/s}^2 = \underline{\mathbf{0{,}455\ m/s^2}}\ .$$

---

**Eksempel 2.**

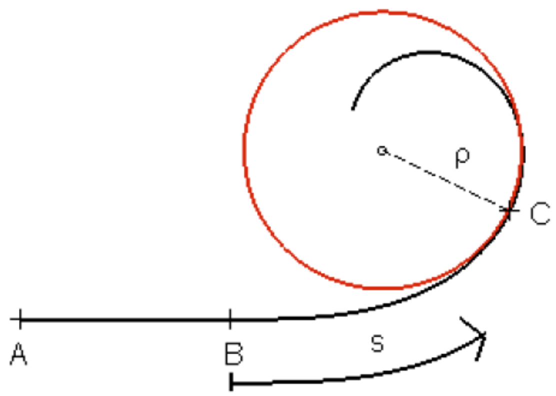



Fig. 7. Bilkørsel i venstreving.

Vi betragter en vejstrækningen ABC , se figur 7. På strækningen AB er vejen lige. I B begynder vejen at svinge til venstre. Vi antager, at en bil kommer kørende på vejstrækningen AB med konstant fart v og fortsætter ind i vejsvinget, samtidig med at den holder farten v konstant. Lad s betegne vejstrækningen eller buelængden regnet ud fra B, se figur 7. Vi vil igen se på bilens acceleration under kørslen. På den lige vejstrækning AB er accelerationen

$$a = 0\ , \quad \text{strækning AB}\ , \ \text{lige vejstrækning}$$

da farten er konstant. Hvis hele vejstrækningen BC var udformet som en cirkelbue med konstant radius $\rho$, vil accelerationen a på stykket BC være

$$a = \frac{v^2}{\rho}\ . \quad \text{strækning BC}\ , \quad \text{konstant cirkelradius } \rho\ .$$

Under denne forudsætning vil føreren af bilen pludselig blive påvirket af en tværkraft $F = m \cdot a$ , når bilen kører ind på vejstykket BC, hvor m er massen af føreren. Den pludselige

**ISBN 9788770668781**



tværkraft føles som et ryk og gør kørslen ubehagelig. Har føreren en masse på m = 80 kg og er f.eks. $\rho$ = 400 m og bilens fart v = 25 m/s = 90 km/h , bliver tværkraften F = 125 N ≈ 12,5 kp !

---

For at undgå dette "ryk" ved overgang fra kørsel på en lige vejstrækning til kørsel på en cirkelbue, indskyder man i vejsvinget før cirkelbuen en *overgangskurve* på en sådan måde, at tværkraften F forøges proportionalt med den kørte vejstrækning s . For denne overgangskurve har vi da , at F = k s eller ma = k s , hvor k er en konstant. Heraf ser vi, at

$$m\frac{v^2}{\rho} = k\,s \quad .$$

For vejens krumning $\kappa$ = 1/ $\rho$ må der derfor gælde

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{k}{mv^2}\cdot s \;= \text{konstant}\cdot s \quad ,$$

det vil sige, at krumningen i overgangskurven skal være proportional med den kørte vejstrækning. En kurve, der har den egenskab kaldes for en *klotoide*. Vejstrækningen BC, der er vist i figur 7, er netop udformet som en klotoide. Vi skal se nærmere på klotoiden i næste afsnit.

### Klotoiden

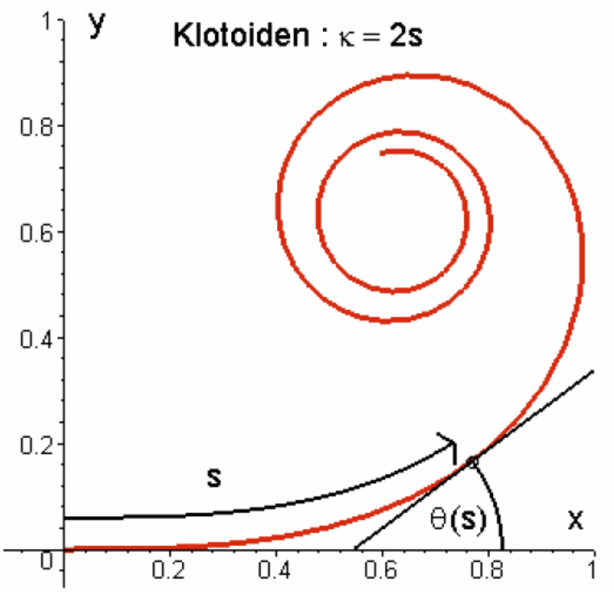



Fig. 8. Klotoiden .

En klotoide er, som vi tidligere har set, defineret som en kurve, hvor krumningen $\kappa$ = 1 / $\rho$ er proportional med buelængden s , altså

$$\kappa = k\,s\;, \qquad \text{klotoiden}\;,$$

**ISBN 9788770668781**


og hvor k er en given konstant. Vi skal nu udlede en parameterfremstilling for klotoiden.

Vi måler tangentens vinkeldrejning $\theta(s)$ med x-aksen for, se figur 8 , som funktion af s . Krumningen $\kappa(s)$ defineres matematisk som *tangentens vinkeldrejningen per buelængdeenhed* eller

$$\kappa(s) = \frac{1}{\rho(s)} = \frac{d\theta(s)}{ds} \,, \qquad \textbf{krumningen} \,.$$

For klotoiden har vi specielt, at $\kappa = k\,s$. Hermed finder vi for vinkeldrejningen $\theta$ som funktion af s

$$\theta(s) = \tfrac{1}{2}\,k\,s^2 \,, \qquad \textbf{klotoiden.}$$

Er farten v(t) kan hastigheden i et punkt på kurven skrives

$$\bar{v}(t) = v(t)\,[\cos\theta(s) \,,\, \sin\theta(s)] \,.$$

Sætter vi farten v(t) = 1 , bliver buelængden s = t , hvorefter hastigheden $\bar{v}(t) = \bar{v}(s)$ kan udtrykkes

$$\bar{v}(s) = [\cos\theta(s) \,,\, \sin\theta(s)] \,.$$

Opfatter vi x(s) og y(s) som funktioner af buelængden, er tangentvektoren for klotoiden givet ved

$$\bar{v}(s) = [x'(s) \,,\, y'(s)] = [\cos\theta(s) \,,\, \sin\theta(s)] \,.$$

Heraf kan vi finde udtryk for x(s) og y(s)

$$x(s) = \int_0^s \cos\left(\tfrac{1}{2}\,k\,s'^2\right) ds' \qquad \textbf{parameterfremstilling}$$

$$y(s) = \int_0^s \sin\left(\tfrac{1}{2}\,k\,s'^2\right) ds' \qquad \textbf{for en klotoide.}$$

Ovenstående integraler kan kun udregnes numerisk ved brug af f.eks. MAPLE. Accelerationen når farten er v = 1

$$\bar{a}(s) = [x''(s) \,,\, y''(s)] = \frac{d\theta(s)}{ds}\,[-\sin\theta(s) \,,\, \cos\theta(s)] = k\,s\,[-\sin\theta(s) \,,\, \cos\theta(s)] \,,$$

og størrelsen a(s) af accelerationen bliver derfor a(s) = k s . Er farten i banekurven imidlertid $v(t) \neq 1$ kan normalaccelerationen $a_n$ udtrykkes

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \kappa\,v^2 = k\,v^2\,s \,.$$

Vi skal i næste afsnit se hvorledes man benytter klotoiden til dimensionering af overgangskurver vejsving.

**ISBN 9788770668781**


## Dimensionering af overgangskurver

Kører vi med en konstant fart v i et vejsving, der er udformet som en klotoide, vil normal-accelerationen, som vi så i forrige afsnit, være

$$a_n = k\,v^2\,s \quad ,$$

hvor

$$\rho(s) = \frac{1}{k\,s} \quad .$$

Accelerationen og dermed den kraft, som føreren af bilen mærker, vokser altså proportionalt med tiden. For at sikre kørekomforten og køresikkerheden har man vedtaget at *ændringen af accelerationen pr. tidsenhed maksimalt må være 0,45 m/s³*, eller

$$\frac{da_n}{dt} = k\,v^3 = 0{,}45\ \mathrm{m/s^3} \quad ,$$

og dermed formlen

$$\rho(s) = \frac{1}{k\,s} = \frac{v^3}{0{,}45\mathrm{m/s}^3}\cdot\frac{1}{s} = \frac{A^2}{s} \quad ,$$

hvor vi har indført klotoide parameteren A, der har enheden meter, ved

$$A = \sqrt{\frac{1}{k}} = \sqrt{\frac{v^3}{0{,}45\mathrm{m/s}^3}} \quad , \quad \text{klotoide parameteren.}$$

Klotoiden benyttes tidligere omtalt som en overgangskurve imellem to vejstrækninger med forskellige krumningsradier $R_1$ og $R_2$ . Den samlede længde L af klotoiden kan derfor udtrykkes

$$L = A^2\cdot\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right) = \frac{A^2}{R_e} \quad ,$$

Hvor vi har indført størrelsen den *effektive radius* $R_e$ ved

$$\frac{1}{R_e} = \left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right) \quad .$$

For ændringen $\Theta$ i tangentretningen ( d.v.s. ændringen i kørselsretningen) på strækningen L har vi

$$\Theta = \tfrac{1}{2}k\left(s_2^2 - s_1^2\right) = \tfrac{1}{2}\frac{1}{A^2}\left(\left(\frac{A^2}{R_2}\right)^2 - \left(\frac{A^2}{R_1}\right)^2\right) = \tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{A}{R_2}\right)^2 - \left(\frac{A}{R_1}\right)^2\right) \quad .$$

**ISBN 9788770668781**





I figur 9 er vist klotoide længden L som funktion af den effektive radius $R_e$ for forskellige værdier af hastigheden v.

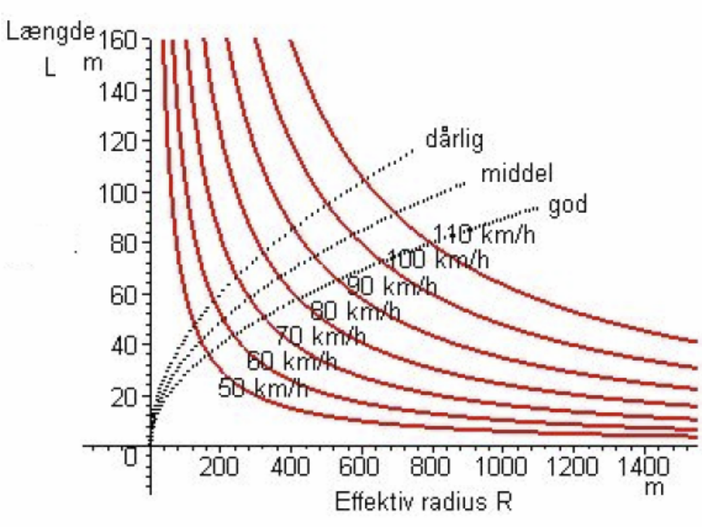



Fig. 9. Klotoide længden som funktion af den effektive radius.

Ved små krumningsradier i vejsving bliver oversigtsforholdene dårlige og de tværkræfter føreren af bilen udsættes for store. Der er derfor grænser for hvor små krumningsradier, man vil tolerere af hensyn til køresikkerheden. Hvis vi forlanger at den maksimale kraft er 100 N , som en person på 75 kg må udsættes for i et vejsving, hvor bilens fart er v, bliver den mindste krumningsradius $R_{min}$ og den største buelængde $L_{max}$ for klotoiden bestemt ved

$$\frac{v^2}{R_{min}} 75\,\text{kg} = 100\,\text{N} \quad , \quad R_{min}\, L_{max} = \frac{v^3}{0{,}45\text{m/s}^2}$$

eller

$$L_{max} = 3{,}42\,\text{m}^{1/2}\ \sqrt{R_{min}} \quad .$$

Denne sammenhæng imellem $L_{max}$ og $R_{min}$ , der giver en ”middel” god køresikkerhed, er vist i fig. 9 , som den stiplede kurve ”middel” . Ligger krumningsradierne inden for den stiplede kurve ”god” , kan man helt undgå at benytte klotoider som overgangskurver i vejsvinget. At man gør det alligevel skyldes alene æstetiske grunde.

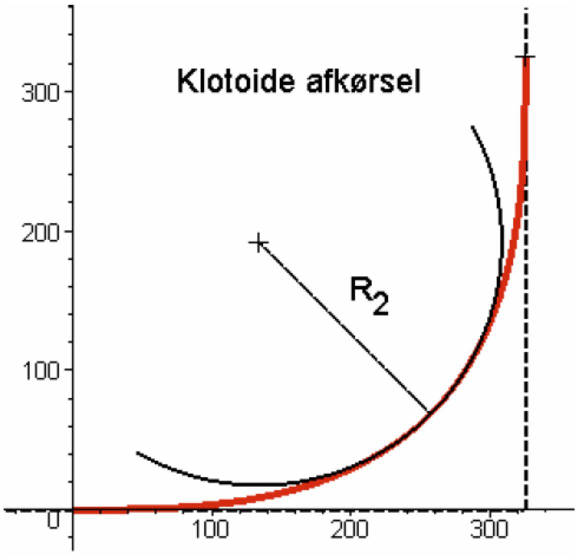
Vi skal nu se på et eksempel på beregning udformningen af et vejsving.

ISBN 9788770668781





**Eksempel 3.**




10. Klotoide forbindese mellem 2 motorveje, der krydser hinanden

Vi ønsker at udforme en forbindelse fra en øst-vest gående motorvej til nord-syd gående motorvej, se figur 10. Den anbefalede hastighed på forbindelsen er sat til 100 km/h.

Afkørslen tænkes opbygget af to klotoide buer, hvoraf den ene har $R_1 = \infty$ og en drejningsvinkel $\Theta$ på 45° , medens den anden er spejlvendt, se figur 10 . Klotoide parameteren er

$$A = \sqrt{\frac{v^3}{0{,}45\text{m/s}^3}} = \sqrt{\frac{100^3\ \text{m}^3/\text{s}^3}{3{,}6^3 \cdot 0{,}45\text{m/s}^3}} = 218{,}2\ \text{m}\ .$$

For $\Theta$ haves $\Theta = \pi/4$ , hvilket giver

$$R_2 = \frac{A}{\sqrt{2\Theta}} = \frac{218{,}2}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}} = 174{,}1\ \text{m}$$

$$L = \frac{A^2}{R_e} = \frac{218{,}2^2}{174{,}1}\text{m} = 273{,}5\ \text{m}$$

Den samlede forbindelseslængde imellem motorvejene bliver 547 m . Den største centripetalacceleration ved en fart på 100 km/h = 27,8 m/s er

$$a_n = \frac{v^2}{R_2} = \frac{27{,}8^2}{174{,}1}\ \text{m/s}^2 = 4{,}44\ \text{m/s}^2\ .$$

Den største tværkraft en fører på 80 kg mærker i svinget er derfor F = 80 · 4,44 N = 355 N ≈ 36 kp .

Konklusion: Dette er selvfølgelig helt uansvarligt.

## Opgave

Beregn en s-formet forbindelse imellem 2 motorveje til en anbefalet fart på 90 km/h.
Motorvejene ligger parallelforskudt i forhold til hinanden med en indbyrdes afstand på 1 km .

## Litteratur

Bjørn Grøn, Bodil Bruun og Olav Lyndrup, Hvad er matematik? 3, Kapitel 5, *Vektorfunktioner og parameterkurver,* Lindhardt og Ringhof 2019. Heri findes blandt andet en række øvelser og opgaver.

Bolet, L., & Kjems, E. (2015). *Vejstrækningers geometri: Tracering*. Department of Civil Engineering, Aalborg University. DCE Lecture notes Nr. 40

Erik Vestergård, *Vejgeometri*, Vestergaards matematiksider, 2007

Koegel et al, *A Comparison of Vehicular Trajectory Encoding Techniques*, published in IFIP Annual Mediterranean Ad Hoc Networking Workshop, 2011

*Tracering, Anlæg og Panlægning*. Vejregler, Vejdirektoratet, 2012

Raph Levien, *The Euler spiral: a mathematical history,* University of California at Berkeley, 2008

Arthur Talbot, The Railway Transition Spiral, Engineering News Publishing, New York 1912 (Første udgave 1901)